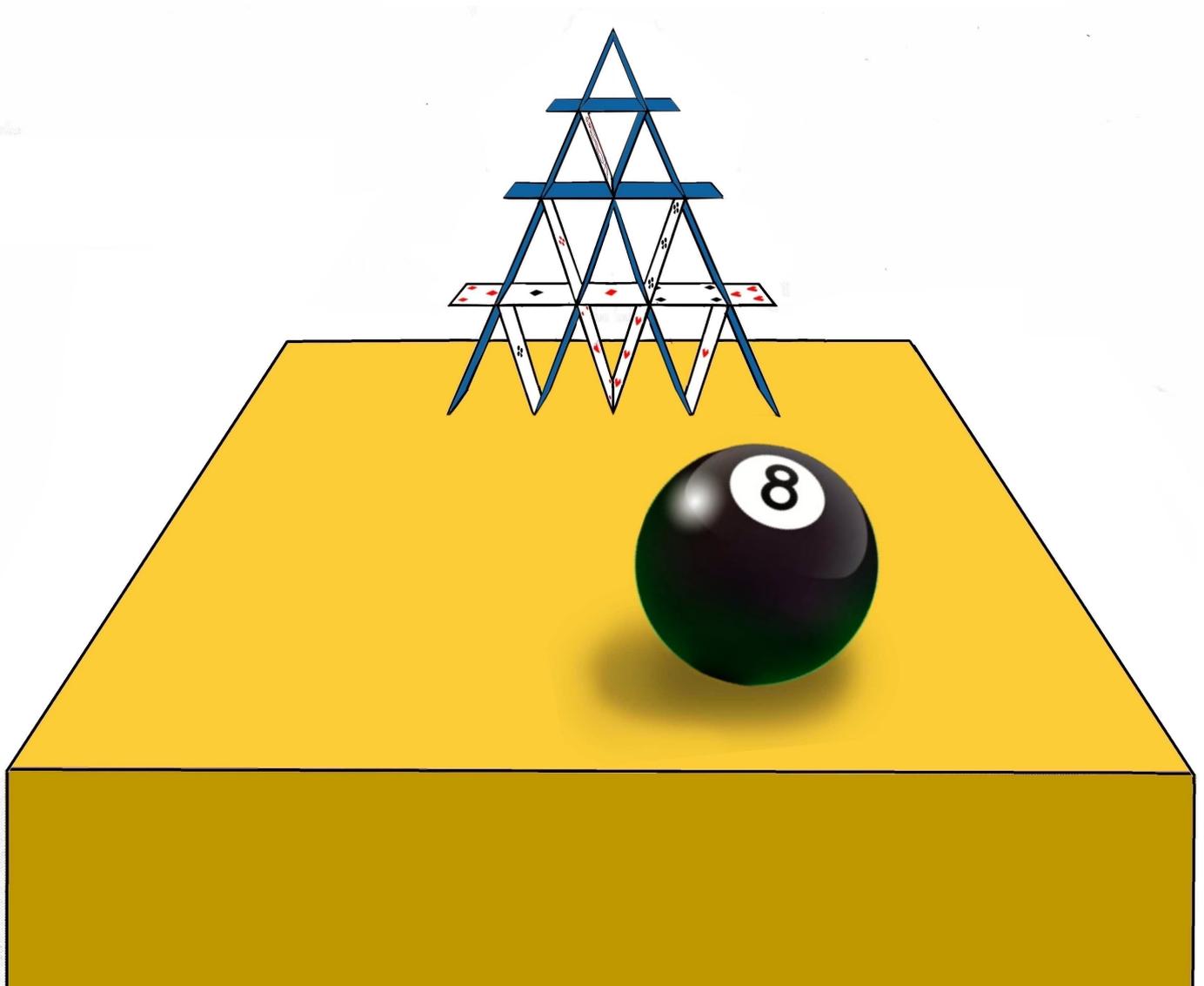


Hicham Zejli

Le Modèle Cosmologique Janus

de Jean-Pierre Petit



ISBN 978-29-59189-30-2



9 782959 189302

Version numérique actualisée :



Table des matières

Préface de Jean-Pierre Petit	1
1 Introduction	11
1.1 Contexte & Objectifs	11
1.2 Brève Introduction au Modèle	12
2 Fondements Théoriques	13
2.1 La Loi de Gravitation de Newton	13
2.2 Introduction à la Relativité Restreinte	14
2.2.1 L'Espace-Temps de Minkowski & le Temps Propre	14
2.2.2 La Vitesse de la Lumière comme Limite	15
2.2.3 Concepts Fondamentaux	16
2.2.4 L'Équivalence Masse - Énergie	16
2.3 Introduction à la Relativité Générale	17
2.3.1 Une Révolution dans la Physique	17
2.3.2 Effets Observables & Confirmations Expérimentales	18
2.3.3 Géométrie de l'Espace-Temps & Équation des Géodésiques	19
2.3.4 Définition des Tenseurs	23
2.3.5 Tenseurs Métriques	29
2.3.6 Symboles de Christoffel	31
2.3.7 Application de l'Équation des Géodésiques dans la Limite des Champs Faibles	37
2.3.8 Les Solutions de Karl Schwarzschild & Ludwig Flamm	41
2.3.9 Construction des Géodésiques pour la Métrique Extérieure de Schwarzschild	43
2.3.10 La Solution de Roy Kerr	49
2.4 Les Travaux d'Andrei Sakharov & Jean-Marie Souriau	50
2.5 Approche Bimétrique Introduite par la Géométrie Riemannienne Hy- perbolique	51
3 Le Modèle Cosmologique Janus de Jean-Pierre Petit	54
3.1 Description	54
3.2 Un Nouvel Éclairage	57
3.3 Le Répulseur du Dipôle	65
3.3.1 Introduction	65
3.3.2 Quelques Tentatives d'Interprétation	65
3.3.3 Interprétation par les Lacunes de la Matière Noire	66

3.3.4	Interprétation par le Modèle Cosmologique Janus	67
3.3.5	Perspective d'Avenir	88
3.3.6	Réponse aux critiques publiées par le Professeur Thibault Dammour sur le site de l'IHES	90
3.3.7	Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles	106
3.3.8	Compatibilité des Équations de Champ au voisinage du Répulseur du Dipôle	122
4	Modélisation de la Dynamique Galactique	132
4.1	L'Équation de Vlasov et ses Composants	133
4.2	Le Système Vlasov-Poisson	136
4.3	Modélisation d'une Galaxie à Distribution de Vitesse Ellipsoïdale	139
4.3.1	Tentatives de Développement de Solutions à l'Équation de Vlasov	144
4.3.2	Comparaison avec les Données Observationnelles	158
4.3.3	Modélisation Des Effets De L'Environnement De Masse Négative Sur La Distribution De Vitesse	159
4.3.4	Conclusion	163
4.4	Simulations de Galaxies Spirales Stables	164
4.4.1	Modèle Théorique	164
4.4.2	Résultats des Simulations	166
4.4.3	Courbes de Rotation	167
4.4.4	Conclusion	168
5	Contribution à la Cosmologie & à la Physique des Particules	172
5.1	Introduction aux Groupes Dynamiques	172
5.2	Diverses Symétries Associées à Chaque Opérateur d'Inversion	175
5.3	Groupe Dynamique de Lorentz	176
5.4	Groupe Dynamique de Poincaré Restreint	177
5.5	Groupes Dynamiques de Kaluza & Janus Restreints	177
5.6	Groupe Dynamique Janus	178
5.7	Implications	181
5.8	Annexe	183
6	Modèle Bimétrique du Trou de Ver	199
6.1	Solutions de l'Équation d'Einstein Reflétant Différentes Topologies	199
6.2	Distinction entre l'Extension de Kruskal-Szekeres et le Pont d'Einstein-Rosen	203
6.3	Construction du Pont Modifié et ses Symétries	205
6.3.1	<i>Symétrie PT</i>	205
6.3.2	Changement d'Orientation	206
6.3.3	Identification des Deux Feuilletés	208
6.4	Interprétation de la <i>symétrie PT</i>	209
6.5	Une Autre Représentation de cette Géométrie	210
6.6	Modèle Bimétrique du Pont Modifié	211
6.7	Conclusion	212

6.8	Applications Civiles	213
6.9	Annexe A	215
6.10	Annexe B : Forme Polynomiale des Équations de Champ d'Einstein	216
7	Nature Topologique du Modèle	218
7.1	Définition	218
7.2	Modèle du Trou de Ver	219
7.3	Modèle de l'Univers	220
8	Interprétation Alternative des Objets Subcritiques Supermassifs M87* & Sagittarius A*	226
8.1	Introduction	226
8.2	Interprétation Alternative du Phénomène	230
8.2.1	Comparaison des Criticités Physique & Géométrique	231
8.2.2	Redshift Gravitationnel Proche de la Criticité Physique	232
8.2.3	Variation de la Vitesse de la Lumière & de la Pression dans les Plasmas à Densité Constante	234
8.3	Conclusion	236
9	Défis & Débats	237
9.1	Défis Rencontrés dans la Communication & l'Acceptation du Modèle	237
9.2	Discussion sur les Critiques & les Réponses Apportées	239
10	Conclusion & Discussions	243
	Bibliographie	245



Hicham ZEJLI - Né le 22 Septembre 1979 - Nationalité Française
Ingénieur diplômé de l'ENSISA - zejli.hicham@gmail.com

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte & Objectifs

Dans le paysage actuel de la cosmologie et de la physique théorique, explorer de nouveaux modèles pour expliquer les phénomènes observés dans notre univers demeure un domaine de recherche vivant et controversé. Ce livre propose d'explorer et de présenter un modèle cosmologique innovant et révolutionnaire, le Modèle Cosmologique Janus de Jean-Pierre Petit (JCM).

En tant qu'ingénieur avec une formation avancée en mathématiques et en physique, j'ai identifié dans l'étude du Modèle Cosmologique Janus une approche novatrice et intellectuellement enrichissante pour explorer et interpréter certains des phénomènes les plus énigmatiques de l'univers. Cette approche ouvre également la voie au développement de multiples applications pratiques à des échelles locales, s'appuyant sur les principes fondamentaux issus de ce modèle.

Ce livre vise à fournir une explication détaillée du Modèle Cosmologique Janus de Jean-Pierre Petit, de ses fondements et de ses implications à travers certaines études, accessible aux scientifiques avec un parcours similaire au mien, c'est-à-dire un niveau avancé en mathématiques et en physique théorique.

1.2 Brève Introduction au Modèle

Le Modèle Cosmologique Janus se démarque dans le paysage de la physique théorique par sa proposition audacieuse : décrire l'univers comme une variété riemannienne à deux métriques. Cette construction est basée sur la théorie de la relativité générale d'Einstein et intègre des éléments de la physique des particules et de la géométrie symplectique. Le modèle prend ses racines dans les travaux d'Andrei Sakharov et de Jean-Marie Souriau, établissant un lien entre l'inversion du temps, l'inversion de l'énergie, et par conséquent, l'inversion de la masse.

L'une des contributions majeures du modèle de Jean-Pierre Petit est sa capacité à aborder le problème de l'asymétrie baryonique de l'univers. Cette question, au cœur des débats actuels en cosmologie, concerne la prédominance observée de la matière sur l'antimatière, défiant les prédictions du modèle du Big Bang. Le Modèle Cosmologique Janus offre une nouvelle perspective sur ce problème en postulant l'existence d'un univers bimétrique issu de la même singularité, dominé par la matière et l'antimatière.

L'originalité du modèle réside également dans son approche bimétrique de l'univers, où deux « couches » de l'espace-temps interagissent par effet gravitationnel, offrant des explications alternatives à des phénomènes tels que l'énergie noire, la matière noire, et potentiellement ouvrant de nouvelles compréhensions du voyage interstellaire.

En résumé, ce livre vise à présenter ce modèle comme une approche innovante, remettant en question les perspectives actuelles en cosmologie et en physique théorique, et invitant à une réflexion approfondie sur les possibilités inexplorées de notre compréhension de l'univers.

Chapitre 2

Fondements Théoriques

2.1 La Loi de Gravitation de Newton

La loi de Newton, formulée dans l'espace euclidien, stipule que lorsqu'une masse m est soumise à l'influence de la force gravitationnelle G générée par une autre masse M , cette force F est inversement proportionnelle au carré de la distance d qui sépare les deux masses. Elle peut être exprimée par l'équation suivante :

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2} \quad (2.1.1)$$

Plus les masses sont grandes, plus la force est importante, mais cette force diminue rapidement à mesure que la distance augmente en raison du terme d^2 dans le dénominateur. Cette loi est essentielle pour comprendre la gravité et les mouvements des objets célestes.

En physique, cette loi de gravitation a été fondamentale dans la compréhension des interactions gravitationnelles entre les corps célestes, de la Terre aux planètes et aux étoiles. Elle demeure une loi fondatrice de la mécanique classique et a joué un rôle important dans le développement de l'astronomie et de l'astrophysique. Elle a aussi été confirmée par de nombreuses observations et expériences au fil des siècles, renforçant ainsi sa validité dans la compréhension de l'univers.

Cependant, bien que la loi de gravitation de Newton se soit révélée extrêmement puissante et précise dans de nombreux scénarios, elle a commencé à montrer ses limites lorsqu'appliquée à des situations impliquant des vitesses approchantes celle de la lumière ou des phénomènes à l'échelle astronomique. Ce fut le point de départ de l'émergence de la Théorie de la Relativité Restreinte d'Albert Einstein, marquant un changement de paradigme dans notre compréhension des concepts fondamentaux de l'espace, du temps et de la gravitation. Dans la section suivante, nous plongerons minutieusement dans les principes fondamentaux de la Relativité Restreinte, qui poseront les bases de notre exploration ultérieure de la Relativité Générale. Ceci nous conduira vers une compréhension plus profonde des complexités du cosmos.

2.2 Introduction à la Relativité Restreinte

Au début du 20^{ème} siècle, la physique a connu une révolution conceptuelle, remettant en question les fondements établis par Sir Isaac Newton au 17^{ème} siècle. Avec des observations et expériences de plus en plus précises, des anomalies sont apparues lors de l'étude de vitesses proches de celle de la lumière et dans des environnements cosmiques extrêmes. Dans ce contexte, la Relativité Restreinte d'Albert Einstein a fait son entrée, bouleversant notre compréhension traditionnelle de l'espace, du temps et de la gravité.

2.2.1 L'Espace-Temps de Minkowski & le Temps Propre

La Relativité Restreinte nous invite à abandonner l'idée que l'univers se déroule dans un espace euclidien tridimensionnel où le temps est une entité séparée. À la place, elle propose un modèle dans lequel nous résidons dans une hypersurface à quatre dimensions, où les trois dimensions de l'espace sont perpendiculaires à une dimension temporelle. Cette fusion de l'espace et du temps forme ce qu'on appelle l'espace-temps de Minkowski, avec une signature métrique $(-+++)$ ¹.

Pour mieux saisir ce concept, imaginez un point M se déplaçant dans cet espace-temps décrit par deux coordonnées : le temps (t) et la position spatiale (x). Au fur et à mesure que ce point évolue, un point voisin M' correspond à des valeurs légèrement modifiées : $(t + dt, x + dx)$, où dt et dx représentent de petits incréments de temps et d'espace. Si nous considérons que cet incrément se produit le long d'une trajectoire décrite par $x = ct$ (où c est la vitesse de la lumière), alors $dx = cdt$.

À ce stade, nous introduisons le concept de *temps propre*. La quantité s , connue sous le nom de temps propre, est une mesure du temps qui régit la vie d'un objet se déplaçant à une vitesse v . Pour calculer s , nous utilisons l'équation suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \tag{2.2.1}$$

Cette équation montre comment le temps propre (s) est lié aux changements de temps (dt) et d'espace (dx) lorsqu'un objet se déplace à une vitesse v (ici égale à c)². Elle révèle également que le temps propre peut varier en fonction de la vitesse et de la trajectoire de l'objet, conduisant à des phénomènes tels que la dilatation du temps.

Dans la théorie de la relativité restreinte d'Einstein, le temps n'est pas absolu mais dépend de la vitesse relative de l'observateur. Le développement mathématique suivant décrit la relation entre le temps propre τ , qui est le temps mesuré par l'hor-

1. La signature métrique est une caractéristique importante de l'espace-temps qui indique comment les intervalles de temps et d'espace sont combinés dans les équations de la relativité restreinte. Dans cette signature $(-+++)$, le premier terme correspond à l'intervalle de temps, qui est soustrait des trois termes suivants correspondant aux intervalles d'espace. Cela signifie que le temps a un signe négatif dans la métrique, tandis que les trois dimensions spatiales ont des signes positifs. Cette signature spécifique est primordiale pour comprendre comment les distances et les intervalles de temps sont mesurés dans le cadre de la relativité restreinte.

2. Ainsi, $v = \frac{dx}{dt}$.

loge en mouvement (à bord d'un vaisseau spatial), et la coordonnée de temps t , qui est le temps mesuré par l'horloge restée au sol (au repos par rapport à l'observateur) :

$$\begin{aligned} s = c\tau \Rightarrow ds = cd\tau & \Rightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \\ \Rightarrow d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 & \Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Nous pouvons ainsi en déduire le temps propre par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} & \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \Rightarrow \tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \text{Cste} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Déterminons la valeur de la constante d'intégration en se fondant sur les principes de la relativité restreinte. Considérons que si la vitesse v est nulle, il n'y a pas de différence relative de vitesse entre deux horloges³. Par conséquent, elles devraient mesurer le même temps propre τ que la coordonnée de temps t . Ainsi, en se basant sur l'équation 2.2.3, si $v = 0$, alors nous obtenons $\tau = t + \text{Cste}$. Si les deux horloges sont synchronisées au départ, alors τ et t doivent être égaux au moment initial, ce qui implique que la constante doit être nulle. Or la constante d'intégration ne dépend pas de la vitesse v puisqu'elle reste constante pour toutes les valeurs de v , elle doit donc rester nulle dans tous les cas. Ainsi, la relation entre le temps propre τ et la coordonnée de temps t est simplement donnée par :

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.2.4)$$

Cela implique que dans un scénario où t représente le temps mesuré par un observateur stationnaire équipé d'une horloge au sol, et v est la vitesse d'un objet équipé d'une horloge embarquée se déplaçant à cette vitesse par rapport à cette immobilité supposée, le temps propre τ qui s'écoulera dans cet objet sera affecté par la dilatation du temps décrite par $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ connue sous le nom de "*facteur de Lorentz*".

2.2.2 La Vitesse de la Lumière comme Limite

Il est important de noter que dans cet espace-temps, la vitesse de la lumière est contrainte par les propriétés de l'espace-temps (et de son contenu) dans lequel elle se propage.

En partant de l'hypothèse que la variation du temps propre est toujours supérieure ou égale à 0⁴, il s'ensuit que la vitesse de la lumière dans le vide est la limite de vitesse ultime pour les objets en mouvement ayant une masse au repos strictement positive, puisque $v < c$. Les photons, en revanche, suivent des trajectoires pour lesquelles $v = c$, menant à des propriétés uniques associées à la lumière. La

3. L'une en mouvement et l'autre au repos.

4. $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \geq 0$

Relativité Restreinte est une théorie confinée à l'étude des cadres de référence inertiels, spécifiquement ceux en mouvement rectiligne uniforme (dans des espaces sans courbure, se déplaçant en ligne droite à une vitesse constante).

2.2.3 Concepts Fondamentaux

La relativité restreinte repose principalement sur trois concepts :

- **Postulat de l'Invariance de la Vitesse de la Lumière** : Ce postulat affirme que la vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle, et elle reste la même pour tous les observateurs, quel que soit leur mouvement relatif. En d'autres termes, la vitesse de la lumière ne peut être ni ajoutée ni soustraite de la vitesse d'un observateur. Cette idée fondamentale a été confirmée par la célèbre expérience de Michelson-Morley ([59]).
- **Principe Cosmologique** : Le principe cosmologique postule que l'univers est homogène et isotrope. Cela signifie que ses propriétés sont uniformes et identiques dans toutes les directions et à toutes les échelles. Ce principe nous permet d'étendre l'application des lois de la relativité restreinte à l'échelle cosmique, en considérant l'univers dans son ensemble.
- **Principe de la Relativité Restreinte** : Le principe de la relativité restreinte affirme que les lois de la physique sont cohérentes dans tous les cadres de référence inertiels. Les cadres inertiels sont ceux qui se déplacent à une vitesse constante les uns par rapport aux autres. Ce principe généralise le concept de relativité de Galilée et remet en question la notion de cadre de référence absolu. Il démontre que les lois de la physique restent cohérentes et invariantes, quelles que soient les vitesses relatives des observateurs.

2.2.4 L'Équivalence Masse - Énergie

L'une des équations les plus emblématiques du domaine de la physique est l'équation d'équivalence masse-énergie d'Albert Einstein. Cette équation signifie une connexion profonde entre la masse (m) et l'énergie (E), révélant qu'elles sont interchangeables dans l'univers.

L'intuition révolutionnaire d'Albert Einstein, qui a conduit à la formulation de cette équivalence, est issue de sa théorie de la relativité restreinte. Dans cette théorie, Einstein a postulé que l'énergie et la masse sont intrinsèquement liées, et l'équation sert de pierre angulaire à cette union.

Le concept central de l'équation est simple : il stipule que l'énergie (E) d'un objet est directement proportionnelle à sa masse (m), avec la vitesse de la lumière dans le vide (c) comme constante de proportionnalité. Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit :

$$E = mc^2 \tag{2.2.5}$$

Explorons cette équation plus en détail à travers un exemple simple. Supposons que nous ayons un petit objet d'une masse de 1 gramme (0,001 kilogrammes). En

appliquant l'équation d'Einstein, nous pouvons calculer l'équivalent énergétique de cette masse :

$$E = (0,001 \text{ kg}) \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \times 10^{13} \text{ J} \quad (2.2.6)$$

Cette quantité d'énergie étonnamment grande souligne l'impact profond de l'Équation 2.2.5. Elle démontre qu'une petite masse peut produire une énorme quantité d'énergie lorsqu'elle est convertie à l'aide de cette équation. Cette équation joue un rôle pivot dans la compréhension des réactions nucléaires, telles que celles se produisant dans les étoiles et les centrales nucléaires, où de minuscules changements de masse entraînent des libérations d'énergie substantielles.

L'équation d'Einstein, avec sa capacité à relier la masse et l'énergie, reste une pierre angulaire de la physique moderne, influençant profondément notre compréhension du fonctionnement de l'univers.

Bien que la Relativité Restreinte nous ait permis d'explorer des aspects fascinants du cosmos en nous guidant à travers des voyages à des vitesses proches de celle de la lumière et en révélant comment l'espace-temps se courbe en réponse à notre mouvement, elle est confinée à un cadre spécifique, celui des cadres de référence inertiels et des mouvements rectilignes uniformes. Cependant, que se passe-t-il lorsque la gravité entre en jeu ? Comment la structure de l'espace-temps évolue-t-elle en présence d'objets massifs ou d'une courbure significative ? C'est là qu'intervient la Relativité Générale d'Albert Einstein dans la section suivante.

2.3 Introduction à la Relativité Générale

2.3.1 Une Révolution dans la Physique

La loi de Newton est une théorie qui fonctionne bien dans de nombreuses situations, comme expliqué à la Section 2.1, mais elle ne peut pas expliquer certains phénomènes observés à des vitesses proches de celle de la lumière ou en présence de champs gravitationnels intenses. La Relativité Générale (RG) d'Albert Einstein est une théorie plus complète qui englobe ces effets gravitationnels. Pierre angulaire de la physique moderne, la Relativité Générale a révolutionné notre compréhension de la gravité et de l'univers. Proposée par Albert Einstein en 1915, cette théorie est basée sur le principe selon lequel la gravité est une manifestation de la courbure de l'espace-temps, induite par la présence de masse et d'énergie. L'équation de champ d'Einstein, au cœur de cette théorie, décrit comment la matière et l'énergie influencent la géométrie de l'espace-temps et, à leur tour, comment cette géométrie courbée guide le mouvement de la matière et de l'énergie.

En effet, l'équation de champ d'Einstein, publiée pour la première fois le 25 novembre 1915, est l'équation différentielle partielle principale de la relativité générale⁵ :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.3.1)$$

5. Les différents termes de cette relation seront explicités par la suite.

Cette courbure de la géométrie autour d'une source de matière est alors interprétée comme le champ gravitationnel de cette source. Le mouvement des objets dans ce champ est très précisément décrit par leur équation géodésique. La métrique $g_{\mu\nu}$ produit une famille de géodésiques. Il est à noter que les particules ayant une masse gravitationnelle positive ou négative se comporteraient de la même manière en suivant les mêmes géodésiques lorsqu'elles sont déviées par le potentiel gravitationnel créé par une masse significative M , par exemple dans la gravité terrestre ou solaire. Ainsi, un objet massif, comme une étoile, influence l'espace-temps non seulement par sa masse mais aussi par l'énergie qu'il émet, comme le rayonnement. En relativité générale, l'énergie d'un objet - y compris son énergie de masse au repos représentée par mc^2 et toute forme supplémentaire d'énergie comme le rayonnement - contribue au champ gravitationnel qu'il produit. Cette contribution combinée de l'énergie et de la masse est ce qui courbe l'espace-temps autour de l'objet. Son second terme tient compte du contenu de l'univers en chaque point de l'espace-temps :

- **S'il n'est pas nul**, alors la solution géométrique qui émerge de cette équation décrira l'intérieur d'une masse.
- **S'il est nul**, la solution induite par cette équation se référera à une portion complètement vide de l'univers autour de cette masse.

2.3.2 Effets Observables & Confirmations Expérimentales

Parmi les phénomènes expliqués par la RG figure la déviation du plan de rotation de la planète Mercure lorsqu'elle est au plus proche du Soleil, connue sous le nom de précession du périhélie. Ce phénomène a été mesuré avec une précision de 45 secondes d'arc par siècle, une valeur qui ne pouvait pas être expliquée par la loi de Newton.

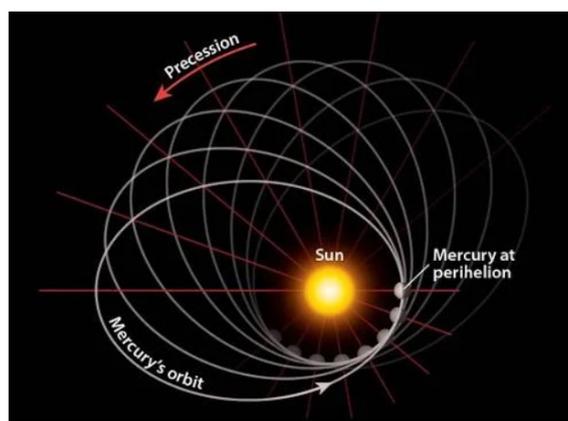


FIGURE 2.1 – Précession du périhélie de Mercure

Un autre phénomène observé est la courbure apparente de la lumière autour du Soleil. Lors de l'éclipse solaire de 1919, Sir Arthur Eddington a remarqué que les rayons lumineux semblaient se courber autour du Soleil. En réalité, ces rayons lumineux suivent les chemins les plus courts dans l'espace-temps courbé, connus

sous le nom de géodésiques. Cette courbure apparente de la lumière est due à la déformation de l'espace-temps causée par la présence de masse, un effet que la RG a expliqué avec précision ([29]).

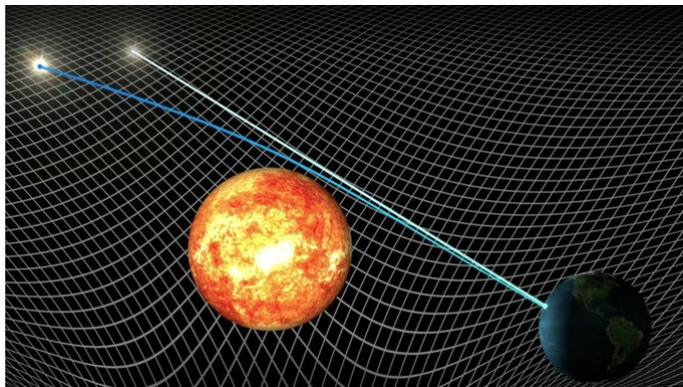


FIGURE 2.2 – Courbure de la Lumière Stellaire durant l'Éclipse Solaire

Ces phénomènes sont considérés comme non linéaires car ils ne peuvent être expliqués que par la théorie de la RG. Cependant, dans des conditions où les effets relativistes sont négligeables, la loi de Newton peut fournir des approximations valables. Ainsi, la RG a élargi notre compréhension de la gravité au-delà des limites de la loi de Newton, ouvrant la voie à une meilleure compréhension des interactions gravitationnelles à grande échelle et à des vitesses élevées.

2.3.3 Géométrie de l'Espace-Temps & Équation des Géodésiques

Rappelons le principe d'équivalence d'Einstein concernant un cadre inertiel en chute libre :

"Dans un champ gravitationnel, il est toujours possible en tout point de l'espace-temps de choisir un système de coordonnées localement inertiel tel que, dans une région suffisamment petite, les lois de la physique sont identiques à celles en l'absence de gravité."

Dans ce cadre de référence en chute libre, la force inertielle ressentie par un corps en chute libre annule la force gravitationnelle, signifiant que l'objet n'est soumis à aucune force (état d'apesanteur). Par conséquent, le cadre inertiel est le cadre fondamental pour étudier les objets en interaction (appelé cadre de la relativité restreinte) avant de les analyser dans un second cadre galiléen connu sous le nom de "*cadre de laboratoire*", où ces objets sont soumis aux effets de la gravité. Ce dernier cadre est, en fait, accéléré vers le haut ($a = -g$) par rapport au cadre inertiel naturel (imaginez que "*le sol sur Terre vous accélère vers le haut*").

Dans la théorie de la relativité restreinte, un cadre inertiel est décrit par la métrique de Minkowski, qui est une représentation mathématique de l'espace-temps

plat. Cette métrique s'applique dans les régions où les effets de la gravité sont absents. Dans un tel contexte, les trajectoires des objets sont déterminées par les équations du mouvement dérivées des principes de la relativité restreinte. Alors que le terme "*géodésique*" est utilisé en relativité générale pour l'espace-temps courbé sous l'effet de la gravité, dans la métrique de Minkowski de la relativité restreinte, ces trajectoires sont mieux décrites comme des lignes droites représentant un mouvement à vitesse constante. Dans ce cadre, les objets dans les cadres inertiels se déplacent en ligne droite à vitesse constante, un cas particulier d'une géodésique dans l'espace-temps plat.

Cadre Inertiel et Coordonnées

Tout d'abord, positionnons-nous dans ce cadre inertiel et définissons les coordonnées d'une masse ponctuelle dans ce cadre : Nous considérons les coordonnées ξ^α avec $\xi^0 = ct$, $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$ dans le cadre de notre analyse. Puisque ce corps n'est soumis à aucune force (vitesse constante), nous pouvons en déduire que :

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.3.2)$$

Avec

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.3.3)$$

Où τ correspond à la métrique ou à l'intervalle dans cet espace, que nous pourrions également noter s , et il est important de noter que cette métrique est invariante quel que soit le cadre de référence.

Transformation de Coordonnées vers un Cadre de Référence de Laboratoire Accéléré

Appliquons maintenant une transformation de coordonnées dans un nouveau cadre de référence galiléen de laboratoire "*accéléré vers le haut*" par rapport au cadre de référence inertiel précédent :

$$x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Cependant, chaque coordonnée du nouveau cadre galiléen dépend des coordonnées du cadre inertiel et vice versa :

$$x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Et il faut se rappeler que ξ dépend de τ :

$$\xi^\mu(\tau)(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Ainsi, chaque paramètre de ξ dans le nouveau cadre de référence dépend également de τ . Par conséquent, nous pouvons en déduire que :

$$\frac{d\xi^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} + \frac{dx^1}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^1} + \frac{dx^2}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^3} \quad (2.3.4)$$

Cela peut être exprimé en utilisant la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés :

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \underbrace{\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}}_{\substack{\text{convention} \\ \text{de sommation} \\ \text{d'Einstein}}} \quad (2.3.5)$$

NB : En mathématiques, la convention de sommation d'Einstein est une manière de représenter de manière compacte la sommation d'une série de termes. Lorsqu'un indice apparaît à la fois comme un indice inférieur et comme un indice supérieur dans une expression, cela implique généralement une sommation sur cet indice, signifiant que toutes les valeurs possibles de cet indice sont additionnées. Cette notation est couramment utilisée dans divers domaines des mathématiques et de la physique pour simplifier la représentation d'équations impliquant des indices répétés.

Maintenant, nous souhaitons dériver par rapport à τ l'expression 2.3.5 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (2.3.6)$$

Or $\frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2}$ donc, d'après 2.3.2, nous pouvons en déduire que :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (2.3.7)$$

Nous appliquons alors 2.3.5 pour $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ en utilisant cette fois la variable muette ν :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.3.8)$$

2.3.7 devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (2.3.9)$$

Soit :

$$\frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (2.3.10)$$

Pour réaliser la sommation sur les indices répétés comme suit :

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \quad (2.3.11)$$

Nous devons effectuer cette opération :

$$\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) = 0 \quad (2.3.12)$$

Cependant, pour $\beta \neq \mu$, les dérivées partielles d'une coordonnée par rapport à une autre coordonnée dans le même système de coordonnées sont nulles (par

exemple, $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$), et pour $\beta = \mu$, la dérivée partielle est égale à 1. Ceci correspond au symbole de Kronecker (δ_μ^β) :

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta \quad (2.3.13)$$

NB : Lorsque β et μ représentent des coordonnées différentes dans le même système de coordonnées, la dérivée partielle de β par rapport à μ est nulle, car cela signifie que ces coordonnées sont mutuellement indépendantes dans le système. Cependant, lorsque β et μ représentent la même coordonnée, la dérivée partielle est égale à 1, ce qui indique que la coordonnée change avec elle-même, comme représenté par le symbole δ_μ^β .

Ainsi, nous obtenons :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (2.3.14)$$

Cependant, si nous remplaçons μ par β ($\beta = \mu$), alors $\delta_\mu^\beta = \delta_\beta^\beta = 1$, et $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$. Ainsi, nous obtenons :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} \quad (2.3.15)$$

Par conséquent, en introduisant les *symboles de Christoffel* comme suit :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.3.16)$$

Nous pouvons déduire l'*équation des géodésiques* suivante :

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.3.17)$$

Ceci représente une expression générale pour les *symboles de Christoffel* $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ en termes des dérivées des fonctions de transformation de coordonnées. Les symboles de Christoffel, comme nous le verrons plus tard, sont utilisés dans les mathématiques de la relativité générale et de la géométrie différentielle pour décrire comment les systèmes de coordonnées changent localement.

Que nous apprend cette équation des géodésiques ?

— La seconde dérivée des coordonnées dans le référentiel Galiléen "*accélééré*" n'est plus nulle mais est égale à l'équivalent des forces inertielles appliquées en relativité générale (dans ce cas, la gravité). D'après 2.3.17, nous pouvons déduire :

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.3.18)$$

En effet, si x^μ et x^ν sont des coordonnées spatiales, alors leur dérivée par rapport à τ correspond à une "*vitesse*".

— Tout objet en mouvement dans le référentiel Galiléen "*accélééré*" de laboratoire obéira à cette équation lorsqu'il est soumis à la force de gravité terrestre.

- La forme de cette équation nous informe sur les chemins les plus courts ou les plus longs (extrema) sur une surface courbe (variété). Plus précisément, les géodésiques correspondent à des chemins stationnaires dont les propriétés physiques restent constantes dans le temps (absence de forces externes appliquées).
- Nous pouvons décrire la gravité comme un effet purement géométrique lié aux géodésiques parcourues par les objets dans l'espace-temps courbé (la façon dont l'espace-temps est courbé est décrite par les symboles de Christoffel). Une analogie serait de considérer deux objets parcourant des chemins parallèles et identiques à la même vitesse depuis un point sur Terre vers le Nord ; ils finiront par se croiser au pôle Nord en raison de la courbure de la Terre. Ce croisement peut être analysé soit par le fait qu'une force les a attirés (analogie avec la mécanique newtonienne) soit par un effet purement géométrique lié à la courbure de la Terre (analogie avec la mécanique relativiste). Selon la relativité générale, la gravité est donc une courbure de l'espace-temps qui fait que les objets en mouvement rectiligne local suivent ces géodésiques. La relativité générale nous permet de déterminer la courbure de l'espace-temps en fonction de ses composants (matière, énergie) puis de décrire les trajectoires des particules en mouvement dans cet espace-temps.
- Les symboles de Christoffel sont calculés à partir de la métrique et de ses dérivées partielles, capturant des informations sur la courbure de l'espace-temps. Ils nous permettent de calculer comment les géodésiques sont affectées par la courbure de l'espace-temps.

2.3.4 Définition des Tenseurs

Les *tenseurs* sont des objets mathématiques issus de l'algèbre multilinéaire qui ont été introduits en physique pour représenter l'état de contrainte et de déformation d'un volume soumis à des forces, d'où leur nom (tensions).

Afin d'illustrer la nature d'un *tenseur*, envisageons une fonction tensorielle T qui associe deux vecteurs⁶ \vec{u} et \vec{v} à un scalaire⁷ $T(\vec{u}, \vec{v})$ dans l'ensemble des réels \mathbb{R} . Cette fonction doit respecter les conditions de linéarité suivantes :

- La fonction produit un scalaire, c'est-à-dire $T(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}$.
- La multiplication de l'un des vecteurs par un scalaire α doit être conforme à la propriété de linéarité suivante :

$$T(\alpha\vec{u}, \vec{v}) = \alpha T(\vec{u}, \vec{v}) \tag{2.3.19}$$

- L'addition de deux vecteurs dans l'un des arguments de la fonction se distri-

6. Ce sont des tenseurs de rang 1 qu'on peut représenter comme une liste de nombres (composantes) qui changent d'une manière spécifique à chaque changement de système de coordonnées.

7. Ce sont des tenseurs de rang 0 qui sont simplement des nombres réels ou complexes et ne changent pas en fonction du système de coordonnées utilisé.

bue linéairement de la manière suivante :

$$T(\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}) = T(\vec{u}, \vec{v}) + T(\vec{w}, \vec{v}) \quad (2.3.20)$$

Un *tenseur* peut donc être défini comme une application ou une fonction dans un espace vectoriel⁸ qui associe un ensemble de vecteurs à un scalaire et doit obéir aux propriétés de linéarité suivantes :

- Lorsqu'un des vecteurs est multiplié par un scalaire, le tenseur multiplie le résultat par ce même scalaire.
- Lorsqu'une opération d'addition est appliquée à un des vecteurs, le tenseur distribue l'addition à travers le résultat de l'opération sur les deux vecteurs.

Dans ce contexte, notre tenseur est dit d'ordre 2, ce qui signifie qu'il prend en paramètres deux vecteurs, et est ainsi qualifié de *bilinéaire*. Un tenseur d'ordre 1 correspond à un vecteur. Il existe également des tenseurs qui peuvent accepter trois ou n vecteurs en tant que paramètres⁹.

Ainsi, les tenseurs permettent de généraliser les *scalaires* et les *vecteurs* :

— **Scalaires :**

Considérons 2 systèmes de coordonnées dont l'un x'^{μ} correspond à la transformation du premier x^{μ} selon la relation suivante :

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} \quad (2.3.21)$$

Le scalaire permet de passer un point d'un système de coordonnées S vers un nouveau système de coordonnées S' . En effet, si on souhaite passer un point M d'un système de coordonnées cartésiennes $S : x^{\mu}(x, y)$ vers un nouveau système de coordonnées polaires $S' : x'^{\mu}(r, \theta)$ suivant la figure 2.3.

8. Un *espace vectoriel* est une collection de vecteurs, qui sont des objets qui peuvent être additionnés ensemble et multipliés (« étirés » ou « contractés ») par des nombres, appelés scalaires dans ce contexte. Les scalaires sont souvent pris comme des nombres réels, mais il peut y avoir des cas avec des scalaires complexes ou d'autres types. Dans un espace vectoriel, chaque combinaison linéaire de vecteurs doit aussi être un vecteur dans cet espace.

9. Ces derniers sont appelés tenseurs d'ordre supérieur, allant jusqu'à l'ordre n

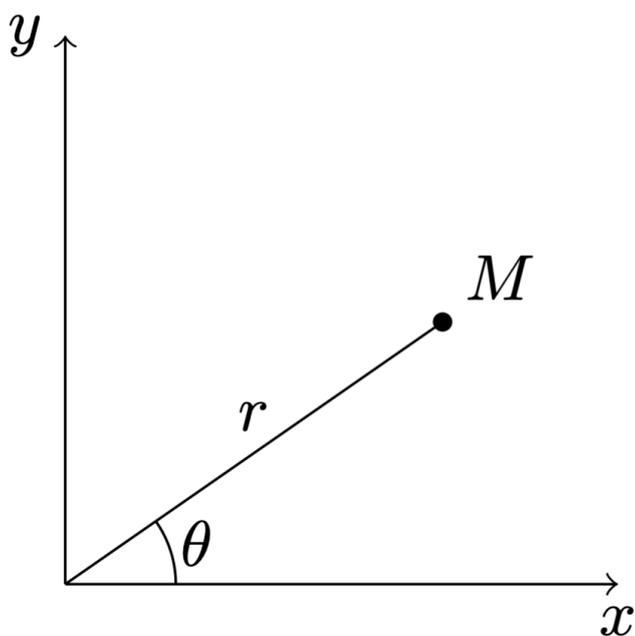


FIGURE 2.3 – Coordonnées Polaires

Il faut opérer cette transformation :

$$S'(x'^{\mu}) = S(x^{\mu}) \tag{2.3.22}$$

— **Vecteurs :**

Considérons la figure 2.4 suivante :

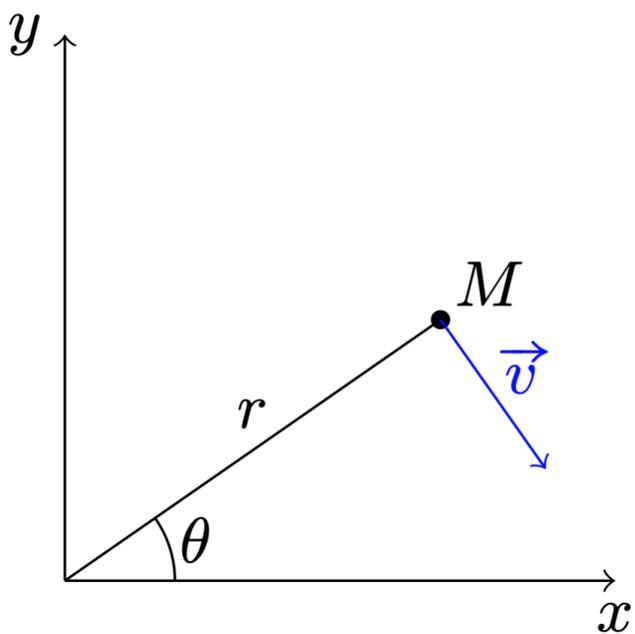


FIGURE 2.4 – Vecteur en Coordonnées Polaires

Exprimons les coordonnées du vecteur en fonction de r, θ dans le nouveau système de coordonnées ainsi qu'en fonction de nouveaux vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{v}(x, y) = v_x(x, y)\vec{u}_x + v_y(x, y)\vec{u}_y \quad (2.3.23)$$

$$\vec{v}'(r, \theta) = v_r(r, \theta)\vec{u}_r + v_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta \quad (2.3.24)$$

Ainsi, un scalaire est un simple nombre qui est associé à chaque point de l'espace, tandis qu'un vecteur est caractérisé par sa longueur, sa direction et son sens dans l'espace.

La transformation des vecteurs d'un système de coordonnées à un autre est donc une opération plus élaborée que la transformation des scalaires. Il y a principalement deux types de vecteurs, chacun avec sa propre règle de transformation :

- **Vecteurs contravariants** : ceux-ci se transforment par dérivation des coordonnées du nouveau référentiel x'^μ par rapport à celles de l'ancien x^ν . La loi de transformation est donnée par :

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \quad (2.3.25)$$

- **Vecteurs covariants** : dans ce cas, la transformation est effectuée par dérivation des coordonnées de l'ancien référentiel x^ν par rapport à celles du nouveau x'^μ . La règle de transformation est exprimée par :

$$v'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu \quad (2.3.26)$$

Ces relations illustrent comment les vecteurs contravariants et covariants se transforment sous un changement de coordonnées.

Démonstration. Considérons un vecteur de déplacement élémentaire qui relie 2 événements distincts dans l'espace-temps séparés par (dt', dx', dy', dz') qu'on peut noter collectivement sous la forme dx'^μ , alors :

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.3.27)$$

Or, la différentielle totale d'une fonction $f(x, y, z)$, qui mesure les variations de f en fonction de ses variables x, y, z , intègre également les changements de ses variables implicites selon la relation suivante¹⁰ :

10. En effet, lorsque les variables x, y, z sont elles-mêmes des fonctions d'une autre variable implicite, t , une variation de t entraîne une variation de chacune des variables x, y, z via leurs dérivées par rapport à t . En d'autres termes, la variation de t se traduit par des variations dans x, y, z qui sont quantifiées par leurs dérivées par rapport à t . Par conséquent, la différentielle totale de f en fonction de t implique l'utilisation des dérivées partielles de f par rapport à ses variables x, y, z , ainsi que les dérivées de ces variables par rapport à t , pour capturer l'effet complet des variations de t sur f

$$df(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} dt = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (2.3.28)$$

D'où le vecteur de déplacement élémentaire contravariant ¹¹ :

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \Leftrightarrow v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu}$$

□

Nous allons maintenant démontrer que la norme du vecteur \vec{v} est donnée par la relation suivante :

$$v_{\mu} v^{\mu} = \|\vec{v}\|^2 \quad (2.3.29)$$

Démonstration. Considérons un repère non orthogonal (Oxy) de la figure 2.5 dans lequel le vecteur \vec{v} a des composantes covariantes et contravariantes.

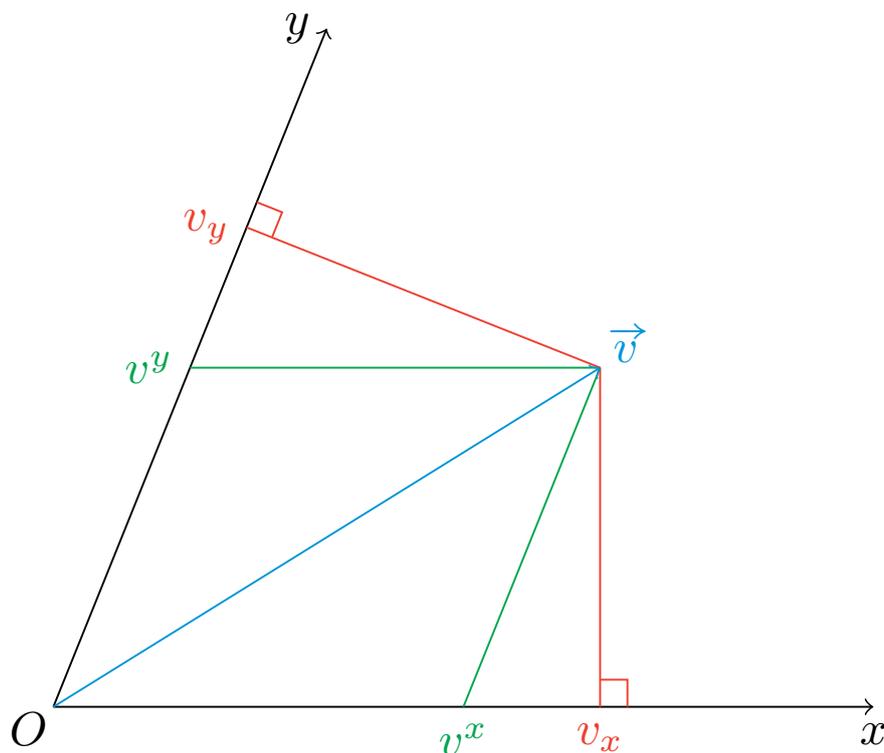


FIGURE 2.5 – $\|\vec{v}\|^2 = v_x v^x + v_y v^y$

11. Où μ peut prendre les valeurs 0,1,2,3.

Ainsi, nous obtenons :

$$v^2 = h^2 + v_y^2 \quad (2.3.30)$$

$$(v^x)^2 = h^2 + (v_y - v^y)^2 \quad (2.3.31)$$

$$(v^x)^2 = h^2 + v_y^2 + (v^y)^2 - 2v_y v^y \quad (2.3.32)$$

$$(v^x)^2 = v^2 + (v^y)^2 - 2v_y v^y \quad (2.3.33)$$

$$v^2 = (v^x)^2 - (v^y)^2 + 2v_y v^y \quad (2.3.34)$$

Or le second triangle rectangle nous permet d'obtenir la relation suivante :

$$v^2 = (v^y)^2 - (v^x)^2 + 2v_x v^x \quad (2.3.35)$$

En sommant les 2, nous pouvons donc en déduire que :

$$v^2 = v_x v^x + v_y v^y \quad (2.3.36)$$

□

Ainsi, un tenseur de rang 2 nous permet simplement de manipuler deux indices au lieu d'un :

— **Covariant** :

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad (2.3.37)$$

— **Contravariant** :

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \quad (2.3.38)$$

— **Mixte** :

$$T'_\nu{}^\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} T_\alpha{}^\beta \quad (2.3.39)$$

Nous déduisons donc qu'un tenseur de rang 2 est, par essence, une matrice ou un tableau à deux indices qui représente une quantité physique dans un espace donné.

Observons la transformation d'un tenseur de rang 2 d'un système de coordonnées vers un autre, qui utilise les dérivées partielles $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}$ et $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$ pour établir comment les coordonnées dans le nouveau système x'^μ sont reliées aux coordonnées dans l'ancien système x^α . En appliquant cette transformation au tenseur de rang 2 initial $T_{\alpha\beta}$, nous obtenons un nouveau tenseur $T'_{\mu\nu}$ de même rang dans le nouveau système de coordonnées.

A présent, pour effectuer une transformation tensorielle permettant de passer de sa forme contravariante à sa forme covariante, ou inversement (en utilisant la sommation implicite sur ν), il est nécessaire d'introduire le tenseur métrique¹², dont les relations suivantes illustrent cette transformation :

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad (2.3.40)$$

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (2.3.41)$$

12. qui sera étudié dans la section 2.3.5.

En effet, comme nous l'étudierons dans la section suivante, la définition du tenseur métrique¹³ est exprimée par la relation 2.3.54.

Essayons d'exprimer ce tenseur métrique dans un autre référentiel en considérant 2.3.13 :

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \quad (2.3.42)$$

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \quad (2.3.43)$$

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \quad (2.3.44)$$

D'où :

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\sigma\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \quad (2.3.45)$$

$$(2.3.46)$$

Ce qui démontre bien que $g'_{\mu\nu}$ est bien un tenseur puisque les égalités tensorielles (entre tenseurs de même type) sont vraies dans tous les référentiels.

Propriétés des tenseurs :

- Toute combinaison linéaire de tenseurs est un tenseur¹⁴.
- Le produit de deux tenseurs donne un tenseur de rang supérieur. Par exemple, pour un tenseur de rang 2, $T_{\mu\nu}$, où μ et ν peuvent prendre chacun 4 valeurs, le produit avec un autre tenseur de rang 2 aboutit à un tenseur de rang 4 avec $4 \times 4 = 16$ composantes, donnant un total de $16 \times 16 = 256$ composantes. Ainsi, si deux tenseurs de rang 2 sont multipliés, le tenseur résultant est de rang 4. Le nombre total de composantes du nouveau tenseur est le produit du nombre de composantes des deux tenseurs initiaux.
- La contraction de deux tenseurs donne un tenseur¹⁵ selon la relation suivante :

$$T_{\mu\alpha} V^{\alpha\nu} = W_{\mu}^{\nu} \quad (2.3.47)$$

2.3.5 Tenseurs Métriques

Nous allons maintenant nous pencher sur les tenseurs métriques et leur lien avec les symboles de Christoffel précédemment déterminés.

Considérons la métrique de Minkowski décrite à l'aide des coordonnées spatio-temporelles d'un objet en mouvement dans un référentiel inertiel, comme le montre l'équation (2.3.3), et exprimée ainsi :

$$d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 \quad (2.3.48)$$

13. qui transforme les coordonnées d'un référentiel inertiel vers un référentiel quelconque comme galiléen.

14. Si on considère deux tenseurs $A_{\mu\nu}$ et $B_{\mu\nu}$, et deux scalaires a et b , alors $C_{\mu\nu} = aA_{\mu\nu} + bB_{\mu\nu}$ est également un tenseur. Cette propriété découle de la définition des tenseurs en termes de leur comportement sous transformation des coordonnées, qui préserve les opérations linéaires.

15. par sommation implicite sur les indices correspondants α des deux tenseurs.

Elle peut également être écrite de cette manière, où on peut l'exprimer sous forme d'une sommation sur les indices α et β :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.3.49)$$

Cette équation utilise le tenseur métrique $\eta_{\alpha\beta}$ de l'espace de Minkowski (qui décrit l'espace-temps plat en relativité restreinte) pour calculer l'intervalle spatio-temporel $d\tau^2$ en termes des différentielles des coordonnées $d\xi^\alpha$ et $d\xi^\beta$. Le tenseur métrique de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ a des composantes qui sont -1 pour les intervalles de type temps et +1 pour les intervalles de type espace sur la diagonale, et 0 hors de la diagonale comme ceci :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.50)$$

Rappelons que les expressions suivantes représentent les règles de transformation différentielle entre deux systèmes de coordonnées. Elles démontrent comment un petit changement dans l'ensemble des coordonnées x^μ et x^ν entraîne un petit changement dans un autre ensemble de coordonnées ξ^α et ξ^β .

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (2.3.51)$$

$$d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.3.52)$$

Maintenant, si nous substituons ces deux formes différentielles dans l'expression 2.3.49, nous pouvons en déduire l'expression suivante :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.3.53)$$

D'où l'on peut extraire le tenseur métrique suivant :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (2.3.54)$$

Le tenseur métrique joue un rôle fondamental en relativité générale car il détermine la géométrie de l'espace-temps et comment la gravité agit entre deux objets situés aux coordonnées x^μ et x^ν dans le même cadre de référence. Il permet la transformation des coordonnées de ces objets en la distance qui les sépare, tout en tenant compte de la courbure locale de l'espace-temps, qui peut varier en fonction de la distribution de la matière et de l'énergie. Contrairement à l'intuition classique, la distance entre deux points dans l'espace-temps courbé dépend de cette courbure et peut varier considérablement. Ainsi, le tenseur métrique est un outil mathématique essentiel pour calculer l'intervalle entre deux événements, ce qui inclut également la mesure du temps écoulé entre eux en présence d'un champ gravitationnel.

Étant donné que les indices μ et ν sont muets et répétés, ils sont soumis à la convention de sommation d'Einstein et peuvent donc être interchangés dans l'expression du tenseur métrique. Cela implique que le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est symétrique¹⁶.

NB : Désormais, notons $g^{\mu\nu}$ comme l'inverse de $g_{\mu\nu}$, qui est exprimé par la relation suivante avec une sommation sur l'indice répété α , produisant le symbole de Kronecker :

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (2.3.55)$$

où δ_{ν}^{μ} est le symbole de Kronecker, qui, comme nous l'avons vu précédemment, est égal à 1 lorsque $\mu = \nu$ et 0 autrement. Cette relation définit la nature de l'inverse du tenseur métrique en géométrie différentielle et en relativité générale.

2.3.6 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel, notés $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$, sont dérivés du tenseur métrique et fournissent des informations essentielles sur la géométrie de l'espace-temps. Ils ne sont pas eux-mêmes des tenseurs mais sont dérivés du tenseur métrique, qui est un vrai tenseur.

Pour calculer les symboles de Christoffel, nous prenons les dérivées partielles des composantes du tenseur métrique, puis appliquons une combinaison spécifique de ces dérivées. La formule pour les symboles de Christoffel du second genre est donnée par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (2.3.56)$$

Chaque terme implique une dérivée partielle du tenseur métrique par rapport aux coordonnées, et $g^{\beta\alpha}$ est l'inverse du tenseur métrique, garantissant que nous sommes en train de sommer sur les indices appropriés. Comme nous le verrons plus tard, les symboles de Christoffel jouent un rôle central dans la détermination des géodésiques, qui décrivent la trajectoire des particules et de la lumière dans l'espace-temps courbé et sont utilisés dans les équations du mouvement en Relativité Générale.

Démonstration. Nous allons maintenant exprimer les symboles de Christoffel en termes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Pour ce faire, nous considérons la dérivée partielle de $g_{\mu\nu}$ par rapport aux coordonnées x^{λ} . Cette opération introduit les dérivées secondes des fonctions de transformation de coordonnées ξ^{α} , qui peuvent ensuite être intégrées dans l'expression des symboles de Christoffel 2.3.16.

Avant de commencer nos calculs, voici quelques astuces préliminaires pour les simplifier :

- Le tenseur métrique est symétrique, donc $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.
- Pour remplacer ν par α , nous devons d'abord substituer l'indice muet existant α par σ .

16. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

Nous obtenons le tenseur métrique comme suit :

$$g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \quad (2.3.57)$$

En appliquant la règle du produit pour la dérivation, et en se rappelant que $\eta_{\sigma\beta}$ est une constante, nous obtenons :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.3.58)$$

Nous voyons apparaître les dérivées partielles secondes attendues dans le second membre de l'équation (deux fois) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \quad (2.3.59)$$

Pour intégrer l'expression des symboles de Christoffel 2.3.16 dans cette relation, nous devons appliquer la transformation suivante aux deux membres pour isoler la dérivée partielle et introduire une somme sur l'indice répété β :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \quad (2.3.60)$$

Or, nous savons que :

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma \quad (2.3.61)$$

et selon 2.3.55, ce symbole de Kronecker est égal à 1 lorsque $\sigma = \lambda$, donc :

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.3.62)$$

Nous pouvons alors le remplacer dans l'expression 2.3.59, en veillant à reformuler les indices correspondants dans la nouvelle expression de manière analogue :

$$\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \quad (2.3.63)$$

$$\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \quad (2.3.64)$$

NB : Nous ne plaçons pas β sur le symbole de Christoffel car c'est un indice de sommation muet dans le terme où nous voulons l'attribuer, donc nous choisirons une autre lettre, ρ :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \quad (2.3.65)$$

Finalement, nous pouvons déduire de 2.3.59 :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \quad (2.3.66)$$

Ainsi, la différentiation du tenseur métrique peut s'exprimer de 3 manières différentes (les 2 dernières impliquant de nouveaux indices en échangeant ν et μ et en remplaçant μ par α) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho}\Gamma_{\nu\alpha}^\rho \quad (2.3.67)$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\alpha}^\rho \quad (2.3.68)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^\rho + g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\alpha}^\rho \quad (2.3.69)$$

Ces trois manières d'exprimer cette différentiation nous permettent d'obtenir un résultat simplifié en ajoutant les deux premières et en soustrayant la dernière : 2.3.67 + 2.3.68 - 2.3.69 :

$$g_{\alpha\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.3.70)$$

$$g^{\beta\alpha} g_{\alpha\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha} \quad (2.3.71)$$

$$\delta_\rho^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha} \quad (2.3.72)$$

Soit, finalement :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.3.73)$$

Cette expression du symbole de Christoffel¹⁷ nous permet d'établir un lien entre la courbure de l'espace-temps induite par la force gravitationnelle et les dérivées spatiales du tenseur métrique. Elle est essentielle pour formuler les équations régissant les géodésiques dans la théorie de la Relativité Générale. \square

Exemple de Calcul des Symboles de Christoffel pour une Métrique Sphérique :

Dans les coordonnées sphériques, l'élément de ligne ds^2 pour un espace tridimensionnel est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ ds^2 &= g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1 dx^2 + 2g_{13}dx^1 dx^3 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2 dx^3 + g_{33}(dx^3)^2 \\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.3.74)$$

où dr , $d\theta$ et $d\phi$ sont les différentielles de la coordonnée radiale r , de l'angle polaire θ et de l'angle azimutal ϕ , respectivement. Le tenseur métrique correspondant $g_{\mu\nu}$ en coordonnées sphériques est diagonal et est donné par :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.3.75)$$

17. Également connue sous le nom de connexion affine.

Démonstration. La relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques peut être déduite de la Figure 2.6 :

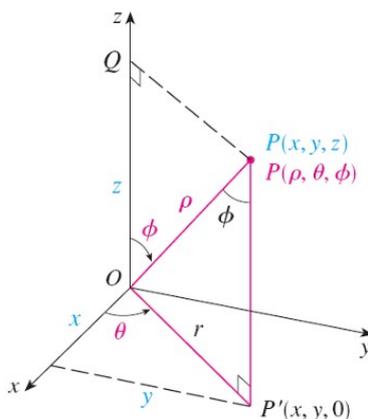


FIGURE 2.6 – La position du point P est définie par la distance ρ et les angles θ (colatitude) et ϕ (longitude)

Si nous considérons les triangles OPQ et OPP' , nous avons : $z = \rho \cos \phi$, $r = \rho \sin \phi$, où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned} \tag{2.3.76}$$

En utilisant les notations physiques selon la Figure 2.9, la transition vers les coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \tag{2.3.77}$$

Cependant, la métrique en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.3.78}$$

Pour exprimer ceci en coordonnées sphériques, nous remplaçons x , y et z par leurs équivalents en coordonnées sphériques, donnant 2.3.74. \square

Pour calculer les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$, nous trouvons d'abord l'inverse du tenseur métrique, qui pour une métrique diagonale est simplement :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix} \tag{2.3.79}$$

Pour le tenseur métrique donné, nous calculons les dérivées partielles requises pour les symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} &= 2r, \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} &= 2r \sin^2(\theta), \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} &= 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta).\end{aligned}$$

En insérant ces dérivées partielles dans la formule de calcul des symboles de Christoffel 2.3.73, nous les obtenons en sommant sur l'indice répété α . Pour le tenseur métrique donné, la plupart des symboles de Christoffel seront nuls car il est diagonal et ne dépend que de r et θ . Les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r \quad (2.3.80)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2(\theta) \quad (2.3.81)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad (2.3.82)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin(\theta) \cos(\theta) \quad (2.3.83)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \quad (2.3.84)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot(\theta) \quad (2.3.85)$$

NB :

— Le symbole de Christoffel $\Gamma_{\theta\theta}^r$ est calculé comme suit :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} \right)$$

puisque la seule dérivée non nulle de $g_{\theta\theta}$ est par rapport à r . En substituant les valeurs, nous obtenons :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial(r^2)}{\partial r} \right) = -r.$$

— Un autre exemple est le symbole de Christoffel $\Gamma_{r\theta}^\theta$, qui est calculé comme suit :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} \right)$$

où le seul terme non nul est $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}$. Cela nous donne :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \right) (2r) = \frac{1}{r}.$$

Calcul du Tenseur de Riemann, du Tenseur de Ricci et du Scalaire de Ricci

Dans cet espace sphérique, tous les composantes du tenseur de Riemann et du tenseur de Ricci, ainsi que le scalaire de Ricci, sont nuls, illustrant la géométrie d'un espace plat.

Démonstration. Le tenseur de courbure de Riemann est défini par l'expression :

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (2.3.86)$$

Prenons par exemple les symboles de Christoffel fournis par 2.3.80 :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (2.3.87)$$

Nous pouvons procéder au calcul des composantes du tenseur de Riemann. Par exemple, nous pouvons calculer $R_{r\theta r}^{\theta}$:

$$R_{r\theta r}^{\theta} = \partial_{\theta}\Gamma_{rr}^{\theta} - \partial_r\Gamma_{\theta r}^{\theta} + \Gamma_{\theta\lambda}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\lambda} - \Gamma_{r\lambda}^{\theta}\Gamma_{\theta r}^{\lambda} \quad (2.3.88)$$

Ainsi, pour le calcul du composant du tenseur de Riemann $R_{r\theta r}^{\theta}$, nous avons :

- Le premier terme $\partial_{\theta}\Gamma_{rr}^{\theta}$ est nul car Γ_{rr}^{θ} est nul.
- Le deuxième terme $\partial_r\Gamma_{\theta r}^{\theta}$ implique la dérivée partielle de $\Gamma_{\theta r}^{\theta}$ par rapport à r , qui est $-\frac{1}{r^2}$.
- Le troisième terme est la somme sur λ de $\Gamma_{\theta\lambda}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\lambda}$, mais comme Γ_{rr}^{λ} est nul pour $\lambda \neq r$, ce terme est nul.
- Le quatrième terme est la somme sur λ de $\Gamma_{r\lambda}^{\theta}\Gamma_{\theta r}^{\lambda}$, qui pour $\lambda = \theta$ donne $\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$.

La somme des deux termes non nuls (termes 2 et 4) est :

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

Ainsi, le composant $R_{r\theta r}^{\theta}$ du tenseur de Riemann est nul.

Le tenseur de Ricci, obtenu en contractant le tenseur de Riemann sur son premier et troisième indice, est donné par :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \quad (2.3.89)$$

Enfin, le scalaire de Ricci, qui est la trace du tenseur de Ricci, est calculé comme suit :

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.3.90)$$

Comme le tenseur de Riemann est nul, il s'ensuit que le tenseur de Ricci et son scalaire sont également nuls.

□

Code de calcul Mathematica :

```
(*Importation du package*)
(*-----*)
Needs["OGRe' "]
(*Definition des coordonnees*)
TNewCoordinates["Spherical", {r, \[Theta], \[Phi]}]
```

```
(*Definition du Tenseur Metrique*)TShow@
TNewMetric["SphericalMetricTensor", "Spherical",
  DiagonalMatrix[{1, r^2, r^2 Sin[Theta]^2}]]
(*Element de ligne*)
TLineElement["SphericalMetricTensor"]
(*Calcul des symboles de Christoffel*)
TList@TCalcChristoffel["SphericalMetricTensor"]
(*Calcul du Tenseur de Riemann*)
TList@TCalcRiemannTensor["SphericalMetricTensor"]
(*Calcul du Tenseur de Ricci*)
TList@TCalcRicciTensor["SphericalMetricTensor"]
(*Calcul du Scalaire de Ricci*)
TList@TCalcRicciScalar["SphericalMetricTensor"]
```

2.3.7 Application de l'Équation des Géodésiques dans la Limite des Champs Faibles

Nous notons l'expression du symbole de Christoffel et de l'équation des géodésiques comme suit :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.3.91)$$

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \quad (2.3.92)$$

où

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\sigma,\nu} \quad (2.3.93)$$

NB :

- Cette équation représente la dérivée partielle du composant du tenseur métrique $g_{\mu\sigma}$ par rapport à la coordonnée x^{ν} , et elle est souvent écrite avec une virgule suivie de l'indice de différentiation, qui dans ce cas est ν . La notation à virgule $g_{\mu\sigma,\nu}$ est un raccourci courant en relativité générale pour désigner les dérivées partielles des composantes du tenseur.
- Dans le contexte de la relativité restreinte, il est courant d'utiliser un système d'unités où la vitesse de la lumière c est définie comme égale à 1 ($c = 1$). Cela simplifie les équations et permet d'exprimer plus facilement certaines quantités. Dans ce système d'unités, les distances sont exprimées en unités de temps (par exemple, années-lumière au lieu de mètres) en raison de l'équivalence $c = 1$. Pour cela, le temps doit être exprimé en secondes, et les unités de longueur deviennent une distance parcourue par la lumière en une seconde, ce qui est exprimé en secondes-lumière (équivalent à "*années-lumière*"). Nous pouvons ainsi exprimer la métrique comme suit :

$$ds^2 = d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \quad (2.3.94)$$

Néanmoins, nous considérerons maintenant que le temps t , exprimé jusqu'à présent, sera le temps propre τ dans l'expression de la métrique, afin de

l'exprimer comme suit :

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.3.95)$$

Nous allons maintenant démontrer que l'équation 2.3.92 se réduit à l'équation newtonienne du mouvement lorsque les champs gravitationnels sont faibles et statiques¹⁸, et lorsque les vitesses sont beaucoup plus petites que la vitesse de la lumière¹⁹, ce qui peut être exprimé comme suit :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu} \quad (2.3.96)$$

NB : Dans la théorie de la gravité linéarisée, nous partons du principe que l'espace-temps est presque plat. Pour cela, nous représentons le tenseur métrique total $g_{\mu\nu}$ comme la somme de la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, qui décrit l'espace-temps plat comme vu précédemment, et une petite "*perturbation*" $h_{\mu\nu}$, qui représente les écarts à cette platitude dus à la présence de masse ou d'énergie. Nous verrons cela plus tard dans l'étude du répulseur dipolaire pour un système stationnaire (Section 3.3).

En intégrant ce tenseur métrique dans l'expression 2.3.91, nous réalisons que les dérivées partielles du tenseur métrique dépendent uniquement de $h_{\mu\nu}$, puisque $\eta_{\mu\nu}$ est constant et ses dérivées sont nulles. Ainsi, dans la théorie linéarisée de la gravité, les symboles de Christoffel peuvent être approximés en considérant uniquement les contributions de la perturbation $h_{\mu\nu}$. Cela est dû au fait que les symboles de Christoffel sont définis par les premières dérivées du tenseur métrique, et dans un champ gravitationnel faible, $h_{\mu\nu}$ est petit par rapport à $\eta_{\mu\nu}$. Ainsi, lorsque nous calculons les symboles de Christoffel pour un champ gravitationnel faible, nous négligeons les dérivées de $\eta_{\mu\nu}$ et ne prenons en compte que les dérivées de $h_{\mu\nu}$. Nous obtenons donc :

$$g_{\mu\sigma,\nu} = h_{\mu\sigma,\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu,\sigma} = h_{\mu\nu,\sigma} \quad \text{et} \quad g_{\nu\sigma,\mu} = h_{\nu\sigma,\mu} \quad (2.3.97)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma})(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.3.98)$$

Étant donné que $h_{\mu\nu}$ est petit, nous réalisons que le produit de $h^{\lambda\sigma}$ avec ses dérivées partielles contribuera à des termes d'ordre deux ou supérieur (par exemple, h^2 , h^3 , etc.). Ces termes d'ordre supérieur seront significativement plus petits par rapport aux termes d'ordre un que nous recherchons. Par conséquent, lors du calcul des symboles de Christoffel, nous négligeons les produits de $h_{\mu\nu}$ et de ses dérivées, ce qui implique que les contributions de $h^{\lambda\sigma}$ sont négligeables par rapport à celles de $\eta^{\lambda\sigma}$. Nous obtenons ainsi :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.3.99)$$

Cette approximation simplifie le processus de calcul de la courbure de l'espace-temps dans les champs gravitationnels faibles et est fondamentale dans l'analyse des

18. En relativité restreinte, où $g_{\mu\nu}$ est très proche de $\eta_{\mu\nu}$ et indépendant du temps.

19. $v/c \ll 1$

ondes gravitationnelles, où les perturbations $h_{\mu\nu}$ représentent des ondulations dans la courbure de l'espace-temps.

Considérons maintenant 2 cas :

- Pour $\lambda = 0$, qui correspond à la coordonnée temporelle en relativité générale, l'équation des symboles de Christoffel du premier genre devient spécifique à la coordonnée temporelle. En utilisant le tenseur métrique de Minkowski η et la perturbation h , le symbole de Christoffel pour $\lambda = 0$ est donné par l'équation :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}\eta^{0\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.3.100)$$

Étant donné que $\eta^{0\sigma}$ n'est pas nul seulement lorsque $\sigma = 0$, ce qui conduit à $\eta^{00} = 1$, nous obtenons la relation suivante :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} (h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu} - h_{\mu\nu,0}) \quad (2.3.101)$$

Cependant, étant donné que le champ gravitationnel est statique²⁰, la dérivée partielle du tenseur métrique par rapport au temps ($\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$) est nulle. Cela nous permet de considérer le système comme étant dans un régime stationnaire par rapport à la métrique de l'espace-temps :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} (h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu}) \quad (2.3.102)$$

- Pour les coordonnées spatiales désignées par $\lambda = i$ (où i, j, k représentent des indices spatiaux), les symboles de Christoffel peuvent être calculés en utilisant la métrique de perturbation $h_{\mu\nu}$. Le tenseur métrique de Minkowski $\eta^{i\sigma}$ est utilisé pour élever l'indice, et il est égal à -1 lorsque les indices correspondent. Ainsi, les symboles de Christoffel pour les coordonnées spatiales sont donnés par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.3.103)$$

Cependant, compte tenu du signe négatif des composants spatiaux de $\eta^{i\sigma}$, l'équation pour $\sigma = i$ se simplifie à :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = -\frac{1}{2} (h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i}) \quad (2.3.104)$$

Ce signe négatif reflète la convention de signe opposée pour les composants spatiaux du tenseur métrique de Minkowski par rapport au composant temporel.

Intégrons maintenant ces résultats dans l'équation des géodésiques 2.3.92 pour chaque cas :

- Pour $\lambda = 0$, nous savons que $x^\lambda = x^0 = ct$, alors :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (2.3.105)$$

20. La métrique de l'espace-temps ne varie pas avec le temps.

Cependant, le produit suivant générera une somme sur les indices répétés μ et ν de quantités d'ordres 0, 1 et 2 :

$$(h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (2.3.106)$$

Considérant que les quantités d'ordre supérieur, en particulier d'ordre 1 et 2, sont hautement négligeables, surtout qu'elles sont basées sur la quantité déjà petite $h_{\mu\nu}$ qui est beaucoup plus petit que $\eta_{\mu\nu}$, nous ne retiendrons que les termes d'ordre zéro. Dans ce contexte, l'ordre zéro fait référence aux termes où μ et ν sont tous les deux égaux à 0, ce qui correspond aux composants temporels. Cette simplification nous mène à l'équation suivante :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{00,0} + h_{00,0}) c^2 \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} = 0 \quad (2.3.107)$$

Dans cette approximation, seuls les termes impliquant la coordonnée temporelle contribuent de manière significative à l'équation du mouvement, simplifiant l'analyse des géodésiques de l'espace-temps dans un champ gravitationnel faible.

Cependant, étant donné que le champ gravitationnel est statique, ces quantités sont nulles, alors :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} = 0 \quad (2.3.108)$$

Cela implique que t est proportionnel à s , ce qui signifie :

$$s = ct \quad (2.3.109)$$

— Pour les coordonnées spatiales désignées par $\lambda = i$, à partir de 2.3.109, nous obtenons :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} (h_{\mu i, \nu} + h_{\nu i, \mu} - h_{\mu\nu, i}) \frac{1}{c^2} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \quad (2.3.110)$$

Cependant, comme mentionné précédemment, nous ne conserverons que les quantités d'ordre 0 pour μ et ν qui sont égaux à 0. En raison de la nature statique des champs gravitationnels, nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} h_{00, i} = 0 \quad (2.3.111)$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00, i} \quad (2.3.112)$$

Puisque i est un indice spatial prenant les valeurs 1, 2 ou 3, nous trouvons ainsi une forme d'équivalence "Accélération - Force" qui peut être représentée sous forme vectorielle :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\text{grad}} \phi \quad (2.3.113)$$

avec

$$\phi = \frac{c^2 h_{00}}{2} \quad (2.3.114)$$

Le lien entre le potentiel gravitationnel et la composante temporelle du tenseur métrique peut être établi en introduisant 2.3.114 dans 2.3.96, nous obtenons ainsi :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (2.3.115)$$

Le potentiel gravitationnel ϕ est équivalent à une vitesse au carré (c^2). Sachant que $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$, nous pouvons vérifier localement que pour la Terre, $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = \frac{2G \cdot M_t}{R_t \cdot c^2} = 10^{-9} \ll \eta_{00} = 1$ en utilisant l'expression bien connue pour le calcul du potentiel gravitationnel :

$$\phi = \frac{GM}{R} \quad (2.3.116)$$

2.3.8 Les Solutions de Karl Schwarzschild & Ludwig Flamm

Karl Schwarzschild a développé une solution géométrique complète à l'équation 2.3.1, consistant en deux métriques publiées dans deux articles séparés²¹ dont les formes développées²² sont les suivantes :

- **La première solution** décrit, par la métrique 2.3.117, la géométrie extérieure de l'espace-temps entièrement vide autour d'une masse à symétrie sphérique telle qu'une étoile de rayon r_n , comme illustré sur la figure 2.7 :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{8\pi G\rho r_n^3}{3c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^3}{3c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.3.117)$$

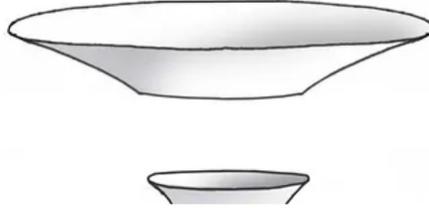


FIGURE 2.7 – Portion d'une hypersurface de Flamm

- **La deuxième solution**, souvent appelée solution intérieure de Schwarzschild structurée par la métrique 2.3.118, décrit la géométrie de l'espace-temps à l'intérieur d'un corps statique, sphériquement symétrique composé d'un fluide incompressible, tel qu'une étoile de rayon r_n , comme illustré sur la figure 2.8 :

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^2}{3c^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} \right]^2 c^2 dt^2 \quad (2.3.118)$$

21. [91] et [90]

22. [1]

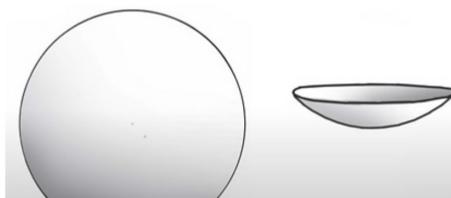


FIGURE 2.8 – Portion d’une sphère

Cette approche implique l’assemblage de deux segments de solutions d’espace-temps, spécifiquement deux régions d’hypersurfaces, chacune caractérisée par leurs métriques distinctes. L’assemblage est effectué à une frontière commune, assurant la continuité de la géométrie de l’espace-temps et la cohérence physique de la solution combinée à travers l’interface.

La même année, un jeune mathématicien a offert sa propre interprétation du travail de Schwarzschild. Son nom était Ludwig Flamm. Son travail et son nom sont restés inconnus de la plupart des spécialistes de la cosmologie pour une raison simple : son article n’a pas été traduit en anglais avant 2015. Il maîtrisait parfaitement la géométrie des hypersurfaces riemanniennes tridimensionnelles ([34],[35]).

Kruskal et Szekeres, s’appuyant sur la métrique extérieure de Schwarzschild, ont développé leur modèle renommé fondé sur une nouvelle métrique, considéré comme le fondement de la théorie des trous noirs. En effet, en prolongeant analytiquement la solution extérieure de Schwarzschild, ils éliminent “algébriquement” la singularité de coordonnées à l’“horizon des événements” pour $r = R_s$ (Rayon de Schwarzschild), par l’introduction d’un nouveau système de coordonnées dans la métrique 2.3.119 :

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-r/2m} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.3.119)$$

Cette métrique n’est pas lorentzienne à l’infini. En effet, lorsque $r \rightarrow \infty$, le terme $\frac{32m^3}{r} e^{-r/2m}$ tend vers zéro, car $e^{-r/2m}$ décroît exponentiellement beaucoup plus rapidement que r ne croît.

Ainsi, à l’infini, le terme multiplicatif $\frac{32m^3}{r} e^{-r/2m}$ devient négligeable devant $(dv^2 - du^2)$, ce qui réduit 2.3.119 à 2.3.120.

$$ds^2 \approx -r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.3.120)$$

Cela démontre que la métrique de Kruskal-Szekeres n’est pas asymptotiquement plate (et donc pas strictement lorentzienne) à l’infini. Néanmoins, ce système a été conçu pour rendre la métrique régulière partout, sauf à la “singularité physique centrale” pour $r = 0$ [55, 94]. Mais ce modèle a-t-il vraiment un sens physique ?

2.3.9 Construction des Géodésiques pour la Métrique Extérieure de Schwarzschild

Considérons la métrique extérieure de Schwarzschild (6.53) extraite de [1] (Page 194) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.3.121)$$

où m est une constante d'intégration simple (une longueur), x^0 est un marqueur chronologique (également une longueur), et s est la longueur mesurée sur l'hyper-surface 4D.

Les auteurs écrivent :

$$x^0 = ct \quad (2.3.122)$$

Une géodésique est un chemin inscrit sur l'hyper-surface, qui correspond à une longueur minimale :

$$\delta \int ds = 0 \quad (2.3.123)$$

Cela signifie que cette longueur :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (2.3.124)$$

a une valeur minimale le long d'un chemin ainsi paramétré : $t(s), r(s), \theta(s), \phi(s)$.

Écrivons :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds} \quad (2.3.125)$$

Cela revient à rechercher des chemins qui minimisent :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right\} ds \quad (2.3.126)$$

La quantité entre crochets est :

$$L = L(t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad \text{ou} \quad L = L(x^i, \dot{x}^i) \quad (2.3.127)$$

Ce problème a été résolu par le mathématicien français Lagrange, ce qui a conduit à ce que l'on appelle désormais les *équations de Lagrange*.

Le calcul des géodésiques est un problème d'«*extrémum lié*». Cela est dû au fait que nous considérons tous les chemins reliant deux points a et b , donc liés à ces points. Les géodésiques sont alors données par les équations :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad (2.3.128)$$

Avec :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (2.3.129)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (2.3.130)$$

Les trois premières équations de Lagrange (6.75), (6.76), (6.77) extraites de [1], correspondant aux variables θ , ϕ et t , sont les suivantes :

$$\frac{d}{ds}(r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (2.3.131)$$

$$\frac{d}{ds}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (2.3.132)$$

$$\frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t} \right] = 0 \quad (2.3.133)$$

Si nous divisons chaque terme de la métrique 2.3.121 par ds^2 :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (2.3.134)$$

En relativité générale, l'exploitation de la symétrie sphérique d'une solution peut simplifier l'analyse des géodésiques. Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, qui est effectivement sphériquement symétrique, cette symétrie peut être exploitée pour réduire le problème à deux dimensions.

La métrique de Schwarzschild, en coordonnées sphériques, dépend des variables r , θ , ϕ , et t . La symétrie sphérique indique que la métrique ne change pas lorsqu'on effectue des rotations autour du centre. Cette propriété nous permet de simplifier le problème en choisissant des géodésiques qui restent dans un plan constant. Il est courant de choisir le plan équatorial pour simplifier les calculs, ce qui correspond à fixer $\theta = \pi/2$. Dans ce plan, la coordonnée θ ne change pas, ce qui signifie que $d\theta = 0$ et donc la composante de la métrique impliquant $d\theta$ disparaît (voir la Figure 2.9).

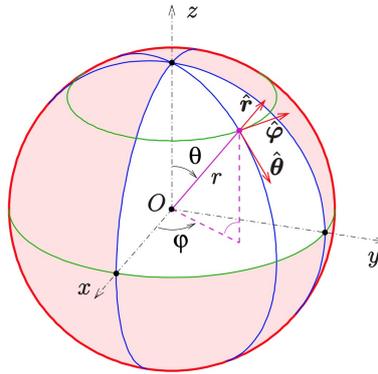


FIGURE 2.9 – Vecteurs unitaires en coordonnées sphériques

Ensuite, en examinant le Lagrangien (qui est une fonction résumant la dynamique d'un système) associé à cette métrique, nous pouvons trouver les équations

du mouvement pour les géodésiques. Pour un objet se déplaçant dans le plan équatorial, la composante azimutale de son moment angulaire, liée à ϕ , est conservée, ce qui est une conséquence de la symétrie axiale de la métrique par rapport à l'axe perpendiculaire au plan équatorial. Mathématiquement, cela s'exprime par l'équation :

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{constante} \quad (2.3.135)$$

où h est une constante de mouvement (moment angulaire par unité de masse), r est la coordonnée radiale, et $\dot{\phi}$ est la dérivée de la coordonnée azimutale ϕ par rapport au temps propre s (le temps mesuré par une horloge se déplaçant avec l'objet).

Cela nous indique que la quantité $r^2 \dot{\phi}$ reste constante le long de la géodésique. L'équation 2.3.133 ci-dessus s'intègre et donne :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l = \text{constante} \quad (2.3.136)$$

Par substitution, nous obtenons alors l'équation différentielle :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \quad (2.3.137)$$

qui donne r en fonction du paramètre s . Mais en utilisant une équation présentée précédemment, nous pouvons passer à une équation différentielle mettant en vedette la dérivée :

$$r' = \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} \quad (2.3.138)$$

De 2.3.135 et 2.3.136, nous obtenons alors :

$$\dot{r} = \dot{\phi} r' = \frac{h}{r^2} r' \quad (2.3.139)$$

Nous pouvons alors obtenir l'équation différentielle reliant r et l :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 \dot{t}^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (2.3.140)$$

Nous pouvons ensuite faire la transition de la variable r à une variable u tel que :

$$u = \frac{1}{r} \implies r' = -\frac{u'}{u^2} \quad (2.3.141)$$

Puis, de 2.3.138, nous pouvons déduire :

$$d\phi = \frac{dr}{r'} = \frac{du}{u'} \quad (2.3.142)$$

Ce qui nous amène à :

$$(1 - 2mu) = c^2 \dot{t}^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu) \quad (2.3.143)$$

qui se réduit à :

$$u'^2 = \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} \right) + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3 \quad (2.3.144)$$

Ainsi, de 2.3.142, l'intégration donne :

$$\phi = \phi_0 + \int_{u_0}^u \frac{dv}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} v - v^2 + 2mv^3}} \quad (2.3.145)$$

Ceci constitue une solution exacte de l'équation d'Einstein qui exprime l'angle ϕ en tant qu'intégrale de $u = \frac{1}{r}$. Inversement, cela nous donne u en tant que fonction inverse (implicite) de ϕ , ce qui conduit à des géodésiques “*quasi-elliptiques*”, dépendant des deux constantes d'intégration l et h .

En effet, si h est grand, cela signifie que la géodésique parcourue par une particule de test s'écartera d'une trajectoire de chute libre radiale car elle aura une quantité significative de moment angulaire spécifique. Par conséquent, sa trajectoire sera moins affectée par la force de gravité directement vers le corps central, l'amenant à s'écarter d'une chute radiale directe et à suivre un chemin plus courbé ou “*quasi-elliptique*”.

En ignorant la région à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild ($r < 2m$), il est possible de représenter en 3D les géodésiques planes associées à cette métrique stationnaire. La représentation de la sphère de Schwarzschild peut être envisagée comme un cercle qui se projette dans l'espace-temps le long de la dimension temporelle de Schwarzschild t_s . Si nous considérons une étoile à neutrons avec un rayon de 10 km, elle restera stable à la limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) d'environ 2 masses solaires. La limite TOV représente la masse maximale critique qu'une étoile à neutrons peut avoir tout en restant stable. Cela place l'*horizon* d'une masse ponctuelle équivalente à une distance de son centre d'environ 6 km ($r_s = \alpha$). Étant donné que le rayon de l'étoile est environ 3/2 fois r_s , nous positionnons l'*horizon* de cet objet à $r_s = 2$ pour un rayon de 3. Cette configuration a permis à un internaute de représenter, à l'aide de Mathematica, la géodésique d'une particule témoin suivant une trajectoire en chute libre vers cet objet, comme illustré par la figure 2.10.

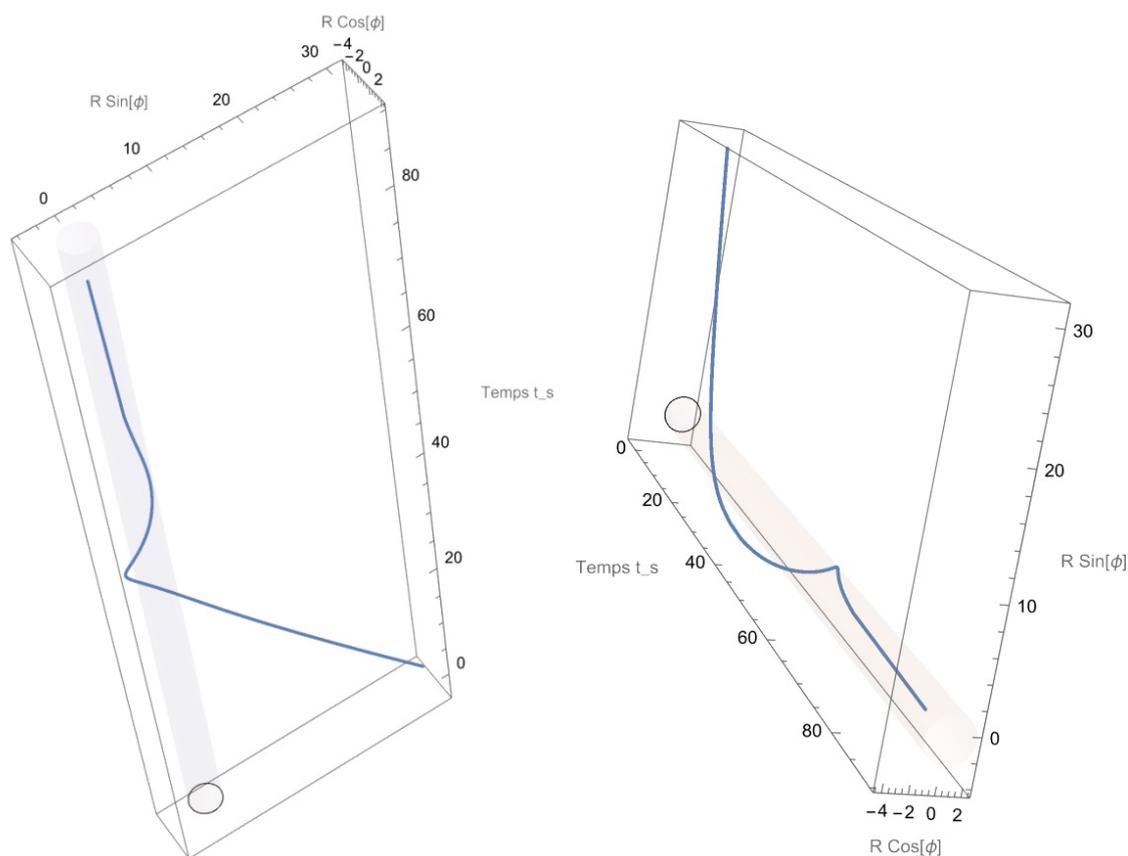


FIGURE 2.10 – Représentation d’une Géodésique en Chute dans le Système de Coordonnées (r, ϕ, t_s)

Quelle que soit la direction de déplacement de la géodésique, en l’occurrence centripète, avec ce choix de coordonnée temporelle, il faudrait une durée infinie pour s’approcher de la sphère de Schwarzschild. En effet, comme nous pouvons le voir sur les Figures 2.11 et 2.12, pour un observateur lointain, tout objet s’approchant de l’horizon d’une étoile à neutrons proche de sa criticité physique ou d’un objet supermassif, comme ceux dont l’approche alternative sera étudiée au chapitre 8, subirait une dilatation temporelle près de ce qu’on appelle le rayon de Schwarzschild. Cependant, pour l’objet lui-même (ou un observateur se déplaçant avec l’objet), le temps continuerait de progresser normalement (Respectivement, la courbe bleue par rapport à la courbe en pointillé).

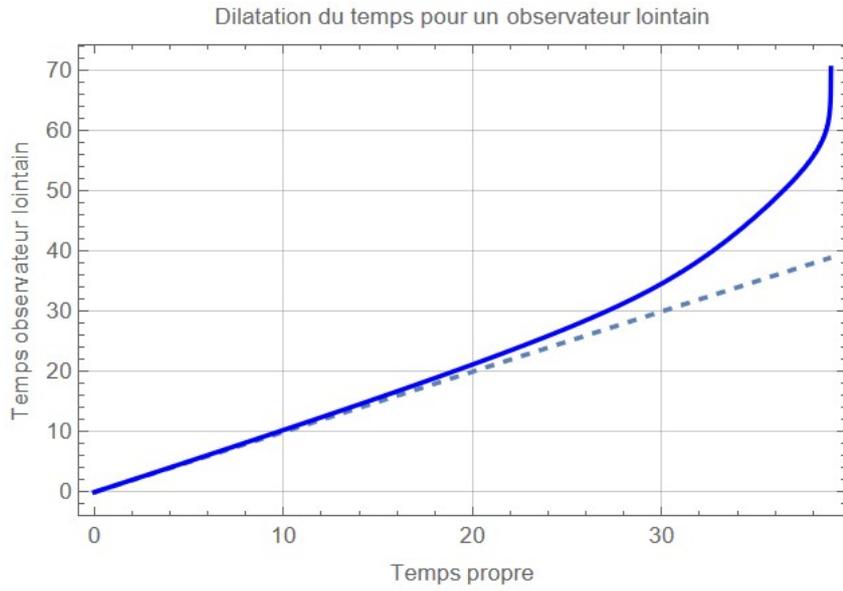


FIGURE 2.11 – Dilatation Temporelle pour un Observateur Lointain

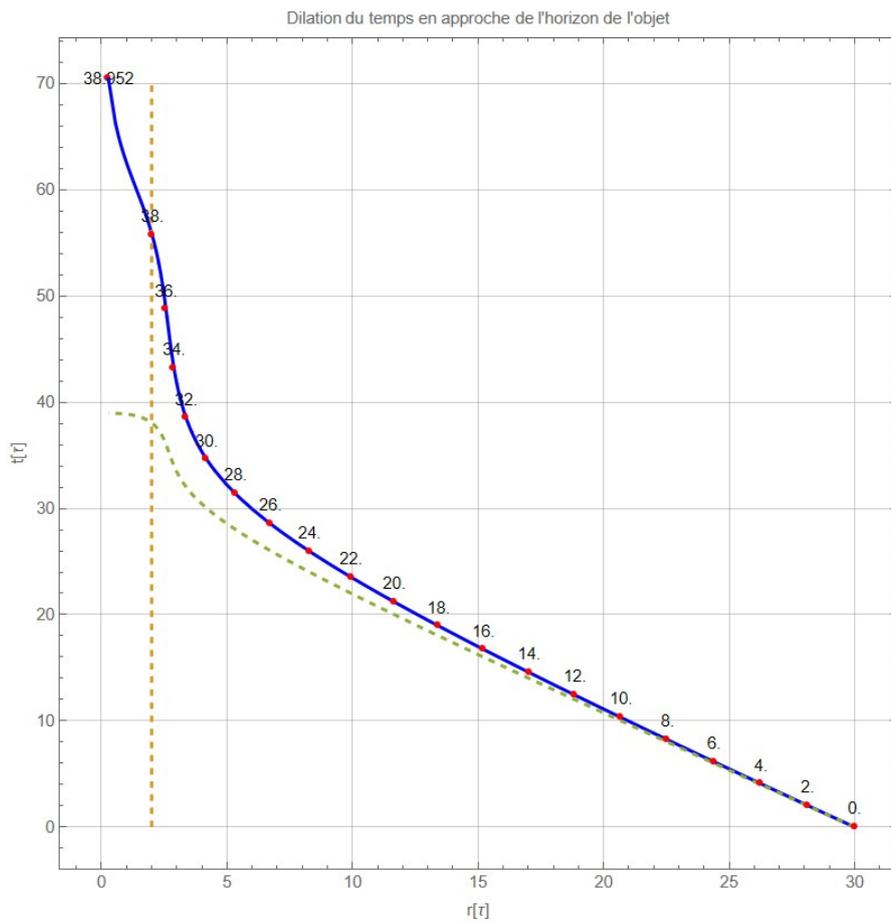


FIGURE 2.12 – Dilatation Temporelle en Approchant de l'Horizon de l'Objet

Du point de vue de cet observateur lointain, l'objet mettrait apparemment une durée infinie à atteindre cet horizon. En conséquence, il serait perçu comme ralentissant progressivement, apparaissant presque figé ou faisant un arrêt sur image près de l'horizon.

Ce phénomène est une conséquence de la relativité générale, qui prédit que la présence d'une masse significative courbe l'espace-temps. Cette courbure affecte le passage du temps, conduisant à une dilatation temporelle dans des champs gravitationnels intenses.

Cet aspect constitue l'un des piliers de la théorie des trous noirs. Mais existe-t-il une autre alternative ? C'est ce que nous explorerons plus tard au chapitre 6.

2.3.10 La Solution de Roy Kerr

En 1963, Roy Kerr, un éminent mathématicien néo-zélandais, a révolutionné la compréhension de la relativité générale dans le contexte du modèle de trou noir en proposant une nouvelle solution à l'équation du champ d'Einstein. Contrairement à la métrique extérieure de Schwarzschild ([91]), qui est utilisée comme fondement du modèle de trou noir statique et sphériquement symétrique, la solution de Kerr est axi-symétrique, représentant un trou noir en rotation ([51]). Cette découverte était particulièrement significative à l'époque car elle fournissait un modèle plus réaliste pour de nombreux objets célestes.

La métrique de Kerr est exprimée en coordonnées de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) ([21]), et son élément de ligne est donné pour $c = 1$ par :

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\ & + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.3.146)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2GMr + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

M est la masse de l'objet central en rotation, souvent un trou noir, influençant l'espace-temps environnant, et a est le moment angulaire spécifique de l'objet en rotation. Le terme important à noter ici est $-\frac{4GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi$, qui représente l'effet d'entraînement de l'espace-temps dû à la rotation de l'objet, typiquement un trou noir. Cette caractéristique peut être interprétée comme une manifestation de l'idée d'Ernst Mach sur la relativité du mouvement, où l'espace-temps lui-même semble être influencé par la présence de matière en mouvement.

La pertinence de la solution de Kerr a été encore soulignée par la découverte des pulsars en 1967, initialement compris comme des étoiles à neutrons tournant à des

vitesse incroyablement élevées, parfois atteignant mille rotations par seconde. Bien que la métrique de Kerr soit principalement appliquée au modèle de trou noir, ses implications pour la compréhension d'autres objets astrophysiques compacts, tels que les étoiles à neutrons, sont également significatives.

L'astrophysicien renommé Subrahmanyan Chandrasekhar a salué la solution de Kerr, la considérant comme une avancée majeure dans la recherche mathématique appliquée en physique théorique ([19]).

Ce qui est important de souligner à travers cette approche de Kerr, c'est la possibilité d'explorer d'autres propriétés de représentation, comme l'introduction, par exemple, d'un terme $drdt$ dans la métrique extérieure de Schwarzschild, dont les implications seront étudiées au chapitre 6.

2.4 Les Travaux d'Andrei Sakharov & Jean-Marie Souriau

Le modèle cosmologique de Jean-Pierre Petit compile la théorie de la relativité d'Albert Einstein, le modèle d'Andrei Sakharov (inversion du temps et asymétrie baryonique) ainsi que la théorie des groupes dynamiques de Jean-Marie Souriau, qui établit un lien entre l'inversion du temps à celle de l'énergie, donc de la masse ([70]).

En effet, l'asymétrie baryonique de l'univers est considérée comme l'un des problèmes les plus significatifs de la physique actuelle. Plus précisément, cela se réfère à l'observation qu'il existe une quantité nette de baryons (particules composées de trois quarks, comme les protons et les neutrons) dans l'univers, mais presque pas d'antibaryons (particules composées de trois antiquarks). L'univers aurait dû être créé avec une quantité égale de matière baryonique et d'antimatière antibaryonique depuis le Big Bang, ce qui aurait conduit à leur annihilation mutuelle, leur masse se transformant en photons. Mais où est passée cette antimatière primordiale ?

Dans les années 1960, les scientifiques ont découvert que le taux de production de matière (à partir de la combinaison de quarks primordiaux) se produit légèrement plus rapidement que le taux de production d'antimatière (à partir de la combinaison d'antiquarks), un phénomène connu sous le nom de "*violation CP*" ([24]). Cela était paradoxal car de tels processus de combinaison étaient auparavant considérés comme symétriques. Cependant, en raison de cette *violation CP*, plus de matière a été synthétisée dans l'univers primordial et a prévalu sur l'antimatière.

Le physicien russe Andrei Sakharov a été le premier, à partir de 1967, à restaurer une symétrie globale, considérant que l'univers n'était pas composé d'une seule entité mais de deux univers jumeaux émanant de la même singularité du Big Bang, ayant deux flèches du temps opposées à partir du moment $t = 0$. La singularité initiale Φ inverse non seulement le temps (*T-symétrie*) mais aussi la parité (*P-symétrie*, également appelée "*énantiomorphie*") ainsi que la conjugaison de charge (*C-symétrie*,

qui transforme une particule en son antiparticule, et vice versa), induisant une *CPT-symétrie* complète ([85],[86],[87]). La *violation de la symétrie CP* est également inversée dans l'univers jumeau, ce qui signifie que l'antimatière a prévalu sur la matière. Il convient de noter que Sakharov s'est concentré sur la description de la *CPT-symétrie* uniquement dans le contexte de la physique des particules, donc sans impliquer la gravitation dans son modèle, de sorte que les univers jumeaux n'interagissent jamais sauf au moment de leur naissance comme sur la Figure 2.13 :

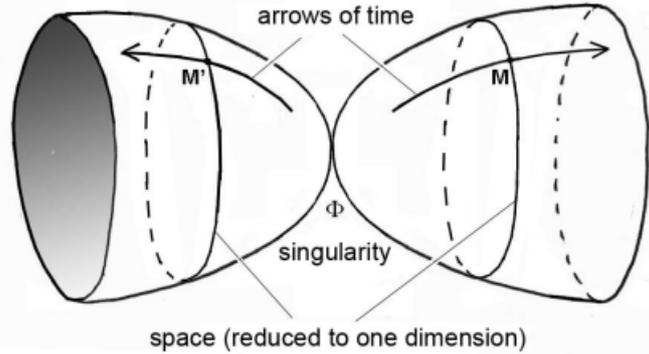


FIGURE 2.13 – Modèle Cosmologique de Sakharov

2.5 Approche Bimétrique Introduite par la Géométrie Riemannienne Hyperbolique

La géométrie riemannienne hyperbolique joue un rôle essentiel dans le modèle cosmologique Janus. Cette branche de la géométrie étudie les espaces courbés avec une courbure négative constante. Cette géométrie permet de conceptualiser des espaces avec des courbures à la fois positives et négatives. Cependant, il est important de noter qu'actuellement, il n'existe aucune théorie mathématique bimétrique ou multimétrique introduite dans la géométrie riemannienne hyperbolique sur laquelle un modèle cosmologique bimétrique peut être basé. En effet, les modèles théoriques actuels restent heuristiques. Par exemple, deux approches ont été tentées en 2002 et 2008 par Thibault Damour ([26]) et Sabine Hossenfelder ([48]), respectivement. L'une était basée sur l'introduction de gravitons lourds et légers dans un système d'équations de champ bimétrique, et l'autre était plus ou moins similaire à notre modèle.

En effet, Damour et Kogan tentent de construire une théorie des “*deux membranes*”, impliquant un spectre de gravitons massifs, mais ce document de 40 pages se termine en queue de poisson. Au passage, ils montrent qu'une telle bigravité doit obéir à un système de deux équations de champ couplées :

$$2M_L^2 \left(R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^L R(g^L) \right) + \Lambda_L g_{\mu\nu}^L = t_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^L \quad (2.5.1)$$

$$2M_R^2 \left(R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^R R(g^R) \right) + \Lambda_R g_{\mu\nu}^R = t_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^R \quad (2.5.2)$$

Ensuite, Sabine Hossenfelder propose un modèle raffiné abordant le concept de masse négative dans l'univers. Cependant, en 1957, Hermann Bondi a tenté d'introduire ces masses dans le modèle d'Albert Einstein. Mais, le phénomène dit de fuite révèle des contradictions physiques, que le modèle viole telles que les principes fondamentaux de la physique, comme le principe d'action-réaction et d'équivalence ([13]). Hossenfelder va plus loin pour formuler une paire de nouvelles équations de champ couplées :

$${}^{(g)}R_{vk} - \frac{1}{2}g_{vk}{}^{(g)}R = T_{kv} - V\sqrt{\frac{h}{g}}a_v^ka_k \quad (2.5.3)$$

$${}^{(h)}R_{vk} - \frac{1}{2}h_{vk}{}^{(h)}R = \underline{T}_{vk} - W\sqrt{\frac{g}{h}}a_k^ka_vT_{kv} \quad (2.5.4)$$

Ensuite, comme elle n'a pas pu résoudre l'incohérence avec les principes physiques et croyait qu'elle était inextricablement liée à la "*gravité bimétrique*", elle a abandonné.

Le point commun entre ces deux approches est qu'elles sont purement théoriques et n'ont pas fourni de résultats validés par des observations. Le seul crédit qui peut être attribué à notre modèle cosmologique, par rapport aux deux précédents, est qu'il possède de nombreux points d'ancrage avec l'observation et plusieurs prédictions physiques que nous verrons dans la Section 3.2.

La géométrie riemannienne hyperbolique est une branche de la géométrie riemannienne qui étudie les espaces avec une courbure négative constante, correspondant mathématiquement à une forme hyperbolique souvent décrite comme étant "*en forme de selle*". Plus précisément, la courbure négative constante de l'espace hyperbolique peut être décrite comme le comportement asymptotique de l'hyperbole dans les deux directions : les branches de l'hyperbole divergent indéfiniment sans jamais converger. Cette caractéristique est une propriété importante de l'espace hyperbolique et peut être utilisée pour le distinguer de la géométrie euclidienne et de la géométrie riemannienne sphérique.

Par exemple, sur la Figure 2.14, les lignes rouges dessinant les triangles sont les *géodésiques* de la surface. Pour simplifier, une *géodésique* est le chemin le plus court entre deux points dans l'espace. Imaginez que vous êtes dans un espace euclidien plat, comme sur une grande feuille de papier ; ici, ce chemin est juste une ligne droite. Mais sur des surfaces courbées, qu'elles soient positivement courbées (géométrie sphérique) ou négativement courbées (géométrie hyperbolique comme une selle de cheval), une *géodésique* peut être tracée en utilisant une corde ou un élastique tendu entre deux points sur cette surface, représentant le chemin le plus court. Ainsi, contrairement à la géométrie euclidienne où la somme des angles d'un triangle égale 180 degrés, cette somme dépasse 180 degrés en géométrie sphérique (riemannienne) et est inférieure à 180 degrés en géométrie hyperbolique (également un type de géométrie riemannienne).

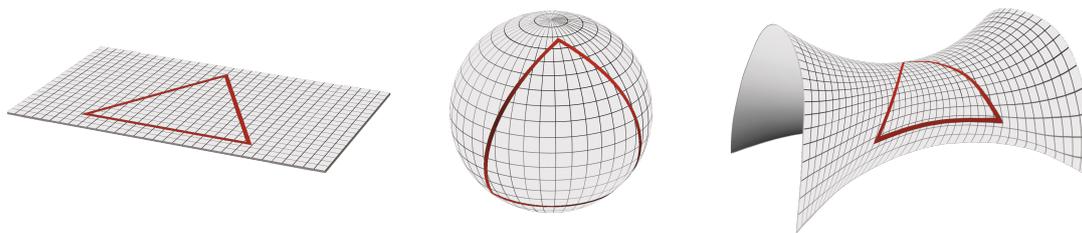


FIGURE 2.14 – Types de Courbure Spatiale

Il est important de noter qu'un espace euclidien "*plat*"²³, n'est pas nécessairement un plan plat. Reprenez l'exemple précédent de la feuille : même si elle est pliée plusieurs fois, comme de la tôle ondulée, sa courbure reste nulle partout. Cela signifie que la *géodésique* tracée sur sa surface ne change pas, car la feuille ne s'étire pas. Il en va de même pour les surfaces euclidiennes fermées comme un cylindre ou un cône : contrairement à ce que l'on pourrait penser, elles n'ont pas de courbure. Selon la géométrie euclidienne, bien qu'elles apparaissent courbées, elles peuvent être considérées comme "*plates*" car leur surface peut être dépliée en un plan sans étirement.

23. Un espace à courbure nulle.

Chapitre 3

Le Modèle Cosmologique Janus de Jean-Pierre Petit

3.1 Description

Le Modèle Cosmologique Janus propose une vision révolutionnaire de l'univers, caractérisée par une variété riemannienne avec deux métriques distinctes. Ces métriques gèrent les masses positives et négatives de manière unique, offrant une interprétation cohérente dans le cadre de la relativité générale, confirmée par les observations, tout en évitant les paradoxes traditionnels.

Géométriquement, ce modèle équivaut au repli des deux nappes d'Andreï Sakharov, *CPT* symétriques, constituant alors le revêtement à deux feuillet de la variété, chacun étant alors équipé de sa propre métrique hyperbolique.

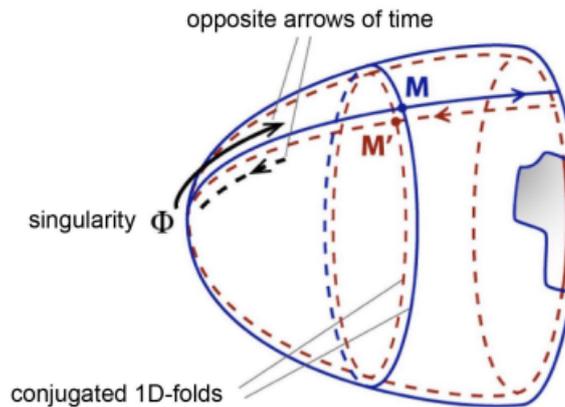


FIGURE 3.1 – Représentation didactique 2D du modèle Janus de J-P Petit

On désignera par $g_{\mu\nu}$ la métrique du premier feuillet le long duquel s'inscrivent les géodésiques parcourues par les masses positives et les photons d'énergie positive.

Et par $h_{\mu\nu}$ la métrique attachée au second feuillet, qui engendrera les géodésiques parcourues par les masses de la seconde matière et celles parcourues par les photons d'énergie négative. Et on fera en sorte que les masses de cette seconde matière, négatives, soient auto-attractives et satisfassent, vis-à-vis de leur interaction avec les masses positives, le principe d'action-réaction.

La crise en cosmologie s'est installée depuis un demi-siècle. Tout a commencé avec l'impossibilité que les forces de gravité, newtoniennes, parviennent à contrebalancer la force centrifuge. Dans notre galaxie, le Soleil suit une orbite proche de celle d'un cercle, à 30 km/s. La force de gravité devrait l'empêcher de quitter cette orbite. Mais quand on la calcule sur la base de la seule matière visible, on la trouve cinq fois trop faible. Alors, on invente le concept de matière sombre. Cette matière sombre, on la traque alors pendant des décennies, de toutes les façons possibles, sans succès. On croit d'abord qu'elle peut être représentée par les MACHOs (Massive Astrophysical Compact Halo Objects). Échec. Alors imaginer que cette masse non détectée puisse être celle de particules de forte masse, les neutralinos, interagissant faiblement avec la matière ordinaire. Ces neutralinos, on tente de les capturer, dans des mines, des tunnels, dans l'espace. Rien.

Pire encore : les mesures effectuées sur les supernovae distantes montrent que l'expansion de l'univers, aujourd'hui, ne faiblit pas. Au contraire, elle s'accélère. Alors on invente autre chose : l'énergie noire. De quoi est-elle faite ? Mystère complet.

On attend que le nouveau télescope spatial James Webb apporte des choses nouvelles. Il le fait, mais cela ne va pas dans le sens souhaité. Il met en évidence l'existence de galaxies, plus massives que celles que nous observons autour de nous, dotées d'une structure de spirale barrée, entièrement formée. L'analyse de leur spectre montre qu'elles contiennent de l'oxygène, résultat d'une nucléosynthèse, rejetée par les supernovae. Elles recèlent des étoiles matures. Même en dotant la matière sombre de l'univers de toutes les vertus possibles et imaginables, les experts ne parviennent pas à former ces objets en moins d'un milliard d'années. Or le JWST en trouve âgés de 500, 400, et maintenant 300 millions d'années.

Il faut changer de modèle. Alors la blogueuse Sabine Hossenfelder se demande pourquoi la communauté scientifique ne se décide pas à prendre à bras-le-corps le « modèle de l'israélien Mordekaï Milgrom » pour qui, à distance, la loi de Newton n'est plus en $1/r^2$ mais en $1/r$. La base théorique ? Elle tient en trois mots. La force centrifuge est en V^2/r . Pour que les trajectoires soient circulaires avec une vitesse V constante, il suffit que la force de gravité soit en $1/r$.

Depuis trois décennies, Jean-Pierre Petit propose que la présence de masse négative apporte la solution. Pourtant l'introduction de ces masses est incompatible avec la relativité générale. L'équation d'Einstein, qui est sa base, fournit les lois d'interaction. En l'occurrence la loi de Newton, liant des masses positives. Le principe d'action-réaction est alors satisfait. Mais, comme montré par le cosmologiste

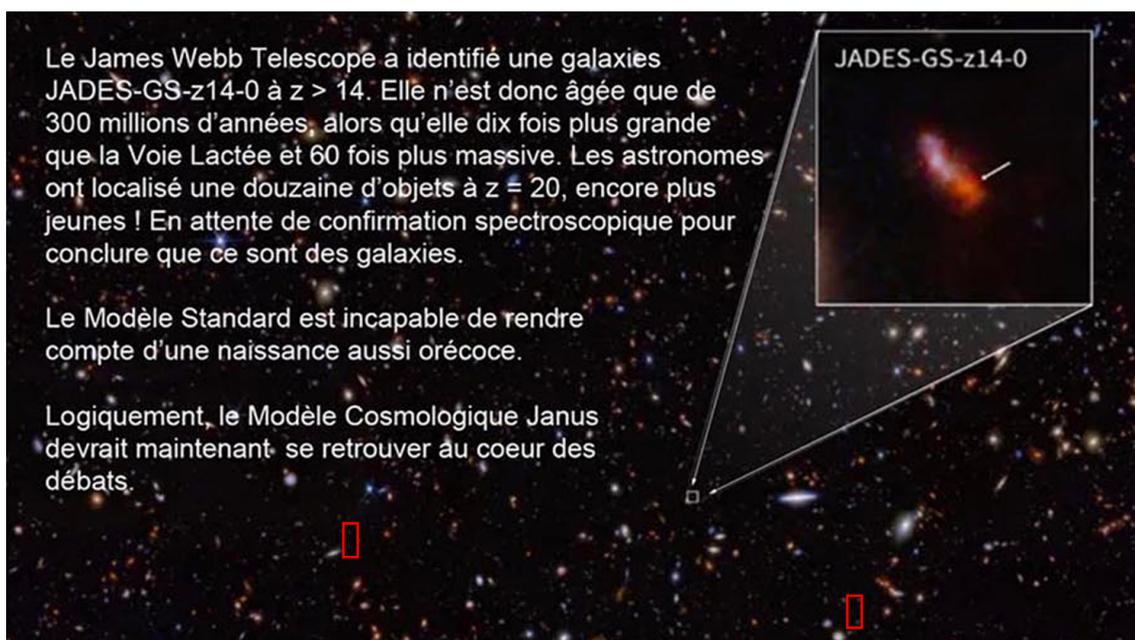


FIGURE 3.2 – Cliché du JWST montrant la plus jeune galaxie

Hermann Bondi en 1955, en ajoutant des masses négatives, rien ne va plus. Le principe d'action-réaction est brisé : quand deux masses de signes opposés entrent en interaction, la masse positive s'enfuit, poursuivie par la masse négative.

Jean-Pierre Petit, depuis dix ans, passe outre. Si un modèle avec une seule métrique, solution d'une unique équation de champ, ne fonctionne pas, envisageons un modèle bimétrique, dont les solutions sont deux métriques, différentes, mais, solution d'un couple d'équations de champ couplées. Il n'est pas le premier à tenter cette aventure.

Avant lui, Damour et Kogan [26] envisagent cette configuration, dans un papier de plus de quarante pages, sans aucun résultat tangible. En 2008, l'allemande Sabine Hossenfelder tente le coup de son côté [48]. Comme Damour et Kogan, elle sait que pour que la solution mathématique jouisse de propriétés d'invariance, il faut qu'elle découle d'un Lagrangien. Alors, comme jadis pour l'équation d'Einstein, dont le mathématicien David Hilbert a montré qu'elle dérivait de ce qu'on appela par la suite « l'action de Hilbert-Einstein », les équations sont obtenues par méthode variationnelle. Reste à bien choisir cette action. Pas plus elle que ses deux prédécesseurs n'imaginent la clé du problème : envisager une profonde dissymétrie entre les deux entités. Petit est le seul à l'envisager et nous détaillerons cela plus loin.

En 2019, Thibault Damour attaque les papiers publiés par Petit dans deux articles successifs, non pas publiés dans des revues à comité de lecture, mais simplement mis en ligne sur la page du site de l'Institut des Hautes Études, dont il relève. Pratiquement six ans plus tard Petit, réplique en publiant sa propre dérivation La-

grangienne ([70]).

Les démarches de Damour, d’Hossenfelder, et de Petit ont quelque chose de fondamentalement différent. Celle de Petit est essentiellement heuristique. Il construit un modèle pour rendre compte d’une réalité observationnelle : la structure à très grande échelle de l’univers, lacunaire. Et pendant des décennies, il revient sans cesse sur ce nécessaire accord. Chez Damour et Hossenfelder, ce pragmatisme est pour ainsi dire absent. Quand en 2002 Damour, et son collaborateur Kogan publient leur article, celui-ci s’appuie déjà sur une démarche exempte de toute base physique. Alors que nul n’est parvenu à quantifier la gravitation, dans le cercle des physiciens théoriciens, on a déjà envisagé de doter les gravitons, non seulement d’une masse, mais d’un spectre de masse. Qui plus est, Kogan a « démontré » qu’au sein de cette population de gravitons massifs il existerait un gap, séparant les gravitons légers des gravitons lourds.

3.2 Un Nouvel Éclairage

Le Modèle Cosmologique Janus apporte donc un nouvel éclairage sur des questions cosmologiques clés dont les réponses sont confirmées par de nombreuses observations et prédictions dont voici une liste non exhaustive :

- Confinement des galaxies par les masses négatives environnantes ¹.
- Explication de la forme des courbes de rotation des galaxies (aplatissement). Résultats dans la section des Simulations de Galaxies Spirales Stables.
- Ce modèle explique l’accélération gravitationnelle plus élevée que prévu des étoiles en orbite aux confins des galaxies en raison de la présence de masses négatives.
- Explication de la vitesse élevée des galaxies au sein des amas en raison de la contribution antigravitationnelle des masses négatives.
- Il propose une description mathématiquement détaillée du comportement des galaxies en s’appuyant sur une approche commune aux équations de Vlasov et de Poisson. Il prédit que les vitesses des étoiles au sein d’une galaxie s’organisent en un ellipsoïde orienté vers le centre galactique, une hypothèse confirmée par la mesure des vitesses résiduelles des étoiles près du système solaire (Voir le chapitre 4).
- Il explique les effets de lentille gravitationnelle autour des galaxies comme sur la figure 3.3.

1. <https://webbtelescope.org/contents/media/images/2022/044/01GG7S6F5V52E5F489R72X7ZNE>

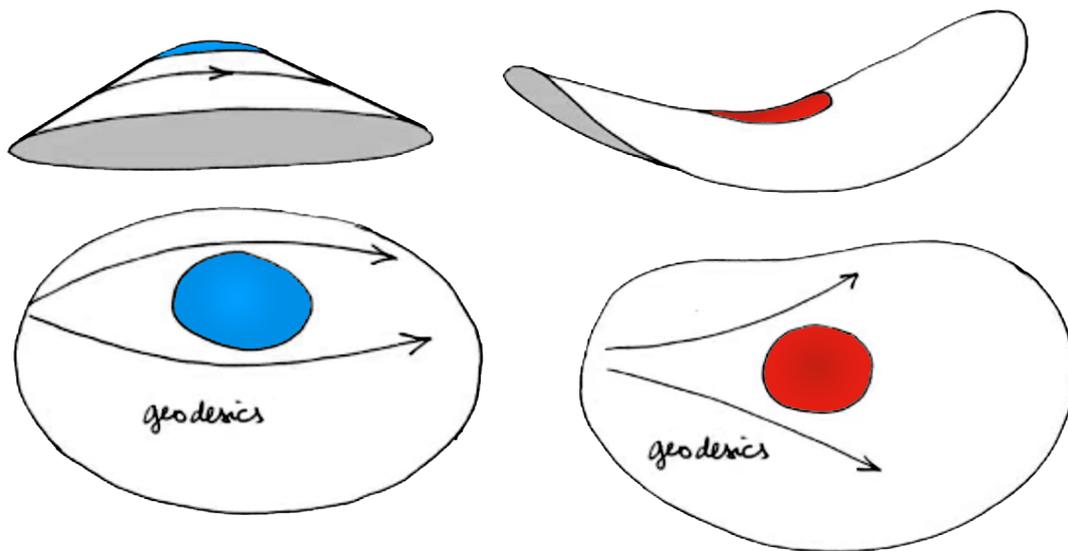


FIGURE 3.3 – Effets de lentille gravitationnelle

- Explication de la structure lacunaire de l'univers occupée par des amas de masses négatives sous forme de bulles de savon interconnectées comme sur la figure 3.4.

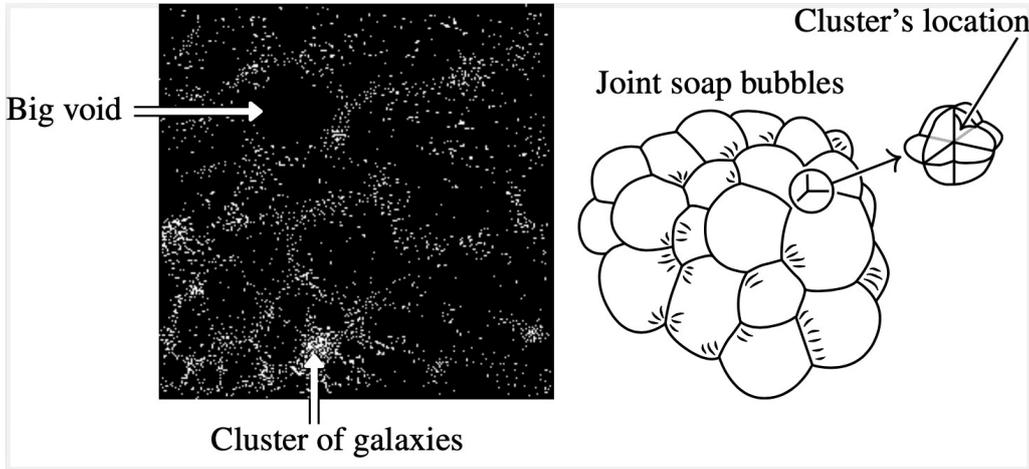


FIGURE 3.4 – Structure lacunaire de l'univers

Cette structure a également été établie en 2018 par Tsvi Piran dans son article [82], où il met en évidence la distribution des galaxies dans ce qu'il appelle des "murs" en raison de la compression antigravitationnelle des régions sous-denses de masses négatives concentrées dans la matière noire des espaces vides. Les observations montrent que ces espaces vides occupent une partie significative du volume de l'Univers. La corrélation entre les vides dans la distribution des galaxies et les régions de faible densité de matière noire démontre clairement l'origine gravitationnelle de ces vides. Les régions sous-denses primordiales, connues sous le nom de "*vides cosmologiques négatifs*", agissent comme des masses gravitationnelles négatives et servent de germes pour les vides observés. Les centres de ces régions sous-denses sont des masses gravitationnelles effectives qui repoussent la matière, l'alignant le long des murs entre les centres. Les vides sont centrés autour de ces masses et sont entourés par des murs de galaxies. Finalement, les murs se fissurent, provoquant la fusion des espaces vides avec d'autres vides, créant un réseau plus large de vides qui confine les galaxies.

- Prédiction et confirmation de la formation précoce de toutes les galaxies récemment observées par le Télescope Spatial James Webb ([33]). En effet, le modèle suggère que toutes les galaxies se sont formées ensemble pendant les premiers 100 millions d'années de l'histoire de l'univers (primordial). Cette formation a eu lieu lorsque la masse positive a été violemment comprimée entre de multiples amas de masses négatives, créant une haute pression. La forte contraction de la matière et des gaz due à l'effet antigravitationnel des masses négatives a induit un chauffage important, conduisant à un refroidissement rapide facilité par une structure en feuille. Ce temps de refroidissement a permis d'atteindre une température suffisante pour initier des réactions de fusion thermonucléaire, permettant ainsi la naissance des premières étoiles et

leur regroupement pour former les galaxies que nous connaissons aujourd’hui.

- Explication des galaxies lointaines à décalage vers le rouge élevé (> 7) apparaissant comme naines (luminosité réduite). En effet, les amas de masses négatives (comme dans la région du Répulseur du dipôle que nous étudierons dans la Section 3.3) créent un effet de lentille gravitationnelle négatif sur leurs photons, ce qui a pour effet d’atténuer leur luminosité.
- Vérifications relativistes locales confirmées, telles que l’avance du périhélie de Mercure ou la déviation des rayons lumineux par le Soleil. En effet, puisque les deux types de masses se repoussent et considérant que la densité de masse négative est presque négligeable à proximité du Soleil, la première équation du système correspond à l’équation de champ d’Einstein (voir la Section 3.3.4).

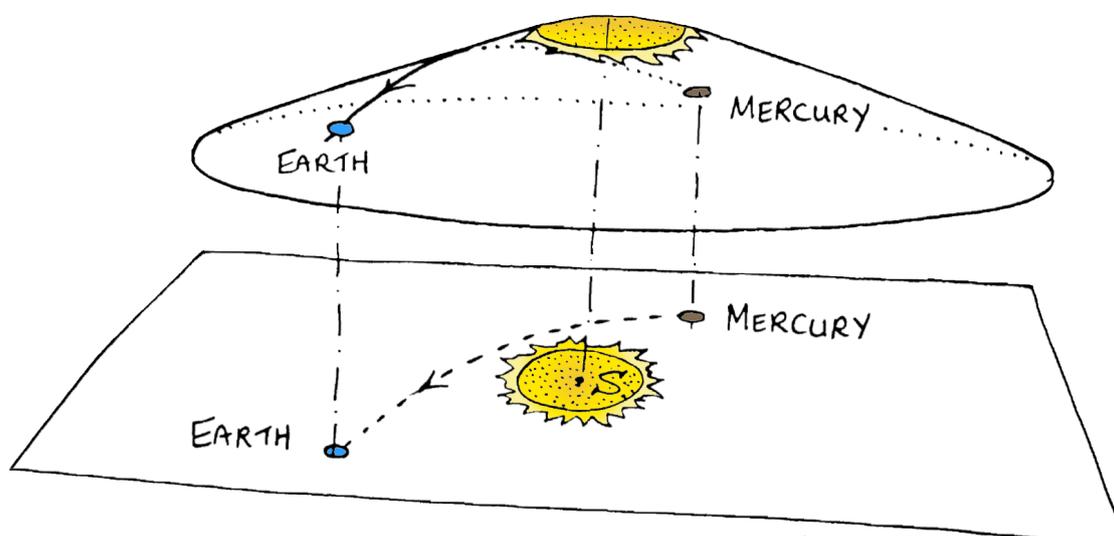


FIGURE 3.5 – Déformation de l’espace-temps induite par la masse du Soleil

- L’exploitation de l’asymétrie entre les deux populations de masses positives et négatives a conduit à la cohérence avec les données d’observations des supernovas de type Ia. L’observation des supernovas de type Ia a été un outil essentiel pour déterminer les distances des objets célestes et étudier l’expansion de l’univers. Les supernovas de type Ia sont des explosions de supernova qui se produisent dans des systèmes stellaires binaires où une étoile connue sous le nom de naine blanche absorbe de la matière d’une étoile compagne jusqu’à atteindre une masse critique, provoquant une explosion. Cette asymétrie pourrait être causée par des processus tels que la rotation ou le champ magnétique de l’étoile compagne, qui transfère de la matière à la naine blanche. Si l’asymétrie existe, elle pourrait entraîner une différence de luminosité entre les supernovas de type Ia, ce qui pourrait expliquer les observations.
- Explication de la nature du Répulseur du Dipôle découvert en janvier 2017 (voir la Section 3.3), où il a été montré qu’il existait une région de l’univers

apparemment vide, opposée à celle de l'Attracteur de Shapley, qui semblait repousser toute matière.

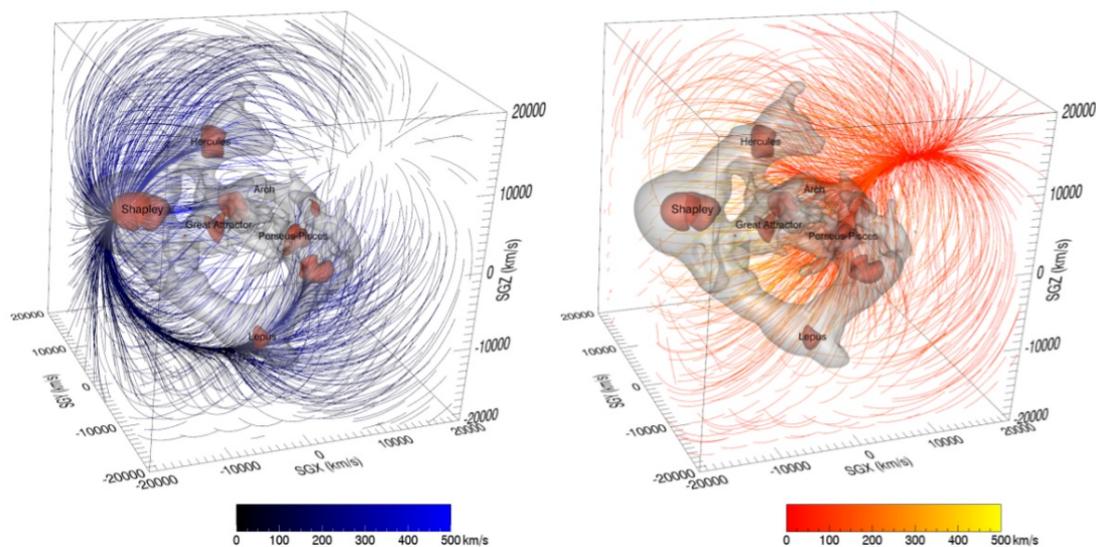
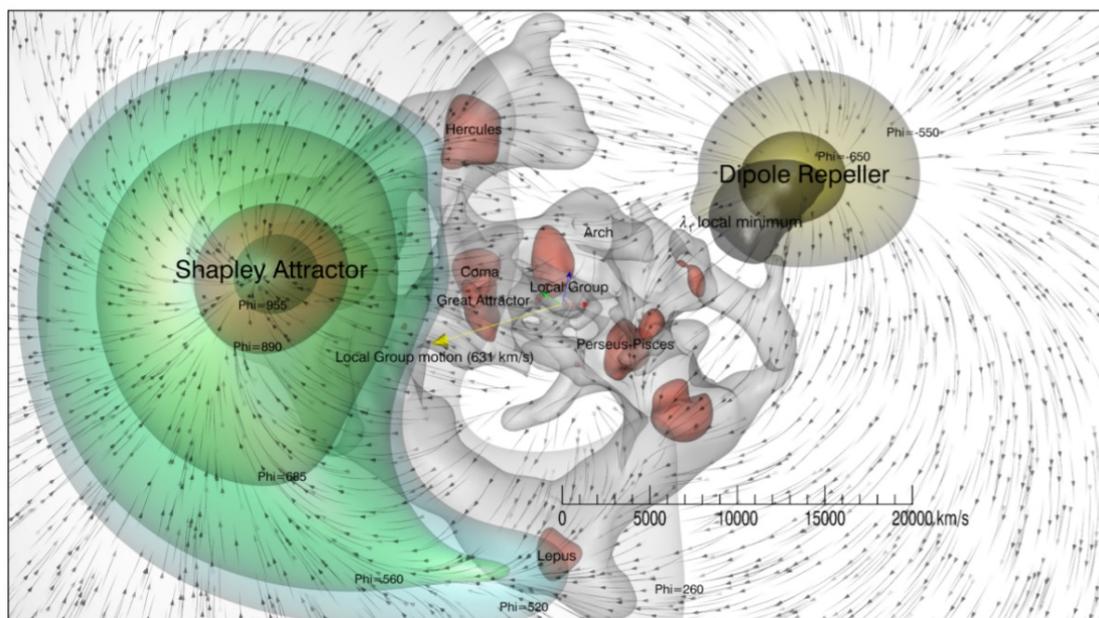


FIGURE 3.6 – Le Répulseur du Dipôle de [47]. L'emplacement du Répulseur du Dipôle (souligné par les cercles rouges) au sein de la structure à grande échelle de l'univers. Le Répulseur du Dipôle est une région hypothétique de l'espace d'où les galaxies sont repoussées, contrebalançant la force attractive du Superamas de Shapley.

- Le modèle met en évidence un modèle de structure spirale galactique durable assuré par la friction dynamique qui transfère continuellement de la quantité de mouvement à l'environnement moins dense de masse négative, permettant aux bras spiralés de tourner de manière persistante et stable autour de la

galaxie. Comme illustré ci-dessous, lorsque les bras traversent des régions de haute densité (masses positives), ils ralentissent et perdent de l'énergie, tandis que lorsqu'ils passent à travers des régions de faible densité, ils accélèrent et gagnent de l'énergie. Cela crée des ondes de densité qui se propagent à travers la galaxie, transférant de la quantité de mouvement à l'environnement de masse négative.

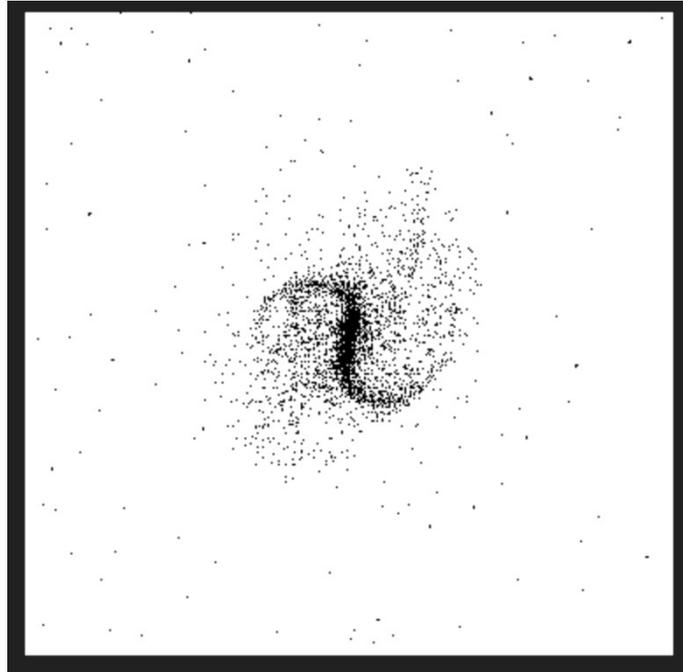


FIGURE 3.7 – Spirale barrée d'une simulation numérique par F. Descamp (1992 : 20 000 points)

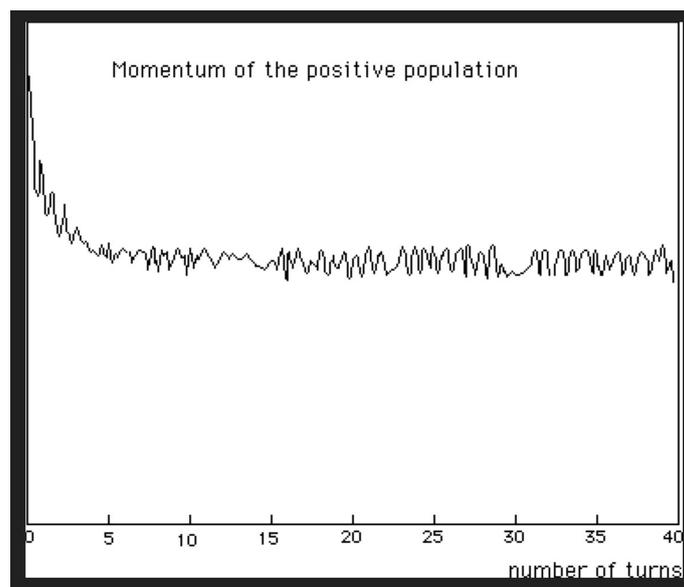


FIGURE 3.8 – Évolution du moment cinétique par F. Descamp (1992 : 20 000 points)

- Explication de l'absence d'observation de l'antimatière cosmique, car elle émet des photons à énergie négative.
- Explication de la nature des composants invisibles de l'univers : antiprotons, antineutrons, antielectrons, antihydrogène et antihélium de masse négative. Ces éléments constituent l'antimatière primordiale, échappant à l'observation car ils émettent des photons à énergie négative.
- **Conjecture confirmée récemment en septembre 2023 [5]** : L'antimatière C-symétrique (symétrie de charge), développée en laboratoire et émettant des photons d'énergie positive, est gravitationnellement poussée vers le bas tout comme la matière ordinaire.
- Le modèle offre sa propre interprétation des fluctuations du Fond Diffus Cosmologique (CMB) en les attribuant à la réponse de la matière ordinaire de masse positive aux fluctuations de densité dans les cellules de l'univers adjacentes peuplées d'une distribution de matière de masse négative. Cette situation est liée à l'instabilité gravitationnelle qui se manifeste au sein de ces cellules. L'analyse de ces fluctuations sert de moyen pour évaluer le rapport entre les facteurs d'échelle des deux types de matière. On observe que le rapport $\frac{a(+)}{a(-)}$ est de l'ordre de 100. Par conséquent, on peut en déduire que le rapport $\frac{c(-)}{c(+)}$ est de l'ordre de 10 ([74]). Cela implique que l'effet global serait de réduire le temps requis pour les voyages interstellaires par un facteur mille pour les objets qui réussissent à inverser leur masse, leur permettant ainsi de se déplacer le long des géodésiques décrites par la métrique $h_{\mu\nu}$ de la deuxième équation de champ 3.3.36, comme nous l'étudierons dans la section suivante.

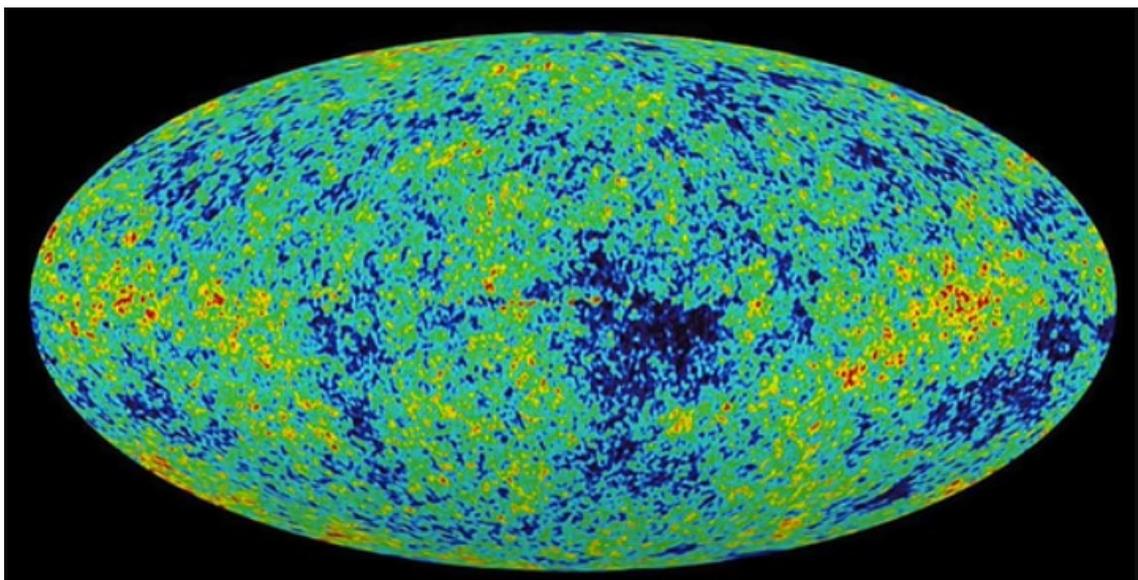


FIGURE 3.9 – Fond Diffus Cosmologique (Source : Wikipedia)

- Décalage gravitationnel vers le rouge de 3 déduit des deux premières images d'objets supermassifs situés aux centres des galaxies M87 et de la Voie lactée (Voir l'étude menée dans la section 8).
- Il n'y a actuellement pas de réponse à la question : "*Qu'y avait-il avant le Big Bang ?*" Selon le Modèle Cosmologique Janus, une structure topologique de l'univers, "*interagissant avec son homologue antichrone*", élimine cette question en invalidant le sens de l'adverbe "*avant*". En effet, comme nous le verrons au chapitre 7, la flèche du temps s'inverse au moment du Big Bang.

3.3 Le Répulseur du Dipôle

3.3.1 Introduction

En 2017, Yehudi Hoffman, B. Tully, H. Courtois et D. Pomarède ont publié la première carte très détaillée de l'univers [47]. Cette carte était basée non seulement sur les positions des galaxies, mais intégrait également leur champ de vitesse en soustrayant l'influence de l'expansion de Hubble aux mesures brutes de leur décalage vers le rouge. Les résultats étaient incroyablement impressionnants et sont considérés comme l'une des découvertes observationnelles les plus importantes en cosmologie aujourd'hui, comparable en importance à la découverte d'Edwin Hubble il y a un siècle. Avant cette étude, on savait que certaines galaxies présentaient des mouvements convergents vers une région appelée le Grand Attracteur. L'analyse de 2017 a révélé l'influence d'une autre structure, plus grande, située au-delà du Grand Attracteur, nommée l'Attracteur de Shapley. Cependant, la découverte la plus remarquable a été l'identification d'une région presque opposée à ces deux formations, où aucune galaxie n'a été détectée. À la place, il y avait un vide significatif entouré de galaxies voisines exhibant un mouvement loin de cette région, formant un motif de "*fuite*" centré sur ce vide. Initialement appelé le Répulseur du Dipôle, il a été ensuite nommé l'Attracteur Dipolaire lorsque l'on a compris qu'il était lié aux formations attractives. Comprendre ce phénomène, qui ne peut pas être attribué à des artefacts de mesure, nécessite sans aucun doute des progrès significatifs dans notre compréhension de la dynamique cosmique.

3.3.2 Quelques Tentatives d'Interprétation

Quatre ans après la découverte initiale, il y a eu peu de tentatives pour modéliser le phénomène du répulseur dipolaire. Dans son article récent [64], Neiser ne se concentre pas sur cette question, mais propose plutôt des hypothèses sur la nature du Big Bang, du vide quantique et de l'origine de l'univers. Neiser spéculé que l'antimatière pourrait avoir un effet gravitationnel répulsif, conduisant à la formation d'étoiles neutrinos et d'étoiles antineutrinos qui se repoussent mutuellement. Des aspects similaires de répulsion de l'antimatière primordiale sont mentionnés par Benoit-Lévy et al. en 2012 ([8]), mais sans justification supplémentaire. Heald, dans son article [45], évoque la situation de Laniakea, qui est poussée par le Répulseur du Dipôle et attirée par l'Attracteur de Shapley. Encore une fois, l'idée d'une répulsion entre la matière et l'antimatière est suggérée comme une explication possible de la structure à grande échelle de l'univers et de l'organisation des vides. Cependant, aucun modèle concret n'est donné pour l'objet central dans le grand vide, et l'absence de lumière émise reste inexplicée. En 2018, Hoffman et al. utilisent des simulations numériques pour reconstruire une distribution de matière noire conforme aux données observationnelles ([46]). Ils suggèrent l'existence d'un biais (ou écart) dans la distribution de matière noire par rapport à la distribution de luminosité des galaxies. Or les observations ont révélé que l'expansion de l'univers s'accélère, ce qui indique la présence d'une composante avec une pression négative ([69], [84], [89]). Un modèle proposé pour expliquer ce phénomène suggère l'existence de masses négatives pouvant contribuer à ces effets antigravitationnels, combinant les influences répulsives

de la matière noire et de l'énergie noire sur les composants de masse positive. Cette hypothèse est au centre des travaux correspondant aux références [73] [75] [76] [79] [80] [78] [77].

3.3.3 Interprétation par les Lacunes de la Matière Noire

Étudions la possibilité qu'un vide de matière noire puisse produire l'effet répulsif observé. Nous pouvons commencer par considérer un vide sphérique au sein d'une distribution uniforme de matière noire et utiliser l'équation de Poisson pour analyser ce système :

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi G\rho_{\text{dm}} \quad (3.3.1)$$

Cette équation est linéaire et décrit le potentiel gravitationnel en fonction de la densité. En superposant deux distributions de densité ρ_1 et ρ_2 , le potentiel gravitationnel résultant est la somme des potentiels associés à ces deux distributions : $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$.

En considérant une distribution de densité uniforme $\rho_{\text{dm}}^{\text{unif}}$, nous obtenons un potentiel Ψ_1 , qui est la solution de l'équation de Poisson 3.3.1 :

$$\Psi_1 = \frac{4\pi G\rho_{\text{dm}}^{\text{unif}}r^2}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}_1 = -\frac{8\pi G\rho_{\text{dm}}^{\text{unif}}}{3}\vec{r} \quad (3.3.2)$$

Maintenant, en introduisant un volume avec une densité opposée égale à $-\rho_{\text{dm}}^{\text{unif}}$, nous créons un potentiel Ψ_2 , qui est la solution de l'équation de Poisson suivante :

$$\frac{d^2\Psi_2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi_2}{dr} = -4\pi G\rho_{\text{dm}}^{\text{unif}} \quad (3.3.3)$$

Cette solution est :

$$\Psi_2 = -\frac{4\pi G\rho_{\text{dm}}^{\text{unif}}r^2}{3}, \quad \vec{g}_2 = \frac{8\pi G\rho_{\text{dm}}^{\text{unif}}}{3}\vec{r} \quad (3.3.4)$$

Ainsi, nous obtenons le même champ gravitationnel mais avec un signe opposé. Il est donc répulsif et proportionnel à la distance par rapport au centre de la sphère.

Ensuite, en calculant les potentiels gravitationnels associés à ces deux distributions, nous pouvons observer que le potentiel gravitationnel résultant est nul à l'intérieur du vide. En d'autres termes, la force gravitationnelle exercée par la distribution uniforme de matière noire est exactement équilibrée par la force gravitationnelle exercée par la densité opposée créant le vide :

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \quad (3.3.5)$$

Cependant, quelle que soit la position choisie comme origine des coordonnées, le champ gravitationnel reste non nul à l'intérieur du vide. Cela signifie que la force gravitationnelle n'est pas parfaitement équilibrée, ce qui semble contradictoire avec l'idée d'un vide créant un champ gravitationnel répulsif.

Pour résoudre ce paradoxe, l'équation de Poisson doit être considérée comme la version linéarisée de l'équation d'Einstein dans une situation stationnaire, qui définit le potentiel gravitationnel en termes d'une perturbation de la métrique de Lorentz :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} \quad (3.3.6)$$

Le calcul classique donne pour la densité propre ρ_0 ([1]) :

$$\varepsilon \sum_{i=0}^3 \gamma_{00|i|i} = -\chi\rho_0 \quad (3.3.7)$$

NB : Dans le contexte de la limite de champ faible étudiée dans la Section 2.3.7, l'équation 3.3.7 relie les dérivées secondes spatiales de la composante temporelle γ_{00} du tenseur métrique aux sources gravitationnelles, représentées par la densité locale de masse-énergie ρ_0 . Cela nous aide à comprendre comment la courbure de l'espace-temps réagit à la distribution de masse-énergie, tout en maintenant une relation précise entre ces deux aspects.

Ainsi, le potentiel gravitationnel est défini comme 2.3.112 par :

$$\Psi = -\frac{c^2}{2}\varepsilon\gamma_{00} \quad (3.3.8)$$

Ensuite, 3.3.7 peut être identifié à l'équation de Poisson. Cependant, cette approche ne peut pas être appliquée à une distribution uniforme infinie de matière noire. La conclusion est qu'il est tout simplement impossible de définir un potentiel gravitationnel au sein d'une distribution uniforme de matière, car l'instabilité gravitationnelle tend à conduire à la formation de clusters, pas de vides, et il n'existe aucun cadre clair pour la formation de tels vides.

3.3.4 Interprétation par le Modèle Cosmologique Janus

Considérons maintenant l'interaction entre deux entités : la matière ordinaire à masse positive interagissant avec une masse négative à travers des effets gravitationnels. Ce modèle impliquant une masse négative tient compte de l'influence à la fois de la matière noire et de l'énergie noire.

Nous pouvons décrire ce système de deux entités avec des métriques respectives $g_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$. Soient G et H les scalaires de Ricci correspondants. Nous considérons alors l'action à deux couches suivantes² :

$$A = \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{1}{2\Gamma(g)} G + S_{(g,g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} H + S_{(h,h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x \quad (3.3.9)$$

2. L'intégration sur \mathcal{E} en utilisant l'élément d^4x est une méthode pour calculer l'action totale dans l'espace-temps bimétrique, reflétant la nature quadri-dimensionnelle de cet univers bimétrique. Cela implique que l'on considère l'ensemble de l'espace-temps comme domaine d'intégration, intégrant les contributions de chaque point à l'action. Le terme d^4x représente un élément infinitésimal d'hypervolume de cet espace-temps bimétrique, servant à "mesurer" chaque segment lors de l'intégration. Il s'agit donc d'une intégrale multiple de volume effectuée sur les quatre dimensions de l'espace-temps, cumulant les contributions à l'action totale de chaque segment de volume quadri-dimensionnel, correspondant à chaque métrique.

Les termes $S_{(g,g)}$ et $S_{(h,h)}$ donneront les termes source liés aux populations des deux entités, tandis que les termes $S_{(h,g)}$ et $S_{(g,h)}$ généreront les tenseurs d'interaction. $\Gamma^{(g)}$ et $\Gamma^{(h)}$ sont les constantes gravitationnelles d'Einstein pour chaque entité. g et h sont les déterminants des métriques $g_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$. Pour $\kappa = \pm 1$, nous appliquons le principe de moindre action. La dérivation lagrangienne de cette action nous donne :

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta A \\
 &= \int_{\mathcal{E}} \delta \left(\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} G + S_{(g,g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\mathcal{E}} \delta \left(\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} H + S_{(h,h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x \\
 &= \int_{\mathcal{E}} \delta \left[\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x \\
 &\quad + \int_{\mathcal{E}} \delta \left[\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \right] \delta h^{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^4x
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Pour toute variation $\delta g^{\mu\nu}$ et $\delta h^{\mu\nu}$, nous obtenons localement :

$$\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \tag{3.3.11}$$

$$\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = 0 \tag{3.3.12}$$

Introduisons alors les tenseurs suivants :

$$T_{\mu\nu}^{(g,g)} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(g,g)} \tag{3.3.13}$$

$$T_{\mu\nu}^{(h,h)} = -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(h,h)} \tag{3.3.14}$$

$$T_{\mu\nu}^{(h,g)} = -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.3.15}$$

$$T_{\mu\nu}^{(g,h)} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \tag{3.3.16}$$

En effet, en relativité générale, la dérivée covariante est une manière de généraliser la notion de dérivée partielle aux espaces courbes. Contrairement à une dérivée partielle ordinaire, la dérivée covariante tient compte de la courbure de l'espace-temps.

Ensuite, pour un tenseur $A_{\nu\sigma}^\rho$, sa dérivée covariante le long d'un indice μ est donnée par l'expression :

$$\nabla_\mu A_{\nu\sigma}^\rho = \partial_\mu A_{\nu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda A_{\nu\lambda}^\rho \tag{3.3.17}$$

Ainsi, nous pouvons déduire les deux expressions suivantes :

$$\nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \quad (3.3.18)$$

$$\nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \quad (3.3.19)$$

NB :

- 3.3.19 est obtenue à partir de 3.3.18 en échangeant simplement μ et ν .
- Le terme $\partial_{\mu}A_{\nu\sigma}^{\rho}$ est la dérivée partielle ordinaire du tenseur. Si l'espace-temps était plat (comme en physique newtonienne), cela suffirait à décrire la variation du tenseur.
- Les termes avec les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}$, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ et $\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}$ représentent la correction due à la connexion de l'espace-temps, qui tient compte de sa courbure. En effet, dans l'espace courbe, la connexion (représentée par les symboles de Christoffel Γ) introduit une correction. Cette correction est nécessaire car les bases de l'espace tangent (l'espace dans lequel vit le tenseur) changent d'un point de l'espace-temps à un autre. Ainsi, $\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}A_{\nu\sigma}^{\lambda}$ est le terme qui corrige le changement de la composante $A_{\nu\sigma}^{\lambda}$ lorsque l'on se déplace dans la direction μ pour l'indice supérieur ρ . $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda\sigma}^{\rho}$ et $\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}A_{\nu\lambda}^{\rho}$ sont des termes qui soustraient la contribution due au changement des indices inférieurs ν et σ . Ces termes garantissent que la dérivée covariante respecte les règles de transformation des tenseurs.

En résumé, la dérivée covariante ∇_{μ} d'un tenseur est une combinaison de sa dérivée partielle ordinaire et de termes qui compensent les changements de géométrie de l'espace-temps. Elle est construite de manière à ce que la dérivée du tenseur soit elle-même un tenseur, ce qui n'est pas le cas pour la dérivée partielle ordinaire.

Ensuite, le tenseur de Riemann est lié aux symboles de Christoffel par l'équation suivante :

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (3.3.20)$$

NB : Le tenseur de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$ est une quantité mathématique en relativité générale qui décrit la courbure intrinsèque de l'espace-temps. Il est défini comme la différence entre les dérivées partielles des symboles de Christoffel et la somme des produits des symboles de Christoffel eux-mêmes. Le terme $\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}$ est la dérivée partielle du symbole de Christoffel $\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}$ par rapport à la coordonnée x^{μ} . Ce terme mesure comment le symbole de Christoffel varie en se déplaçant dans la direction μ . Le terme $\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$ est similaire au premier terme, mais avec la dérivée partielle prise dans une direction différente, x^{ν} . Les termes $\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}$ et $\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}$ décrivent le produit de deux symboles de Christoffel qui représente l'interaction entre deux connexions d'espace-temps. Il mesure comment la courbure dans une direction influence la courbure dans une autre direction.

Ensuite, nous pouvons calculer la variation de ce tenseur :

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (3.3.21)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \quad (3.3.22)$$

En contractant les indices ρ et σ dans la relation précédente en utilisant la convention de sommation d'Einstein, qui stipule qu'un indice répété implique une sommation implicite sur cet indice, nous pouvons exprimer la variation du tenseur de courbure de Ricci qui satisfait l'identité de Palatini ([100], [67]) :

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R^\rho_{\sigma\rho\nu} = \nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\rho\sigma}) \quad (3.3.23)$$

NB : En relativité générale, la géométrie de l'espace-temps est décrite par une quantité appelée le tenseur métrique, noté $g_{\mu\nu}$. Ce tenseur contient toutes les informations sur les distances et les angles dans l'espace-temps.

Le scalaire de Ricci, noté R , est une mesure de la courbure de l'espace-temps en un point donné. Il est calculé en additionnant (ou en contractant) les composantes du tenseur de Ricci $R_{\sigma\nu}$ avec le tenseur métrique $g^{\sigma\nu}$. Mathématiquement, c'est comme si vous multipliez les matrices du tenseur de Ricci et du tenseur métrique, puis ajoutez les termes le long de la diagonale.

De plus, nous devons avoir la dérivée covariante du tenseur métrique égale à zéro³. En d'autres termes, lorsque vous vous déplacez à travers l'espace-temps, la façon dont vous mesurez les distances et les angles ne change pas. C'est une propriété fondamentale de l'espace-temps en relativité générale qui indique que la géométrie locale ne change pas lorsque vous vous déplacez, quelle que soit la courbure globale.

En résumé, le scalaire de Ricci R nous donne une idée de la courbure de l'espace-temps en un point, et le fait que $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$ garantit que la forme de l'espace-temps reste cohérente lorsque nous nous déplaçons, quelle que soit la courbure globale⁴.

Nous pouvons donc en déduire :

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} \delta R_{\sigma\nu} \\ &= R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu} (\nabla_\rho (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\rho_{\rho\sigma})) \\ &= R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\rho (g^{\sigma\nu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) - g^{\sigma\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\sigma} \\ &= R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\rho (g^{\sigma\nu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - g^{\sigma\rho} \delta \Gamma^\mu_{\mu\sigma}) \\ &= R_{\sigma\nu} \delta g^{\sigma\nu} + \nabla_\rho B^\rho \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

NB : Pour le calcul ci-dessus, nous devons tenir compte de deux règles :

- Les propriétés de la dérivée covariante et la règle de Leibniz (la règle du produit de la dérivation). La règle de Leibniz pour la dérivée covariante est similaire à celle de la dérivée ordinaire et s'écrit comme suit :

$$\nabla_\rho (AB) = (\nabla_\rho A)B + A(\nabla_\rho B)$$

où A et B peuvent être des champs scalaires, vectoriels ou tensoriels.

3. $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$

4. Cette cohérence est assurée par la compatibilité de la métrique avec la connexion de Levi-Civita, qui garantit que des concepts géométriques tels que les longueurs et les angles restent constants lorsqu'ils sont transportés à travers l'espace-temps.

— Comme noté précédemment, les indices répétés sont appelés indices *silencieux* ou *muets* selon la convention de sommation d'Einstein. En effet, il est utile de rappeler que lorsque l'indice d'une variable apparaît deux fois dans un terme, une fois en position supérieure et une fois en position inférieure, cela implique une sommation sur toutes les valeurs possibles que l'indice peut prendre. Par exemple, $A^\mu B_\mu$ implique $\sum_\mu A^\mu B_\mu$. Considérons les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$ et $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$. Dans ces expressions, les indices μ et ρ sont des exemples d'indices muets selon la convention de sommation d'Einstein. Cela signifie que l'expression $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$, où la somme est effectuée sur toutes les valeurs possibles de μ , est identique à $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$, où la somme est effectuée sur toutes les valeurs possibles de ρ . Ainsi, nous pouvons appliquer les indices de sommation $(\rho, \nu) \rightarrow (\mu, \rho)$ dans le dernier terme.

En calculant de deux manières différentes, nous obtenons :

$$\nabla_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) = \nabla_\mu(\sqrt{|g|})B^\mu + \sqrt{|g|}\nabla_\mu(\delta B^\mu) = \sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu + 0 = \sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu \quad (3.3.25)$$

$$\nabla_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) + \Gamma_{\mu\nu}^\mu\sqrt{|g|}\delta B^\nu = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) + 0 = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) \quad (3.3.26)$$

NB : De manière similaire, la dérivée du déterminant du tenseur métrique, représentée par $\sqrt{|g|}$, est également nulle lorsqu'elle est calculée de manière covariante⁵. Cette dernière propriété simplifie l'expression des intégrales de volume et est fondamentale pour l'application du théorème de la divergence dans l'espace-temps courbe.

Nous pouvons ainsi en déduire que :

$$\sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu = \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu) \quad (3.3.27)$$

Considérons maintenant la contribution de $\sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu$ dans l'action. Soit n^μ un vecteur unitaire normal à $\partial\mathcal{E}$, $\varepsilon = n^\mu n_\mu$ et y^a représentant des coordonnées adaptées à la frontière $\partial\mathcal{E}$, et h_{ab} la métrique induite par g_{ab} sur la frontière. Nous avons $|\varepsilon| = 1$, et $\sqrt{|h|}d^3y$ est une forme volumique de dimension $(n - 1)$ sur la frontière, avec $h = \det(h_{ab})$. Par le théorème de Stokes, nous avons :

$$\int_{\mathcal{E}} \sqrt{|g|}\nabla_\mu\delta B^\mu\sqrt{-g}d^4x = \int_{\mathcal{E}} \partial_\mu(\sqrt{|g|}\delta B^\mu)d^4x \quad (3.3.28)$$

$$= \int_{\delta\mathcal{E}} \varepsilon\delta B^\mu n_\mu\sqrt{|h|}d^3y \quad (3.3.29)$$

Nous supposons que la métrique ne varie pas à la frontière (ou qu'il n'y a pas de frontière). Dans ce cas, le terme $\nabla_\mu\delta B^\mu\sqrt{-g}$ ne contribue pas à l'action, donc nous obtenons :

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\rho B^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} \approx R_{\mu\nu} \quad (3.3.30)$$

Or, d'après le corollaire avec $a = \frac{1}{2}$, nous avons :

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (3.3.31)$$

5. $\nabla_\mu\sqrt{|g|} = 0$

Ainsi, nous pouvons déduire :

$$\frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (3.3.32)$$

NB : Pour les calculs ci-dessus, nous devons expliquer deux choses :

- La variation du déterminant du tenseur métrique, notée δg , est liée à la variation du tenseur métrique lui-même, $\delta g_{\mu\nu}$, à travers la relation $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$, où g est le déterminant du tenseur métrique et $g^{\mu\nu}$ est son inverse. Cette relation découle de la propriété mathématique des déterminants, où la dérivée d'un déterminant peut être exprimée comme le déterminant multiplié par la trace du produit de l'inverse de la matrice et de la dérivée de la matrice. Dans le cas d'une petite variation, la variation de la racine carrée du déterminant négatif du tenseur métrique, $\delta \sqrt{-g}$, est donnée par $\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$. Cette formule est essentielle pour dériver les équations de champ d'Einstein à partir de l'action d'Einstein-Hilbert, car elle permet l'intégration de l'action sur la variété spatiale-temporelle à quatre dimensions.
- Dans notre étude, nous utilisons le théorème de Stokes pour simplifier un calcul fondamental. Ce théorème établit une relation intéressante entre l'intégrale d'une dérivée d'un champ vectoriel sur une région tridimensionnelle et l'intégrale du même champ vectoriel le long de la frontière de cette région.

Considérons un exemple simple : imaginons une surface fermée dans l'espace (comme la surface d'une sphère). Si nous voulons calculer quelque chose à l'intérieur de cette surface (par exemple, la somme des valeurs d'un champ), le théorème de Stokes nous permet de le faire en examinant simplement ce qui se passe sur la surface elle-même.

L'équation (3.3.28) que nous avons présentée dans notre calcul suit cette idée. Elle nous dit que l'intégrale de la dérivée d'un champ ($\nabla_\mu \delta B^\mu$) sur une région quadridimensionnelle (\mathcal{E}) peut être équivalente à l'intégrale de la divergence d'un autre champ ($\sqrt{|g|} \delta B^\mu$) sur la même région (\mathcal{E}). Cette équivalence est réalisée à travers la métrique et un élément de volume quadridimensionnel (d^4x).

Ensuite, l'équation (3.3.29) simplifie davantage l'expression en l'amenant à la frontière de la région ($\delta \mathcal{E}$). Elle nous montre que cette équivalence peut être exprimée comme une intégrale le long de la frontière ($\delta \mathcal{E}$), en utilisant des vecteurs normaux (n_μ) à cette frontière et la métrique induite sur celle-ci ($\sqrt{|h|} d^3y$). Autrement dit, cette équation nous permet de comprendre ce qui se passe à la surface de notre région sans avoir à calculer ce qui se passe à l'intérieur.

En résumé, le théorème de Stokes nous permet de rationaliser nos calculs en nous montrant comment les phénomènes à l'intérieur d'une région

peuvent être compris en examinant simplement ce qui se passe à la frontière de cette région. Cette astuce mathématique est essentielle pour résoudre ces problèmes complexes.

Nous obtenons alors à partir des équations 3.3.15 et 3.3.16 :

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(h,g)} \quad (3.3.33)$$

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(g,h)} \quad (3.3.34)$$

Introduites dans 3.3.11 et 3.3.12, en tenant compte de 3.3.30, nous pouvons ainsi déduire les équations de champ couplées de Jean-Pierre Petit décrivant le système des deux entités :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right) \quad (3.3.35)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = \kappa \Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right) \quad (3.3.36)$$

Où $T_{\mu\nu}^{(h,g)}$ et $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$ sont les tenseurs d'interaction du système des deux entités correspondant à la "géométrie induite", c'est-à-dire la manière dont chaque distribution de matière sur une couche de l'univers contribue à la géométrie de l'autre⁶. Ce système doit obéir aux conditions de Bianchi, qui s'expriment par la relation suivante :

$$\nabla_{\mu}^{(g)} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \nabla_{\mu}^{(h)} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = 0 \quad (3.3.37)$$

Supposons que les fluides au sein des entités g et h soient parfaits, avec des densités d'énergie correspondant aux tenseurs sources suivants :

$$T_{\mu\nu}^{(g,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(h,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h)} \end{pmatrix} \quad (3.3.38)$$

Nous prendrons $\{\alpha^{(g)} > 0, \beta^{(g)} > 0\}$ et $\{\alpha^{(h)} < 0, \beta^{(h)} < 0\}$. Nous veillerons à ce que les lois d'interaction soient telles que deux particules appartenant à la même entité s'attirent, tandis qu'elles se repoussent lorsqu'elles appartiennent à des entités différentes. Introduisons leurs tenseurs d'interaction :

$$T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h,g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h,g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h,g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h,g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g,h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g,h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g,h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g,h)} \end{pmatrix} \quad (3.3.39)$$

6. Interaction entre populations de masses positives et négatives.

Pour obtenir les lois d'interaction souhaitées sous l'approximation newtonienne, nous devons choisir $\kappa = -1$. Le système d'équations devient alors :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right) = \Gamma^{(g)} (T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(h,g)}) \quad (3.3.40)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right) = -\Gamma^{(h)} (T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \phi T_{\mu\nu}^{(g,h)}) \quad (3.3.41)$$

Vérification pour un système non-stationnaire, homogène et isotrope

Si nous supposons que l'univers bimétrique, structuré par les équations de champ couplées 3.3.40 et 3.3.41, est homogène et isotrope, la métrique de Robertson-Walker devient, selon [1] :

$$(ds^{(f)})^2 = (c^{(f)})^2 dt^2 - (a^{(f)})^2 \left[\frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{(1 + k^{(f)} \frac{r^2}{4})^2} \right] \quad \text{où } f \in \{g, h\} \quad (3.3.42)$$

Notons que $a^{(f)}$ est le facteur d'échelle spatial, $k^{(f)}$, $c^{(f)}$, et $\Gamma^{(f)}$ sont respectivement l'indice de courbure, la vitesse de la lumière, et la constante d'Einstein pour chaque entité.

Si nous introduisons ces métriques dans le système d'équations 3.3.40 et 3.3.41 avec des pressions $p^{(g)} \approx 0$ et $p^{(h)} \approx 0$, nous obtenons le système classique d'équations suivant :

$$\frac{3}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \left(\frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} = -\Gamma^{(g)} \left[\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right] \quad (3.3.43)$$

$$\frac{2}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \left(\frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} = 0 \quad (3.3.44)$$

$$\frac{3}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \left(\frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(h)}}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} = \Gamma^{(h)} \left[\phi \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right] \quad (3.3.45)$$

$$\frac{2}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \left(\frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(h)}}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} = 0 \quad (3.3.46)$$

En appliquant les méthodes mathématiques classiques de [1], les conditions de compatibilité des équations 3.3.43, 3.3.44, 3.3.45 et 3.3.46 donnent :

$$3 \frac{da^{(g)}}{a^{(g)}} + \frac{d \left[\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]}{\left[\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]} = 0 \quad (3.3.47)$$

$$3 \frac{da^{(h)}}{a^{(h)}} + \frac{d \left[\phi \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]}{\left[\phi \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]} = 0 \quad (3.3.48)$$

Ainsi, l'énergie (et la masse) est conservée pour un univers de poussière :

$$E = \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 (a^{(g)})^3 + \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 (a^{(h)})^3 \quad (3.3.49)$$

Si nous avons :

$$\Phi = \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}} \right)^3, \quad \phi = \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}} \right)^3, \quad \phi = \Phi^{-1} \quad (3.3.50)$$

Les équations de champ couplées deviennent :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left[T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right] \quad (3.3.51)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left[T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right] \quad (3.3.52)$$

Si les deux entités sont dominées par le rayonnement. Le tenseur d'interaction en mode mixte sera :

$$T_{\mu}^{\nu(f)} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_r^{(f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_r^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_r^{(f)} \end{pmatrix} \quad (3.3.53)$$

avec

$$\begin{cases} \text{si } \rho_r^{(f)} > 0 \text{ alors } p_r^{(f)} > 0 \text{ pour } f = g \\ \text{si } \rho_r^{(f)} < 0 \text{ alors } p_r^{(f)} < 0 \text{ pour } f = h \end{cases}$$

NB :

- Dans un contexte cosmologique, le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu}^{\nu(f)}$ est utilisé pour décrire la distribution et l'interaction de la matière et de l'énergie dans l'univers. Pour un champ spécifique f , la composante temporelle $T_0^{0(f)}$ représente la densité d'énergie, qui est un déterminant principal de la courbure de l'espace-temps. Les composantes spatiales $T_i^{i(f)}$, d'autre part, représentent la pression exercée dans les directions spatiales, influençant également la structure de l'espace-temps. Dans un modèle bimétrique, où deux champs distincts, c'est-à-dire un pour chaque couche de l'univers, sont considérés, les conditions associées décrivent les relations entre les densités d'énergie et les pressions pour chaque champ, reflétant comment ces entités interagissent et influencent collectivement la dynamique cosmique.
- Le tenseur énergie-impulsion est exprimé sous une forme diagonale lorsqu'on considère l'univers comme isotrope et homogène, signifiant que ses propriétés physiques sont indépendantes de la direction et de la localisation. Cette hypothèse, fondamentale au modèle cosmologique standard, est connue sous le nom de principe cosmologique (Section 2.2.3). L'isotropie implique que l'univers semble identique dans toutes les directions ; il n'y a pas de direction privilégiée où la distribution de matière ou d'énergie différerait. L'homogénéité

signifie que, à grande échelle, chaque région de l'univers ressemble à toute autre région. Par conséquent, les flux transverses d'énergie et d'impulsion, qui seraient représentés par des termes non diagonaux dans le tenseur, sont absents puisqu'il n'y a pas de mouvement privilégié ou de flux d'énergie dans une direction spécifique. Seules les densités d'énergie et les pressions dans les directions spatiales, qui sont uniformes et ne varient pas avec la direction, se manifestent dans la matrice du tenseur énergie-impulsion, expliquant sa forme diagonale.

- Il est important de rappeler que la *géométrie gémellaire* du modèle Janus est décrite par deux équations de champs comprenant chacune un tenseur de couplage en mode mixte $T_\mu^{\nu(g,h)}$ et $T_\mu^{\nu(h,g)}$ au second membre, pondéré par la racine carrée du rapport des déterminants des deux métriques⁷. Nous pouvons alors exprimer les expressions 3.3.51 et 3.3.52 sous forme mixte de la manière suivante :

$$R_\mu^{\nu(g)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu G = \Gamma^{(g)} \left[T_\mu^{\nu(g,g)} + \sqrt{\frac{h}{g}} T_\mu^{\nu(h,g)} \right] \quad (3.3.54)$$

$$R_\mu^{\nu(h)} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu H = -\Gamma^{(h)} \left[T_\mu^{\nu(h,h)} + \sqrt{\frac{g}{h}} T_\mu^{\nu(g,h)} \right] \quad (3.3.55)$$

Les tenseurs d'interaction $T_\mu^{\nu(g,h)}$ et $T_\mu^{\nu(h,g)}$ décrivent l'effet de lentille gravitationnelle négatif induit par les masses d'une couche de l'espace-temps sur celles de l'autre. Mais comme on ignore comment ces populations agissent exactement les unes sur les autres, il est important de souligner qu'on est libre de les définir de telle sorte que les identités de Bianchi soient satisfaites.

Par exemple, comme nous le verrons plus tard dans l'étude du régime stationnaire (Section 3.3.4), dans le cas où les masses positives sont prédominantes, les équations de champ précédentes se réduisent en mode mixte à 3.3.96 et 3.3.97 (Section 3.3.6). Ainsi, nous pouvons définir le tenseur énergie-impulsion $T_\mu^{\nu(g,g)}$ ⁸ et le tenseur d'interaction $T_\mu^{\nu(g,h)}$ de la manière suivante :

$$T_\mu^{\nu(g,g)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} \end{pmatrix} \quad (3.3.56)$$

$$T_\mu^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^{(g)}}{c^{(g)2}} \end{pmatrix} \quad (3.3.57)$$

7. En effectuant le calcul élémentaire des déterminants des métriques 3.3.42 pour chaque espèce, en utilisant les mêmes indices de courbure $k^{(g)} = k^{(h)}$ et les mêmes vitesses de la lumière $c^{(g)} = c^{(h)}$, nous pouvons en déduire que les coefficients ϕ et Φ de 3.3.50 peuvent être respectivement identifiés avec le facteur $\sqrt{\frac{g}{h}}$ et son inverse.

8. (13.1) page 425 de [1]

En appliquant l'approximation newtonienne⁹ aux équations différentielles de Tolman-Oppenheimer-Volkoff 3.3.180 et 3.3.223 qui en résultent, nous retrouvons l'équation d'Euler $\frac{dp}{dr}$ traduisant l'équilibre hydrostatique¹⁰ approximativement égale à $-\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$ pour chaque équation. Nous obtenons ainsi la pression $\frac{p'}{c^2}$ comme étant approximativement égale à $-\frac{\rho m}{r^2}$ pour chaque équation (Sections 3.3.6 & Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles). Les deux équations satisfont donc asymptotiquement les identités de Bianchi dans la limite newtonienne.

- Du point de vue d'un physicien, l'attention se porte principalement sur les phénomènes observables ou mesurables. Or, dans notre univers "*visible*" constitué de galaxies entraînant un cortège considérable de matière et de gaz, la densité de masse négative est négligeable selon le principe d'interaction du modèle Janus où les masses de signes opposés s'excluent mutuellement (Figure 3.12). Ainsi, la modélisation du comportement de la matière ordinaire (y compris les étoiles à neutron) sous l'effet de la gravitation s'aligne avec les solutions de l'équation de champ d'Einstein, sans nécessiter la prise en compte des tenseurs d'interaction, jugés négligeables. En effet, ils ne deviennent significatifs que dans un espace-temps dominés par les masses négatives tel que le Répulseur du Dipôle. La densité de masse positive étant à son tour négligeable, les équations 3.3.54 et 3.3.55 se réduisent à :

$$R_{\mu}^{\nu(g)} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}G = \Gamma^{(g)}\sqrt{\frac{h}{g}}T_{\mu}^{\nu(h,g)} \quad (3.3.58)$$

$$R_{\mu}^{\nu(h)} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}H = -\Gamma^{(h)}T_{\mu}^{\nu(h,h)} \quad (3.3.59)$$

Ainsi, un physicien n'étudiera que ce qu'il pourra observer, à savoir la première équation 3.3.58, permettant par exemple de déterminer les géodésiques parcourues par les photons (d'énergie positive) sous l'effet antigravitationnel généré par un conglomérat sphéroïdal de masse négative¹¹. Nous vous renvoyons à l'étude de la Compatibilité des Équations de Champ au voisinage du Répulseur du Dipôle.

9. $4\pi r^3 p \ll mc^2$ et $\frac{2Gm}{c^2 r} \ll 1$

10. Où la pression au centre de l'étoile est équilibrée par la force gravitationnelle en fonction de la densité et de la masse

11. Ce phénomène de *lentille gravitationnelle négative* ne peut être produit par une étoile à neutrons de masse négative, puisque ce conglomérat n'est composé que d'antimatière à masse négative, pouvant constituer d'immenses proto-étoiles où la vitesse d'agitation de ces composants est négligeable devant la vitesse de la lumière dans ce milieu (voir la section Nature de l'antimatière primordiale). La forme approchée du tenseur d'interaction peut alors se réduire à l'expression suivante :

$$T_{\mu}^{\nu(h,g)} \approx \begin{pmatrix} \rho^{(h)}c^{(h)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.60)$$

A présent, en introduisant la pression radiative induite par chaque entité :

$$p_r^{(g)} = \frac{\rho_r^{(g)} (c^{(g)})^2}{3}, \quad p_r^{(h)} = \frac{\rho_r^{(h)} (c^{(h)})^2}{3} \quad (3.3.61)$$

Nous pouvons alors considérer que l'entité portée par la métrique h , appelée énergie noire et matière noire, pourrait être attribuée à des masses négatives qui, en phase radiative, obéiraient à la même équation d'état :

$$\beta^{(h)} = \frac{\alpha^{(h)}}{3} \quad (3.3.62)$$

Dans ces conditions, la relation de conservation est toujours exprimée, sous sa forme radiative, par la conservation de la somme des deux énergies, celle du gaz de photons et celle des masses négatives :

$$\rho_r^{(g)} (c^{(g)})^2 (a^{(g)})^4 + \alpha^{(h)} (a^{(h)})^4 = \text{Constante} \quad (3.3.63)$$

La solution exacte du système, pour les indices de courbure $k^{(g)} = k^{(h)} = -1$ et $\Gamma^{(f)} = -\frac{8\pi G}{c^4}$ où $f \in \{g, h\}$, devient une solution des équations suivantes :

$$a^{(g)2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} = \frac{\Gamma^{(g)}}{2} E \quad (3.3.64)$$

$$a^{(h)2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} = -\frac{\Gamma^{(h)}}{2} E \quad (3.3.65)$$

Si nous supposons que $E < 0$, alors $a^{(g)} > 0$ et $a^{(h)} < 0$. Ainsi, nous pouvons conclure que la partie visible de notre univers accélère, tandis que les espèces négatives décélèrent. Ici, nous observons l'effet des espèces négatives dominantes, qui conduit au phénomène d'accélération de l'expansion cosmique, selon le second membre de la première équation qui devient positif ([77]) :

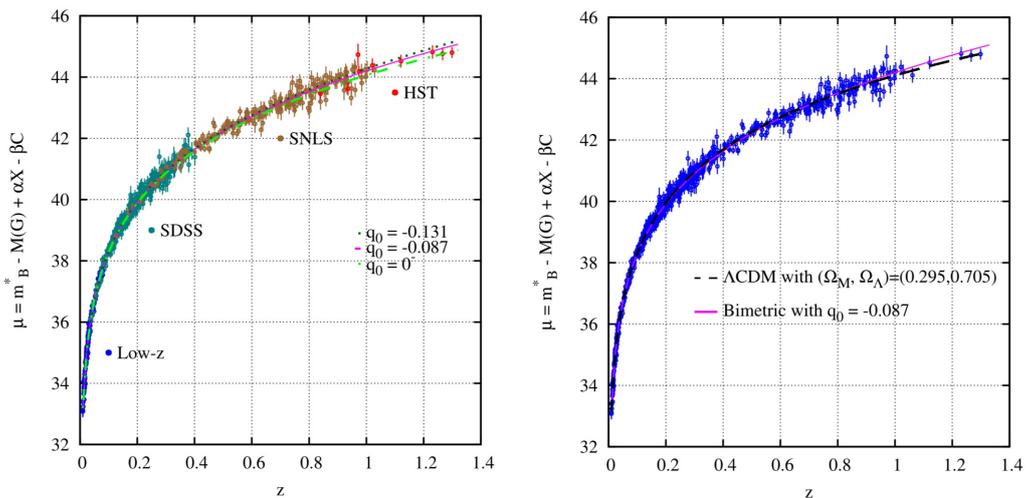


FIGURE 3.10 – Diagramme de Hubble des Deux Modèles (Décalage vers le rouge linéaire)

Ce système à deux espèces permet de consolider les effets attribués à la matière noire et l'énergie noire en une seule entité composée de masses négatives qui combine les deux actions, comme illustré par le diagramme suivant :

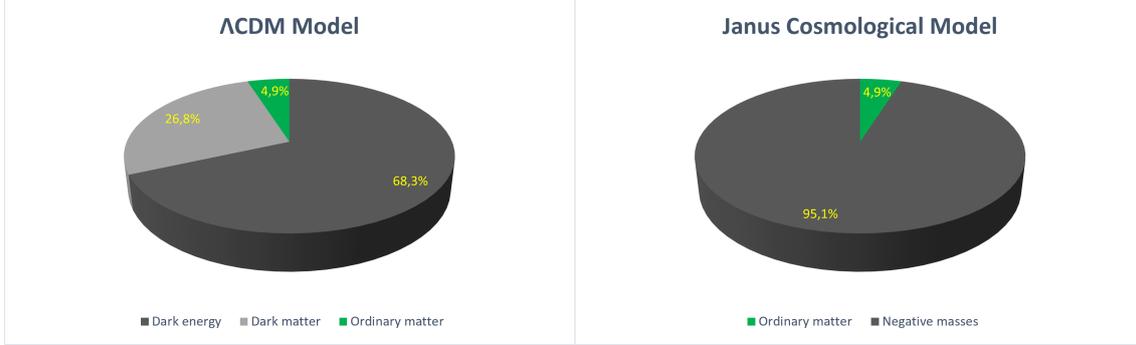


FIGURE 3.11 – Modèles Cosmologiques

Vérification locale d'un système stationnaire

Dans l'étude de l'univers, nous simplifions souvent les modèles pour les rendre plus gérables. Une simplification courante consiste à considérer une petite région de l'espace comme étant effectivement vide et isolée des vastes complexités du cosmos. Cette approche est particulièrement utile lorsque nous nous intéressons à des phénomènes se produisant sur de courtes périodes, bien plus courtes que les échelles de temps sur lesquelles l'univers lui-même change. Dans de tels cas, nous pouvons utiliser des métriques "*indépendantes du temps*", ce qui signifie que nous supposons que la structure de l'espace ne change pas avec le temps pendant notre observation.

Pour ajouter un peu de complexité, nous introduisons parfois ce que l'on appelle des "*perturbations*" au modèle. Ces perturbations sont de petites modifications de l'espace, par ailleurs simple, que nous considérons. Elles nous permettent d'étudier comment de légers changements ou perturbations pourraient affecter le système. Dans notre cas, ces perturbations sont représentées par des termes tels que $\gamma_{\mu\nu}^{(g)}$ et $\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$, qui signifient de petites déviations dans la structure géométrique de l'espace, représentant potentiellement différents aspects ou composants de l'univers.

$$g_{\mu\nu}^{(g)} = \eta_{\mu\nu}^{(g)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(g)}, \quad g_{\mu\nu}^{(h)} = \eta_{\mu\nu}^{(h)} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}^{(h)} \quad (3.3.66)$$

Pour les métriques, nous avons :

$$(ds^{(g)})^2 = (c^{(g)})^2 dt^2 - (a^{(g)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2] \quad (3.3.67)$$

$$(ds^{(h)})^2 = (c^{(h)})^2 dt^2 - (a^{(h)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2] \quad (3.3.68)$$

En cosmologie, lorsque nous parlons de "*conditions quasi stationnaires*", nous faisons référence à une situation où certains aspects de l'univers sont supposés être relativement constants sur la période que nous étudions. Plus précisément, dans ce contexte, les "*facteurs d'échelle spatiale*" de l'univers, qui décrivent comment la taille

de l'univers change au fil du temps, sont considérés comme constants. C'est une approximation utile pour étudier certains phénomènes à court terme.

Pour approfondir la physique d'un tel scénario, nous utilisons ce que l'on appelle une "*développement en série*" des équations de champ. Il s'agit d'une technique mathématique où nous décomposons des équations complexes en parties plus simples et plus gérables. Cependant, nous nous concentrons uniquement sur les parties les plus significatives - dans ce cas, nous ignorons les termes d'ordre deux et supérieur, car ils ont un impact minimal sur les résultats pour des scénarios à petite échelle ou à court terme.

Les équations simplifiées résultantes, étiquetées comme 3.3.69 et 3.3.70, décrivent le comportement des perturbations dans cet univers quasi stationnaire. Ces équations impliquent des termes comme $\varepsilon\gamma_{00}$ et $\delta\rho$, qui représentent de petits changements dans la géométrie de l'espace et la densité de la matière, respectivement.

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(g)} = -\Gamma^{(g)} \left[\delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right] \quad (3.3.69)$$

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(h)} = \Gamma^{(h)} \left[\delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 \right] \quad (3.3.70)$$

De plus, nous définissons les "*potentiels gravitationnels*" pour chaque composante de l'univers, notés $\Psi^{(g)}$ et $\Psi^{(h)}$. Ces potentiels sont liés aux changements dans la géométrie de l'espace et sont la clé pour comprendre les effets gravitationnels dans différentes régions ou composantes de l'univers (comme 2.3.114).

$$\Psi^{(g)} = \frac{(c^{(g)})^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}^{(g)}, \quad \Psi^{(h)} = \frac{(c^{(h)})^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}^{(h)} \quad (3.3.71)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi^{(g)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = -\Gamma^{(g)} \frac{(a^{(g)})^2}{2} \left[\delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right] \quad (3.3.72)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi^{(h)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = \Gamma^{(h)} \frac{(a^{(h)})^2}{2} \left[\delta\rho^{(h)} (c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 \right] \quad (3.3.73)$$

En physique, particulièrement dans l'étude de l'espace et de l'univers, comme nous l'avons vu dans cette section 2.3.9, les "*équations géodésiques*" décrivent comment les objets se déplacent sous l'influence de la gravité. En termes simples, ces équations nous indiquent la trajectoire qu'un objet empruntera lorsqu'il se déplace uniquement sous l'effet de la gravité. Par exemple, comment les planètes orbitent autour des étoiles ou comment les objets tombent sur Terre.

Dans notre scénario, nous traitons avec deux couches (ou feuillets) différentes de l'univers, chacune ayant ses propres propriétés. La première couche, que nous pouvons considérer comme l'univers de la matière ordinaire, suit un ensemble de règles.

La seconde couche de masses négatives, associée à la matière noire et à l'énergie noire, suit un autre ensemble de règles.

Les prochaines équations 3.3.74 et 3.3.75 sont la manière d'exprimer mathématiquement comment les objets se déplaceraient dans ces deux couches différentes (La couche de la matière ordinaire et celle des masses négatives respectivement). Ces équations ressemblent à l'équation de Poisson classique en physique, qui est utilisée pour décrire les champs gravitationnels. Cependant, les équations ont une particularité - elles tiennent compte de différentes "*vitesse de la lumière*" dans chaque couche. Cette modification est essentielle pour explorer des théories qui vont au-delà de notre compréhension standard de la physique.

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(g)})^2} \frac{\partial\Psi^{(g)}}{\partial\xi_\alpha} \quad (3.3.74)$$

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(h)})^2} \frac{\partial\Psi^{(h)}}{\partial\xi_\alpha} \quad (3.3.75)$$

Les lois d'interaction que nous avons choisies garantissent que les entités issues des couches structurées par les métriques g et h s'excluent mutuellement (Figure 3.12).

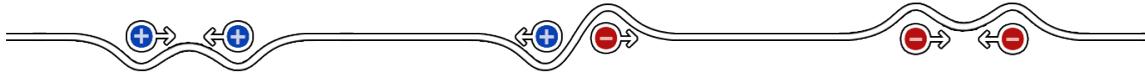


FIGURE 3.12 – Lois d'interaction entre les masses

Par conséquent, nous pouvons considérer une région où seulement l'une des deux entités est présente. En se concentrant sur le référentiel structuré par la métrique g , qui est peuplé de matière ordinaire comme dans le système solaire, le système d'équations de champ couplées se simplifie de la manière suivante :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \Gamma^{(g)}T_{\mu\nu}^{(g,g)} \quad (3.3.76)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\Gamma^{(h)}\sqrt{\frac{|g|}{|h|}}T_{\mu\nu}^{(g,h)} \quad (3.3.77)$$

La première équation 3.3.76 peut être identifiée comme étant l'équation d'Einstein sans la constante cosmologique Λ . Cette équation représente le Modèle Standard de la matière ordinaire sous l'influence de la gravitation. La deuxième équation 3.3.77 capture ce que l'on pourrait appeler "*l'effet de géométrie induite*". Elle décrit comment la géométrie de l'espace, influencée par la présence de la matière ordinaire dans une sphère de rayon r et de densité $\rho^{(g)} = \rho$, affecte les géodésiques de la couche des masses négatives. Par conséquent, nous pouvons déduire que ce modèle bimétrique, dans lequel la matière ordinaire dans une couche interagit avec des masses

négatives situées dans une seconde, s'aligne avec les tests standards de la relativité générale au niveau local. Néanmoins, il reste important de vérifier la cohérence de ce système sous des conditions stationnaires et non homogènes.

Nature de l'antimatière primordiale

Suivant les propositions de Sakharov dans [85], [86] et [88], supposons que la paire matière/antimatière dans la première couche de notre univers soit composée de quarks et d'antiquarks à énergie positive. En même temps, une paire matière/antimatière dans une seconde couche serait formée de quarks et d'antiquarks à énergie négative. Si la synthèse de la matière dans la première couche (la première paire) était plus rapide, tandis que la synthèse de l'antimatière dans la seconde couche (la seconde paire) était plus lente, cela pourrait conduire à l'hypothèse que les objets situés au centre des grands vides dans la structure à grande échelle de l'univers, comme indiqué par le phénomène du répulseur dipolaire, sont composés d'antimatière. Cette antimatière comprend des antiprotons, des antineutrons et des antielectrons à énergie négative¹². Ces derniers pourraient former des objets sphéroïdaux composés d'antihydrogène (éléments légers) aux propriétés répulsives similaires à d'immenses proto-étoiles formées pendant la phase radiative primordiale (au début de l'univers).

Le réseau lacunaire de masse positive confine cet espace de densité négative, empêchant leur fusion. Inversement, ces conglomerats de masse négative agissent comme des points d'ancrage pour ce réseau poreux dans l'univers des masses positives, assurant une stabilité globale.

En effet, les étoiles à masse positive se forment généralement à partir d'amas sphéroïdaux de gaz, chauffés à des températures élevées. Ces proto-étoiles se refroidissent progressivement, émettant principalement un rayonnement dans les spectres rouge et infrarouge. Pour se transformer en véritables étoiles, la matière et les gaz doivent subir une contraction gravitationnelle, atteignant des températures et des densités suffisamment élevées pour initier des réactions de fusion thermonucléaire. Ce processus de contraction libère de l'énergie thermique, qui est rayonnée à la surface de l'étoile sous forme électromagnétique, y compris de la lumière visible. Cette libération d'énergie est proportionnelle au carré du rayon de l'étoile. Les étoiles plus grandes ont des surfaces plus étendues et peuvent dissiper plus de chaleur. Cependant, la quantité de chaleur produite est proportionnelle au cube du rayon de l'étoile, liée à son volume. Ainsi, pour les étoiles très massives, le taux de refroidissement peut être relativement lent, et il peut s'écouler un temps considérable avant que la température n'atteigne le seuil nécessaire pour déclencher les réactions de fusion thermonucléaire qui permettent à l'étoile de briller.

Dans notre monde composé de matière ordinaire, on considère que les réactions de fusion nucléaire peuvent commencer au cœur d'une proto-étoile lorsque la température atteint une température optimale d'environ 10 millions de degrés Celsius. C'est à cette température que les noyaux d'hydrogène, qui constituent la majo-

12. C'est-à-dire des masses négatives ([95]).

rité de la matière dans la proto-étoile, acquièrent suffisamment d'énergie cinétique pour surmonter la barrière électrostatique due à leur charge positive. Lorsque cette barrière est franchie, les noyaux d'hydrogène peuvent fusionner pour former de l'hélium, libérant ainsi une quantité considérable d'énergie rayonnante et thermique. Cette température optimale permet une réaction de fusion nucléaire plus efficace, produisant l'éclat caractéristique des étoiles.

Ainsi, une proto-étoile à masse négative très massive et très chaude peut prendre beaucoup de temps à se refroidir suffisamment pour que les réactions de fusion commencent, car le processus de contraction de la proto-étoile doit générer suffisamment de chaleur pour compenser la perte de chaleur à la surface.

En conséquence, ces proto-étoiles à masse négative très massives ont des temps de refroidissement si longs qu'elles ne s'allumeront jamais (dépassant l'âge de l'univers). De ce fait, aucune galaxie, aucun élément lourd, aucune molécule ou toute autre forme de matière nécessaire au développement de la vie dans le monde négatif ne peut se former.

Simulations numériques 2D

Des simulations numériques bidimensionnelles ont été réalisées en utilisant deux ensembles de 5000 points de masse, représentant des amas de matière ordinaire (densité de population $\rho^{(g)}$) et des masses négatives (densité de population $\rho^{(h)}$).

Une asymétrie significative a été maintenue entre les deux populations, avec $|\rho^{(h)}|$ étant beaucoup plus grand que $\rho^{(g)}$. De plus, des distributions Maxwelliennes de vitesses thermiques 2D ont été appliquées aux deux ensembles, la vitesse moyenne de la distribution de masse négative étant quatre fois plus élevée que celle de la matière ordinaire.

Ces simulations ont révélé une structure lacunaire de masses négatives aux centres des grands vides dans la structure à grande échelle de l'univers. Comme les temps de Jeans varient inversement avec la racine carrée de la densité, le temps de développement pour la distribution de masse négative est plus court. Cela entraîne la formation d'un réseau régulier de conglomerats sphéroïdaux. La distribution de matière ordinaire, par conséquent, est forcée d'occuper l'espace restant, conduisant à une structure lacunaire similaire à un ensemble de bulles de savon jointives dans des simulations tridimensionnelles. Ce modèle a également été observé par Brennen en 1995 [17] (Figures 3.13 et 3.14), tel que cité par El-Ad en 1997 ([32]).

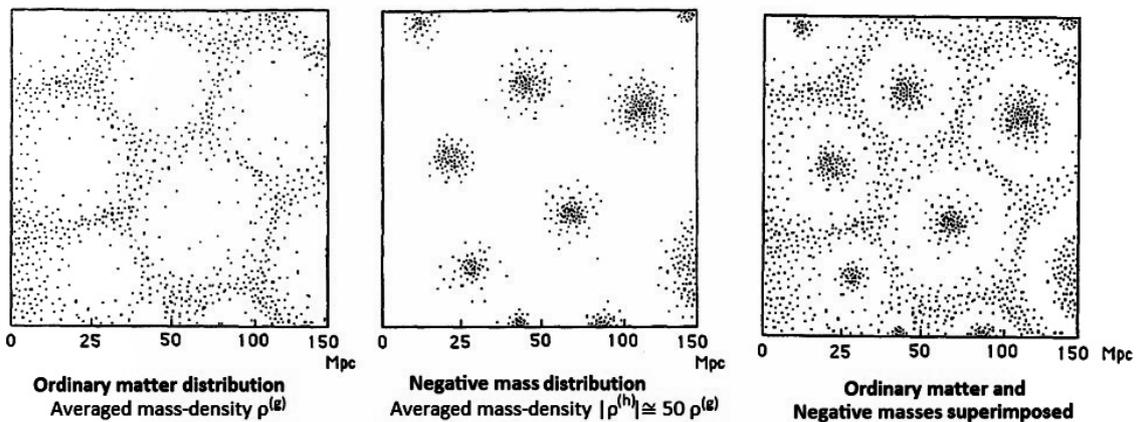


FIGURE 3.13 – Répartition de la Matière Ordinaire et des Masses Négatives lorsque $|\rho^{(h)}| \gg \rho^{(g)}$

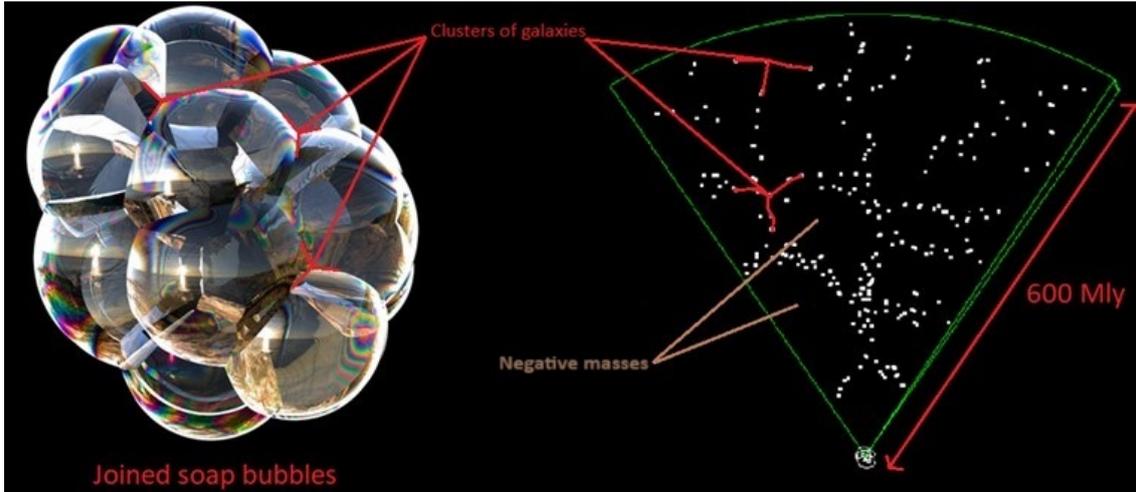


FIGURE 3.14 – Structure Lacunaire Sphéroïdale

Il est important de considérer que dans l'étude des masses négatives, nous manquons de données observationnelles à comparer avec les prédictions numériques potentielles, sauf pour les effets de géométrie induits par ce référentiel (celui des masses négatives) à travers les phénomènes de lentille gravitationnelle structurant la métrique $g_{\mu\nu}$.

Par conséquent, la pression dérivée de l'équation différentielle TOV (Tolman - Oppenheimer - Volkoff) 3.3.223 dans l'espace-temps structuré par la métrique $h_{\mu\nu}$ restera toujours hypothétique. En conséquence, il n'est pas pratique d'essayer de structurer le tenseur d'interaction $T_{\mu}^{\nu(g,h)}$ de la seconde équation de champ 3.3.97 (Section 3.3.6). En effet, nous ne pourrions jamais comparer les résultats obtenus en calculant les géodésiques de $h_{\mu\nu}$ avec des données observationnelles liées au mouvement de particules à masse négative. Au lieu de cela, nous devons travailler avec une fonction $\beta(r)$ (non liée à la pression négative) uniquement pour garantir l'existence d'une solution dans ce référentiel (3.3.102). L'aspect le plus important est de définir les tenseurs en mode mixte 3.3.56 et 3.3.57 de chaque équation de champ de telle sorte que la pression $\frac{p'}{c^2}$ traduisant l'équilibre hydrostatique soit la même pour chaque équation et satisfait donc asymptotiquement les identités de Bianchi dans la limite newtonienne.

Pour pleinement comprendre cet effet de géométrie induite, il faut se placer dans le contexte du système à deux équations de champ couplées du modèle. En effet, il est important de rappeler que cela structure une hypersurface 4D selon 2 métriques associées à 2 couches d'espace-temps distinctes. Chaque type de masse est associé à sa propre métrique, ce qui implique qu'une masse crée toujours une courbure positive dans l'espace-temps selon sa propre métrique (où la masse émet des photons d'énergie visible) et toujours une courbure négative dans la métrique conjuguée (où la masse émet des photons d'énergie invisible), comme on peut le voir sur la figure suivante 3.15.

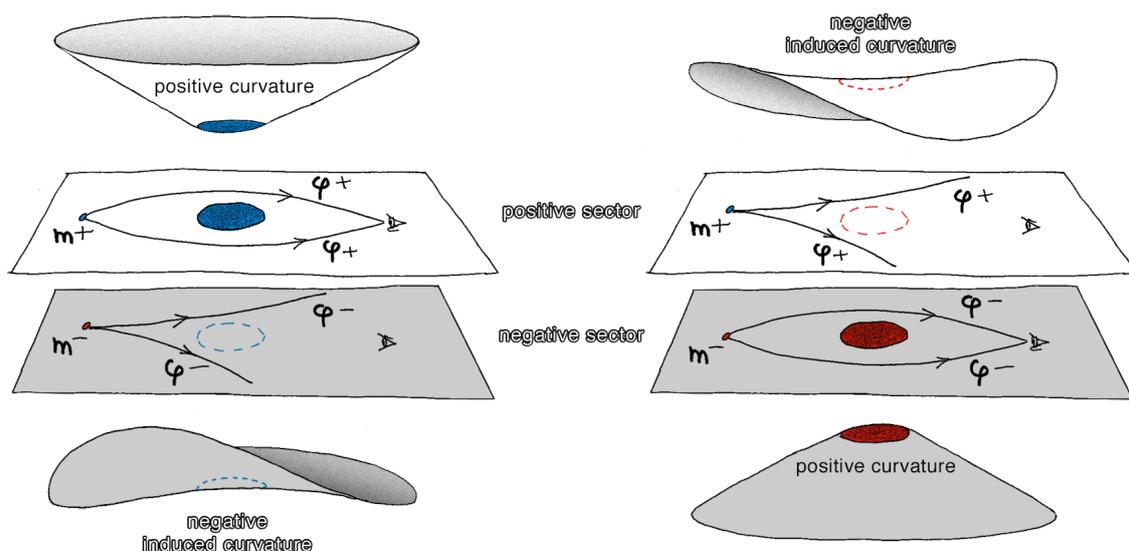


FIGURE 3.15 – Effet de géométrie induite où les photons peuvent être représentés par le symbole φ ou γ

À gauche de la figure 3.15, l'objet massif bleu appartenant à l'univers positif crée une courbure positive. Par conséquent, il produit un effet de lentille gravitationnelle positif sur l'image d'une petite masse positive m^+ , provoquant la convergence des photons d'énergie positive φ^+ autour de l'objet massif bleu. Cependant, cet objet massif induit une courbure négative dans l'univers négatif. Par conséquent, même s'il est invisible, sa masse apparente dans l'univers négatif est ressentie comme étant négative.

Inversement, à droite de la figure 3.15, l'objet massif rouge appartient à l'univers négatif. Il crée une courbure positive par rapport à son propre référentiel (et non une courbure négative). Cet objet massif induit une courbure négative qui est perçue dans notre univers, même si ses photons d'énergie sont invisibles. Par conséquent, nous concluons que sa masse apparente est négative. En effet, il produit un effet de lentille gravitationnelle négatif sur l'image d'une petite masse m^+ , provoquant la divergence des photons d'énergie positive φ^+ autour de l'objet massif négatif invisible, dont l'effet gravitationnel est toujours présent.

Nous pouvons déduire plusieurs corollaires du concept de masse négative :

- Fondamentalement, il n'y a pas de masse négative (et donc pas d'énergie négative). Du moins, la "négativité de la masse" (et la "négativité de l'énergie", car les deux sont évidemment liées) n'est pas une propriété physique intrinsèque d'une "particule de masse négative". En effet, la "négativité" ou la "positivité" de la masse n'est qu'une quantité de courbure mesurée localement dans l'espace-temps par un observateur. Le signe de cette courbure est relatif au référentiel de l'hypersurface ou de la métrique dans laquelle cette

masse est mesurée. Il s'agit, en fait, d'une masse apparente dont la présence n'est révélée que par la courbure qu'elle induit dans l'espace-temps.

En d'autres termes, toutes les particules ayant une masse dans l'univers possèdent exclusivement une masse inertielle positive, mais leur masse gravitationnelle est relative. Le signe de leur masse gravitationnelle est opposé (positif ou négatif) en fonction de la perspective adoptée : une masse déforme l'espace-temps dans sa propre métrique, induisant une certaine quantité de courbure toujours positive. Cependant, elle sera perçue comme une masse apparente dans l'univers opposé, à partir duquel un observateur percevra cette courbure comme négative. Cela est dû à la nature couplée des équations de champ et cela entraîne un effet de *courbure conjuguée*. On pourrait également le décrire comme "*la même masse induisant deux courbures opposées*".

Par exemple, la Terre, vue depuis notre référentiel, possède une masse positive. Par un processus inconnu, imaginez que vous puissiez inverser son énergie (et sa masse). La Terre (et toutes les étoiles dans le ciel) disparaîtrait car vous ne pourriez plus percevoir les photons d'énergie positive émis. Cependant, vous pouvez toujours percevoir et mesurer la courbure qu'elle continue d'induire dans notre espace-temps. En effectuant cette mesure, vous détecteriez que la Terre désormais invisible possède une masse négative.

Cependant, il n'existe pas d'univers distincts d'énergies positives et d'énergies négatives. Il s'agit simplement d'un choix arbitraire de nomenclature. Les deux sont équivalents. Par convention, nous appelons le secteur de l'univers où nous vivons, celui composé de matière à masse positive.

- L'inversion de la flèche du temps ne signifie pas que nous commençons à parcourir le temps "*à rebours*" et que nous rajeunissons. Elle se manifeste physiquement par l'inversion de l'énergie des particules. Encore une fois, cette inversion est une observation relative. En pratique, elle se traduit par un passage au secteur opposé de l'univers.
- Il est important de noter que les particules d'énergie négative (et leurs photons) ne peuvent pas être détectées par des instruments optiques car elles suivent des géodésiques de leur propre métrique $h_{\mu\nu}$, distinctes des géodésiques de notre métrique $g_{\mu\nu}$. Il existe donc deux ensembles de géodésiques qui ne se "*croisent*" jamais. Étant donné que les espèces d'énergie positive et d'énergie négative ne peuvent pas se voir et évoluent le long de deux familles distinctes de géodésiques, les deux référentiels d'espace-temps dans lesquels elles résident sont respectivement appelés le référentiel de masse positive et le référentiel de masse négative. Ainsi, ce sont deux référentiels au sein de la même hypersurface 4D, structurée par deux équations de champ couplées, et non pas une seule. Cependant, même si les masses négatives nous sont invisibles car elles n'interagissent pas électromagnétiquement avec notre secteur sans échanger de photons, elles ne révèlent leur présence que par un effet antigravitationnel, car elles induisent des courbures opposées dans notre secteur observable.
- Les masses négatives sont répandues dans l'univers, mais leurs proportions varient en fonction de la région de l'espace dans laquelle nous nous trouvons. Elles n'existent que pour contribuer à sa stabilité par le biais d'un effet

antigravitationnel.

- L'univers peut être défini par une hypersurface structurée par deux métriques qui permettent de mesurer les distances entre des points de deux manières différentes, en utilisant deux ensembles distincts de repères (trois repères spatiaux et un repère temporel). D'une manière didactique, on peut envisager cet univers comme une feuille de papier avec deux grilles de mesure différentes sur chacune de ses deux faces.

3.3.5 Perspective d'Avenir

Approche Expérimental de l'Inversion de Masse

L'approche scientifique pour comprendre un phénomène peut se résumer par la capacité à le reproduire et à le mesurer. Il est important de noter qu'il est tout à fait possible de démontrer le phénomène de l'inversion de masse en laboratoire en inversant une quantité infinitésimale de matière, à condition de pouvoir induire une perturbation significative de cette matière en produisant des paramètres électromagnétiques de l'ordre de plusieurs dizaines de millions de teslas pendant une très courte période, en utilisant par exemple des explosifs. L'Union soviétique avait déjà atteint une production de 100 millions d'ampères en comprimant un flux magnétique à l'aide d'explosifs dans les années 1950, en utilisant un générateur magnéto-cumulatif ([68]). Il serait alors possible de démontrer cette inversion de masse en mesurant les ondes gravitationnelles émises et détectées par les interféromètres laser Virgo et Ligo.

Protocole Expérimental pour l'Étude de l'Inversion de Masse via des États Métastables Nucléaires

Cette approche propose d'explorer le phénomène d'inversion de masse en laboratoire en exploitant les états métastables de noyaux atomiques spécifiques, tels que ceux du platine, de l'iridium, du cobalt et du xénon. L'objectif est de stocker de l'énergie dans ces états métastables avant de la libérer pour induire une disruption de la matière. La détection et la caractérisation de ce phénomène seraient réalisées par l'observation des ondes gravitationnelles émises, mesurées à l'aide d'interféromètres finement calibrés.

Excitation Nucléaire : La première étape du protocole nécessite l'excitation des noyaux atomiques à leurs états métastables. Les niveaux d'énergie requis pour de telles excitations sont significativement plus élevés que ceux fournis par les lasers de laboratoire standard, se situant dans la gamme des MeV (Megaélectronvolts) à GeV (Gigaélectronvolts). En conséquence, cette procédure requiert l'utilisation d'un accélérateur de particules capable de générer et de concentrer ces énergies élevées sur les noyaux atomiques ciblés.

Sélection de l'Isotope : Une sélection minutieuse de l'isotope approprié est essentielle. L'isotope choisi doit posséder un état métastable dont la demi-vie corres-

pond au laps de temps souhaité pour le stockage d'énergie. Cette demi-vie doit être suffisamment brève pour permettre une libération contrôlée de l'énergie, mais assez longue pour assurer un stockage temporaire de l'énergie injectée. La demi-vie idéale serait de l'ordre d'une fraction de seconde.

Mesure des Ondes Gravitationnelles : La détection de l'inversion de masse serait réalisée par la mesure des ondes gravitationnelles émises lors de la disruption de la matière. Cette étape implique l'utilisation d'interféromètres de haute précision, calibrés pour détecter des variations extrêmement subtiles dans le champ gravitationnel résultant de l'expérience.

Conclusion : Ce protocole expérimental propose une méthode innovante pour étudier l'inversion de masse. L'expérimentation nécessitera un équipement de pointe, notamment un accélérateur de particules, et une expertise en physique nucléaire, en optique et en mesure des ondes gravitationnelles.

Quantification de la Gravitation

Une unification de la Théorie de la Relativité avec la Mécanique Quantique ne serait possible que par la quantification de la gravitation. Cependant, il n'y a pas de concept de quantification de l'énergie dans la Théorie de la Relativité, à l'exception de l'équivalence masse-énergie car l'équation de champ d'Einstein ne décrit pas fondamentalement les particules. C'est pourquoi la théorie des cordes est la seule approche contemporaine acceptée et acceptable pour combler le fossé entre la Relativité et la Mécanique Quantique. Néanmoins, l'unification demeure problématique selon cette approche, car la Mécanique Quantique interprète les forces à travers des champs quantiques, et des particules telles que les bosons de jauge sont essentielles pour transmettre ces interactions. Par exemple, le photon est la particule fondamentale qui transmet l'interaction électromagnétique, et sa quantification est possible via l'échange de photons virtuels entre des charges électriques de signes opposés. En revanche, la seule particule émergeant de la théorie des cordes pour transmettre la gravité est le graviton, mais cette pseudo-particule n'a jamais été observée expérimentalement. En effet, le concept de gravité quantique reste spéculatif dans ce modèle. Une conjecture alternative pour quantifier la gravitation à l'échelle quantique consisterait à considérer l'interaction de masses de signes opposés, par l'intégration des masses et énergies négatives dérivées de l'équation de Dirac dans le modèle standard.

Réexaminons le contexte, depuis 2014, l'équipe a vainement tenté d'être reçus par T. Damour, souhaitant lui exposer ses travaux, sans obtenir de réponse. J-P Petit a donc entrepris, dès 2017, de mettre en ligne sur la plateforme YouTube une longue série de 40 vidéos présentant le modèle Janus ¹⁴.

Probablement indisposé par l'intérêt croissant du public pour ce modèle, T. Damour décida de mettre un point final à ce qu'il considérait comme une imposture scientifique. Il adressa donc ses arguments dans un premier article mis en ligne le même jour, le 4 janvier 2019, sur sa page de l'Institut des Hautes Études de Bures-sur-Yvette. Ce document, toujours en place, est accessible ¹⁵.

Des équations comme celles du modèle Janus doivent effectivement satisfaire des conditions mathématiques appelées « *conditions de Bianchi* ». Par exemple, les équations proposées en 2014, publiées dans la revue *Astrophysics and Space Science* [76] ¹⁶ dans l'article intitulé *Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy*, décrivant une solution instationnaire, homogène et isotrope, sont mathématiquement correctes. T. Damour, ignorant l'existence de ce premier papier, qui rend compte de l'accélération de l'expansion cosmique en l'imputant au contenu de l'univers en masse négative, se concentre sur un second article, paru la même année dans une autre revue *Modern Physics Letters A* [75], intitulé *Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe*. Dans cet article, le système d'équations est décrit de la manière suivante :

In our model, the Universe is an M_4 manifold associated not to one single metric, but to two: $g_{\mu\nu}^{(+)}$ and $g_{\mu\nu}^{(-)}$, the former linked to species of positive mass and energy, the latter to species of negative mass and energy. From these metrics, one can build the associated Ricci tensors, $R_{\mu\nu}^{(+)}$ and $R_{\mu\nu}^{(-)}$. A system of two coupled field equations was then proposed:²⁰

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi(T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)}), \quad (2a)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi(T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)}), \quad (2b)$$

where the tensors $T_{\mu\nu}^{(+)}$ and $T_{\mu\nu}^{(-)}$ represent positive and negative energy contents (and positive and negative mass contents as well). Previously, in 1957, Bondi²³

14. http://www.jp-petit.org/nouv_f/VIDEOS_JANUS.htm

15. <https://www.ihes.fr/~damour/publications/JanusJanvier2019-1.pdf>

16. <https://jp-petit.org/papers/cosmo/2014-AstrophysSpaceSci2.pdf>

Dans cet article, le cas particulier de la solution homogène et isotrope dépendante du temps est revisité, pour lequel le système d'équations devient, tel que publié dans l'article précédent :

So that our coupled field equation system becomes:

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi^{(+)} \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \left(\frac{a^{(-)}}{a^{(+)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(-)} \right], \quad (12a)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi^{(-)} \left[\left(\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}} \right)^3 T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right] \quad (12b)$$

On reconnaît les équations précédentes. Ce second article visait à étendre l'article précédent en montrant que les vitesses de la lumière pourraient être différentes dans les deux « *feuilletts* ». Cependant, l'attention de T. Damour s'est portée sur le système d'équations de champ couplées (2a) et (2b).

Il est important de souligner le fait qu'un modèle en cosmologie ou en physique n'émerge pas instantanément sous une forme définitive, parfaitement cohérente sur le plan mathématique. L'équipe était parfaitement consciente du problème qui restait à résoudre en 2014. Au moment où la critique de T. Damour, tout à fait fondée, portant sur ce système (2a-2b), est apparue, l'équipe a résolu celui-ci, sous la forme d'un article qui avait été publié quelques jours plus tôt (le premier en janvier 2019) dans la revue *Progress in Physics* [80]¹⁷.

Nous avons donc écrit immédiatement à T. Damour pour lui envoyer l'article, tout en reconnaissant la pertinence de sa critique, pour laquelle il a été remercié.

Quel est donc le sujet d'une telle critique ?

Dans le système des équations de champ couplées (2a-2b), les termes des premiers membres font intervenir les tenseurs de Ricci $R_{\mu\nu}^{(+)}$ et $R_{\mu\nu}^{(-)}$ et les scalaires de Ricci correspondants $R^{(+)}$ et $R^{(-)}$. Ces termes se calculent à partir des deux métriques $g_{\mu\nu}^{(+)}$ et $g_{\mu\nu}^{(-)}$.

À l'aide de ces deux métriques, on calcule alors la forme de deux opérateurs dits *de dérivation covariante* $\nabla_{\mu}^{(+)}$ et $\nabla_{\mu}^{(-)}$. Il se trouve que, de par leur forme, les deux premiers membres des deux équations satisfont identiquement la relation suivante :

$$\nabla_{\mu}^{(+)} \left(R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} \right) = 0 \quad (3.3.78)$$

$$\nabla_{\mu}^{(-)} \left(R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} \right) = 0 \quad (3.3.79)$$

17. <https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2019-Progress-in-Physics-1.pdf>

Les deux tenseurs, $T_{\mu\nu}^{(+)}$ et $T_{\mu\nu}^{(-)}$, satisfont également la condition suivante :

$$\nabla_{\mu}^{(+)} T_{\mu\nu}^{(+)} = 0 \quad (3.3.80)$$

$$\nabla_{\mu}^{(-)} T_{\mu\nu}^{(-)} = 0 \quad (3.3.81)$$

Il s'ensuit que si les équations de champ correspondent à celles présentées en 2014 dans la revue *Modern Physics Letters A*, on devrait également avoir :

$$\nabla_{\mu}^{(+)} T_{\mu\nu}^{(-)} = 0 \quad (3.3.82)$$

$$\nabla_{\mu}^{(-)} T_{\mu\nu}^{(+)} = 0 \quad (3.3.83)$$

Ce sont ces équations qui conduisent alors à une contradiction.

Tenons maintenant le langage du physicien. Quel sens donner aux tenseurs des seconds membres des équations ? Ce sont les sources du champ gravitationnel.

Il y a deux “*observateurs*”. Un observateur de masse positive, qui perçoit ce champ gravitationnel à travers la métrique $g_{\mu\nu}^{(+)}$ en suivant les géodésiques qui en sont issues.

Et un observateur de masses négatives, qui perçoit ce champ gravitationnel à travers la métrique $g_{\mu\nu}^{(-)}$ en suivant les géodésiques qui en sont issues. Ainsi :

- La source du champ $T_{\mu\nu}^{(+)}$ représente l'action des masses positives sur les masses positives.
- La source du champ $T_{\mu\nu}^{(-)}$ représente l'action des masses négatives sur les masses négatives.

Dans les deux seconds membres se trouvent deux termes-sources, qu'on peut appeler des *tenseurs d'interaction*, et qui traduisent :

- L'action des masses négatives sur les masses positives. On pourrait désigner cela par $T_{\mu\nu}^{(-/+)}$.
- L'action des masses positives sur les masses négatives. On pourrait désigner cela par $T_{\mu\nu}^{(+/-)}$.

Dans ces conditions, cela aurait amené à écrire ce système d'équations de la manière suivante :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi [T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-/+)}] \quad (3.3.84)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi [T_{\mu\nu}^{(-)} + T_{\mu\nu}^{(+/-)}] \quad (3.3.85)$$

En posant a priori la satisfaction des conditions suivantes :

$$\nabla_{\mu}^{(+)} T_{\mu\nu}^{(-/+)} = 0 \quad (3.3.86)$$

$$\nabla_{\mu}^{(-)} T_{\mu\nu}^{(+/-)} = 0 \quad (3.3.87)$$

En se plaçant en régime instationnaire, homogène et isotrope, le système devenait alors :

$$R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[T_{\mu\nu}^{(+)} + \frac{a^{(-)3}}{a^{(+)^3}T_{\mu\nu}^{(-)}} \right] \quad (3.3.88)$$

$$R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[T_{\mu\nu}^{(-)} + \frac{a^{(+)^3}}{a^{(-)^3}T_{\mu\nu}^{(+)}} \right] \quad (3.3.89)$$

Ce qui était alors mathématiquement et physiquement cohérent. C'est-à-dire que, dans ce cas, les tenseurs d'interaction deviendraient :

$$T_{\mu\nu}^{(-/+)} = \frac{a^{(-)3}}{a^{(+)^3}T_{\mu\nu}^{(-)}} \quad (3.3.90)$$

$$T_{\mu\nu}^{(+/-)} = \frac{a^{(+)^3}}{a^{(-)^3}T_{\mu\nu}^{(+)}} \quad (3.3.91)$$

Pourquoi le système d'équations (2a-2b) a-t-il été écrit ? Ce qui revenait à considérer :

$$T_{\mu\nu}^{(-/+)} = T_{\mu\nu}^{(-)} \quad (3.3.92)$$

$$T_{\mu\nu}^{(+/-)} = T_{\mu\nu}^{(+)} \quad (3.3.93)$$

Il n'y avait aucune véritable raison. C'était une erreur de typographie. D'autant plus que l'équipe avait immédiatement opté pour le cas particulier de la solution homogène, isotrope et non stationnaire représentée par les équations 3.3.88 et 3.3.89, physiquement et mathématiquement cohérente.

Ainsi, le système d'équations 3.3.84 et 3.3.85 aurait dû être utilisé. Mais le fait est qu'il a été présenté ainsi. T. Damour s'est donc concentré sur cette erreur, en fondant sur cette présentation incorrecte, l'idée que l'ensemble des travaux était frappé d'incohérence.

En partant de ce système d'équations incorrect, voyons comment se manifeste l'incohérence physique et mathématique qui en découle.

Les conditions de Bianchi sont d'essence mathématique. Elles ont une signification physique. Dans un contexte isotrope, homogène et non stationnaire, elles traduisent une conservation généralisée de l'énergie. Et, effectivement, dans le déroulement du calcul, dans les articles parus en 2014 dans les deux revues, nous aboutissons à la relation de conservation de l'énergie (Expression (10) de [75]).

On notera que, lorsqu'on considère l'équation de champ d'Einstein, celle-ci implique la conservation de l'énergie. En théorie bimétrique, la relation (10) de [75], qui traduit une conservation généralisée de l'énergie, est très satisfaisante pour le physicien.

Les conditions de cohérence mathématique, dans le cas non stationnaire, trouvent leur équivalent physique. Lorsque la situation est stationnaire, elles expriment un état d'équilibre entre la force de gravité et la force de pression à l'intérieur de la masse, dans le corps d'un astre massif qui crée le champ de gravitation.

Envisageons un astre massif dont la masse volumique est considérée comme approximativement constante, par exemple, la Terre. On sait calculer le champ de gravité à l'intérieur de la Terre : il est nul au centre et maximal à la surface. On sait que le champ (newtonien) produit par une masse sphérique, à une distance r du centre du système, est égal au champ newtonien qui serait produit par une masse $M(r)$ concentrée au centre géométrique, soit :

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad (3.3.94)$$

Ce champ gravitationnel est alors proportionnel à la distance au centre égal à $\frac{4}{3}\pi Gr\rho$.

En écrivant que ce champ équilibre la force de pression, on débouche sur la relation d'Euler traduisant l'équilibre hydrostatique, à savoir l'équilibre entre la force gravitationnelle et la force de pression dans un fluide de densité uniforme :

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \quad (3.3.95)$$

Le calcul de la condition de Bianchi doit nous donner cette relation pour un corps massif de masse volumique constante.

Voyons comment se gère ce type de calcul en relativité.

Nous allons maintenant quitter les notations des publications avec leurs métriques $g_{\mu\nu}^{(+)}$ et $g_{\mu\nu}^{(-)}$. Dans cet ouvrage, nous optons pour $g_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$.

Les tenseurs de Ricci sont $R_{\mu\nu}^{(g)}$ et $R_{\mu\nu}^{(h)}$ et les scalaires de Ricci G et H .

Ceci nous renvoie à la section 3.3.4. La dérivation du système d'équations de champ a fait apparaître la racine carrée du rapport des déterminants des deux métriques, ce qu'on retrouve également dans l'article [48] de S. Hossenfelder. Le système est alors écrit en notations tensorielles mixtes 3.3.54 et 3.3.55.

La relation 3.3.37 permet de retrouver la condition de nullité de la dérivée covariante des tenseurs d'interaction.

En relativité générale, l'analyse se concentre sur des cas spécifiques qui sont mathématiquement gérables, souvent associés à des situations physiques extrêmes. Ces situations incluent :

— Un univers homogène et isotrope qui est dynamique plutôt que statique.

- Des solutions stationnaires présentant une symétrie sphérique, invariantes sous l'action du groupe $SO(3)$. Pour ces cas, il est possible de déterminer des solutions métriques qui décrivent à la fois l'intérieur et l'extérieur de corps sphéroïdaux.
- Des solutions stationnaires et axisymétriques, invariantes sous l'action du groupe $SO(2)$. Ici, seule la métrique extérieure est connue, comme dans le cas de la métrique de Kerr. Le défi persistant en cosmologie est de trouver une métrique intérieure correspondante.

Ces scénarios délimitent le cadre de l'étude.

Dans le cadre du modèle Janus, l'approche est similaire. Comme les masses de signes opposés se repoussent mutuellement, elles ne coexistent pas. Par conséquent, l'étude se limitera aux situations où soit l'une soit l'autre des deux espèces de masses est prédominante, l'autre ayant une densité considérée comme négligeable dans la région d'espace en question.

Quand la masse positive est dominante, les équations de champ deviennent :

$$R_{\mu}^{\nu(g)} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}G = \chi T_{\mu}^{\nu(g,g)} \quad (3.3.96)$$

$$R_{\mu}^{\nu(h)} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}H = -\chi\sqrt{\frac{|g|}{|h|}}T_{\mu}^{\nu(g,h)} \quad (3.3.97)$$

C'est le même système d'équations, tensorielles, mais écrit en notation mixte. Dans ces conditions, les tenseurs métriques s'identifient avec le symbole de Kronecker (2.3.55). L'avantage est que les tenseurs sources s'expriment de façon simple :

$$T_{\mu}^{\nu(g,g)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)}c^{(g)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{(g)} \end{pmatrix} \quad (3.3.98)$$

$$T_{\mu}^{\nu(h,h)} = \begin{pmatrix} \rho^{(h)}c^{(h)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{(h)} \end{pmatrix} \quad (3.3.99)$$

Lorsque c'est au contraire la masse négative qui domine (cas du "*Dipole Repeller*"), le système d'équations devient :

$$R_{\mu}^{\nu(g)} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}G = \chi\sqrt{\frac{|h|}{|g|}}T_{\mu}^{\nu(h,g)} \quad (3.3.100)$$

$$R_{\mu}^{\nu(h)} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}H = -\chi T_{\mu}^{\nu(h,h)} \quad (3.3.101)$$

Dans la suite de notre analyse, il suffira de considérer l'un des deux cas. Nous nous appuierons sur le système d'équations 3.3.96 et 3.3.97, tel que traité par T.

Damour dans son article de janvier 2019¹⁸.

Dans le contexte de cette symétrie, le tenseur d'interaction à définir doit avoir une forme spécifique :

$$T_{\mu}^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (3.3.102)$$

Cela est nécessaire pour satisfaire la condition 3.3.37, qui décrit l'influence de l'espèce g sur l'espèce h , c'est-à-dire l'effet de *géométrie induite* par une population sur l'autre.

L'application de la condition de divergence nulle à l'équation 3.3.96 nous mène à l'équation d'Euler traduisant l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dp^{(g)}}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)^{(g)}}{r^2} \quad (3.3.103)$$

En nous basant sur le système constitué des deux équations (2a-2b) découlant de l'erreur typographique de la publication de 2014 dans *Modern Physics Letters A*, nous devons exprimer le tenseur d'interaction de la manière suivante :

$$T_{\mu}^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)}c^{(g)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{(g)} \end{pmatrix} \quad (3.3.104)$$

Dans ces conditions, comme l'a démontré T. Damour dans son article de janvier 2019, la condition de divergence nulle conduit à la relation suivante contredisant 3.3.103 :

$$\frac{dp^{(g)}}{dr} = +\frac{GM(r)\rho(r)^{(g)}}{r^2} \quad (3.3.105)$$

Il existe évidemment une incohérence à la fois physique et mathématique, qui résulte d'un choix inapproprié du tenseur d'interaction. En effet, rien n'exige a priori que nous adoptions l'expression 3.3.104. La condition de divergence nulle peut être satisfaite en utilisant deux fonctions, $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ dont la nature reste à définir et à construire.

En revanche, ce qui a pu être établi en 2019, c'est que le choix de tenseur d'interaction suivant :

$$T_{\mu}^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \rho^{(g)}c^{(g)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^{(g)} \end{pmatrix} \quad (3.3.106)$$

18. dont le détail complet des calculs donnant les solutions métriques est présenté dans mon étude de la Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles). J'ai également étudié le second cas de la Compatibilité des Équations de Champ au voisinage du Répulseur du Dipôle.

faisait disparaître cette incohérence, dans le cas de l'approximation Newtonienne, dont nous rappelons les fondements :

- Les vitesses considérées sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière
- Les effets de courbure de l'espace demeurent modérés.

Comment interprète-t-on la première condition ?

Le fluide cosmique est assimilé à un gaz parfait. Dans cette hypothèse, si $\langle v^2 \rangle$ représente la vitesse quadratique moyenne (associée à l'agitation thermique), la pression peut être exprimée par la relation suivante :

$$p^{(g)} = \frac{\rho^{(g)} \langle v^{(g)} \rangle^2}{3} \quad (3.3.107)$$

Ainsi, nous pouvons en déduire que :

$$v^{(g)} \ll c^{(g)} \implies |p^{(g)}| \ll \rho^{(g)} c^{(g)2} \quad (3.3.108)$$

En rappelant que la pression n'est rien d'autre qu'une densité volumique d'énergie cinétique liée à l'agitation thermique.

Comment peut-on gérer la condition de faible courbure ?

L'inégalité $r \gg 2m$ indique que l'on est suffisamment loin de la source gravitationnelle pour que les effets de la relativité générale soient négligeables¹⁹. En effet, vis-à-vis de grandes distances, la longueur $\frac{2GM}{c^2}$ ²⁰ est totalement négligeable.

Il est important de noter que pour une étoile comme le Soleil, la longueur de Schwarzschild, qui dépend uniquement de la masse, est d'environ 3 km, ce qui est insignifiant par rapport au diamètre de l'étoile. Cette observation est valable pour tous les objets célestes observables, à l'exception des étoiles à neutrons où les effets de courbure de l'espace-temps deviennent significatifs. De même, les objets hypermassifs situés au cœur des galaxies sont exclus, leur nature restant à préciser avec plus de détails.

Par conséquent, cette approche restreint le champ d'étude aux objets qui s'inscrivent dans le cadre de l'approximation newtonienne, ce qui représente 99 % des objets observables.

Comme le démontre l'analyse détaillée qui suivra, en choisissant le tenseur d'interaction sous la forme 3.3.106 et en tenant compte de ces conditions newtoniennes, nous retrouvons la relation 3.3.103 et l'apparente contradiction est résolue.

19. où m est souvent remplacé par $\frac{GM}{c^2}$ pour obtenir une dimension de longueur, M étant la masse de l'objet

20. correspondant à la longueur caractéristique gravitationnelle appelée la "longueur de Schwarzschild"

Avant de détailler cette analyse, revenons sur les échanges avec T. Damour. En vain, l'équipe a tenté de lui communiquer ce point en 2019. Aucune réponse a été reçue, ni à l'invitation à une rencontre informelle "devant un tableau noir, sans enregistrement ni témoins". Durant cinq ans, des démarches similaires ont été entreprises, y compris auprès d'Étienne Ghys, mathématicien et géomètre éminent, ainsi que secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, concernant ces questions théoriques.

À la fin de l'année 2019, face à l'absence de réponses, le détail de ce calcul a été mis en ligne pour que des scientifiques, enseignants, ingénieurs et étudiants puissent y accéder²¹.

Il fournit une explication complète des calculs.

Le détail des calculs est présenté dans l'étude de la Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles et l'attention pourra être portée sur les équations 3.3.180 et 3.3.223, lesquelles, comme expliqué, conduisent toutes deux à la relation d'Euler sous l'approximation newtonienne, à savoir l'équation 3.3.103, faisant disparaître l'apparente contradiction mathématique et physique.

T. Damour a été tenu informé de cette observation après la publication de son article le 7 janvier 2019. Cependant, il semble qu'il n'ait pas pris connaissance de ce texte avant novembre 2022.

Plusieurs collègues scientifiques et universitaires, ayant intégré le détail de ces calculs et étant consternés par le silence de T. Damour pendant trois ans, lui ont envoyé une lettre recommandée avec accusé de réception le 2 novembre 2022, lui demandant de répondre à ces interrogations²².

En réponse, T. Damour a rapidement publié un nouvel article en ligne le 12 décembre 2022²³.

Permettez-moi de citer un extrait de cet article :

21. <http://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2019-to-Damour-3.pdf>

22. <https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-11-02-Duval-to-Damour.pdf>

23. <https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-12-12-Damour-IHES.pdf>

Dans le document “Sur le “modèle Janus” de J. P. Petit” (mis en ligne sur <http://www.ihes.fr/~damour> le 4 Janvier 2019), j’avais expliqué en grand détail l’incohérence physique et mathématique de la version du modèle Janus publiée en 2014 par J. P. Petit and G. d’Agostini; c.a.d.

J. P. Petit. et G. d’Agostini, “Negative mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy”, *Astrophys. Space Sci* DOI 10.1007/s10509-014-2106-5);

J. P. Petit, et G. d’Agostini, “Cosmological bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe”. *Mod. Phys. Lett. A* Vol. 29 (no 34) (2014) 145082.

Quelques mois plus tard (le 12 Mars 2019), j’ai reçu une lettre de J. P. Petit affirmant qu’il avait maintenant résolu l’incohérence (que j’avais signalée) de la version 2014 du modèle Janus dans un nouvel article:

Jean-Pierre Petit, Gilles D’Agostini and Nathalie Debergh [disons PDD19], “Physical and Mathematical Consistency of the Janus Cosmological Model (JCM)”, *Progress in Physics*, **15**, issue 1, (2019) (<http://www.ptep-online.com>)¹

Dans sa lettre du 12 mars 2019 (et dans un courriel ultérieur du 3 avril 2019) J. P. Petit affirmait qu’il avait corrigé l’incohérence que j’avais pointée du doigt par “une légère modification des seconds membres des équations Janus”, et me demandait de modifier mon document du 4 janvier 2019 pour prendre en compte son travail de 2019. J’ai répondu à J. P. Petit dans un courriel d’avril 2019 en y disant que: “Dans votre dernier article, “Physical and Mathematical Consistency of the JCM” (January 2019), vous dites avoir corrigé l’incohérence (soulignée dans mon texte) du modèle Janus par “une légère modification des seconds membres des équations Janus”. Mais, les sections 3 et 4 de votre article, loin de fournir une déduction bien définie d’une théorie modifiée cohérente, sont mathématiquement incohérentes, et conduisent, selon votre article lui-même, à une incohérence mathématico-physique.”

Malgré cette réponse, il semble que ni J.P. Petit, ni ses collaborateurs (ni plusieurs de ses amis qui m’ont inondé de lettres recommandées ces derniers mois) n’ont apprécié l’incohérence mathématico-physique des équations de champ publiées dans leur article de 2019. Pour clarifier cette situation, je discute ci-

Et il écrit, plus loin :

Une première nouvelle incohérence concerne l’idée de base du modèle Janus (tel qu’il a été défini dans un cadre newtonien), cad le fait que, dans ce modèle, *les masses positives attirent les masses positives; les masses négatives attirent les masses négatives, mais les masses positives et négatives se repoussent.*

Dans son analyse, T. Damour remet en cause ce schéma d'interaction en écrivant :

Cette loi de conservation (par rapport à la connexion ∇_- de la métrique $g_{\mu\nu}^-$) implique, comme il est bien connu, qu'une particule d'épreuve à masse négative doit suivre une géodésique de la métrique $g_{\mu\nu}^-$. En particulier, une particule d'épreuve à masse négative autour d'une solution de Schwarzschild de masse négative, sera repoussée, et non attirée par la masse centrale négative. Nous avons donc ici une violation frappante d'une des idées de base du modèle Janus. Cela montre que les deux équations de champ (1) ne réussissent pas à donner une description relativiste de la situation physique qu'elles sont censées décrire.

Et finit par conclure :

doit suivre une géodésique de la métrique $g_{\mu\nu}^-$. En particulier, une particule d'épreuve à masse négative autour d'une solution de Schwarzschild de masse négative, sera repoussée, et non attirée par la masse centrale négative. Nous avons donc ici une violation frappante d'une des idées de base du modèle Janus.

Ceci montre que T. Damour n'a pas pris en compte l'effet du signe "moins" présent dans le second membre de la seconde équation de champ, dont la solution est la métrique $h_{\mu\nu}$, d'où découlent les géodésiques suivies par les masses négatives :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = \chi \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right) \quad (3.3.109)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}H = -\chi \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right) \quad (3.3.110)$$

Nous avons utilisé les notations de cet ouvrage. Ainsi, sans le signe "moins", les masses négatives repousseraient les masses négatives, ce qui correspond à la contribution du terme $T_{\mu\nu}^{(h,h)}$ au champ. Inversement, les masses positives s'attirent, comme indiqué par la contribution du terme $\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)}$. Cependant, c'est le signe "moins" qui inverse le sens de ces forces, un détail que T. Damour semble avoir omis.

Dans la suite de son article, T. Damour aborde la question de la satisfaction des conditions de Bianchi dans le régime d'approximation newtonienne, un point qu'il semble avoir découvert récemment, avec trois ans de retard. Il déclare :

équation (5). Il est vrai que cette modification élimine la violente contradiction entre les deux équations newtoniennes (5), en les remplaçant par l'unique (et correcte) équation de structure newtonienne

$$p'_+ = -G\rho_+ \frac{M_+(r)}{r^2}. \quad (6)$$

Ensuite, il écrit les deux équations d'état :

où la source $T_{\mu\nu}^+$ est stationnaire et à symétrie sphérique. Ces solutions ont été écrites² dans les éqs. (45), (46) de PDD19, c-a-d (avec $' = d/dr$)

$$\begin{aligned} p'_+ &= -G \left(\rho_+ + \frac{p_+}{c^2} \right) \frac{M_+(r) + 4\pi p_+ r^3 / c^2}{r(r - 2GM_+(r)/c^2)}, \\ p'_+ &= -G \left(\rho_+ - \frac{p_+}{c^2} \right) \frac{M_+(r) - 4\pi p_+ r^3 / c^2}{r(r + 2GM_+(r)/c^2)}, \end{aligned} \quad (7)$$

où $p_+(r)$ est la pression (de la matière ordinaire), $\rho_+(r)$ sa densité, et $M_+(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho_+(r)$ est la masse (positive) contenue dans le rayon r . Notons que l'on passe de la première équation (7) à la seconde par les changements: $p_+ \rightarrow -p_+$ et $G \rightarrow -G$.

Il est vrai que si l'on prend formellement la limite newtonienne $\frac{1}{c^2} \rightarrow 0$ dans les équations (7), ces deux équations deviennent compatibles, car elles deviennent toutes deux identiques à l'unique équation de structure newtonienne (6).

En convenant trois ans plus tard, que la contradiction précédemment observée disparaît dans le cadre de l'approximation newtonienne.

T. Damour a été immédiatement contacté pour lui signaler que son interprétation concernant le sens des forces était incorrecte, et que la contradiction relative aux lois d'interaction découlait uniquement de ses erreurs de calcul²⁴.

L'équipe lui écrit alors :

24. <https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-12-14-to-Damour.pdf>

Vous écrivez, je vous cite :

- *Une nouvelle incohérence concerne l'idée de base du modèle Janus (tel qu'il a été défini dans un cadre newtonien), c'est-à-dire le fait que, dans ce modèle, les masses positives attirent les masses positives ; les masses négatives attirent les masses négatives, mais les masses positives et négatives se repoussent. Une conséquence particulière de ce principe fondamental du modèle Janus doit être qu'une étoile de masse négative doit attirer les masses d'épreuve négatives dans son voisinage. Mais de fait les équation Janus impliquent le contraire, les masses d'épreuve négatives sont repoussées.*

Si c'était vrai, cela serait effectivement très grave et constituerait une incohérence ingérable, rhédibitoire.

Malheureusement, c'est complètement faux !

Votre conclusion montre que vous n'avez rien compris au modèle, dont la propriété centrale est, grâce au signe moins (que vous oubliez) qui précède la constante d'Einstein dans le second membre de la seconde équation, de reconstituer les principes d'équivalence et d'action-réaction, donc de produire des lois d'interaction permettant d'échapper à l'ingérable paradoxe runaway. Et tel était son but, pour permettre à des masses négatives de constituer une nouvelle donne en cosmologie.

T. Damour retire sa version datée du 12 décembre 2022 et la remplace par un nouvel article le 28 décembre 2022²⁵.

Citons-le :

$$\begin{aligned} \frac{dv_+^i}{dt} &= -c^2 \Gamma_{i0}^{+0} = +\frac{1}{2} c^2 \partial_i g_{00}^+ = +\partial_i U, \\ \frac{dv_-^i}{dt} &= -c^2 \Gamma_{i0}^{-0} = +\frac{1}{2} c^2 \partial_i g_{00}^- = -\partial_i U. \end{aligned} \quad (9)$$

La première de ces équations implique qu'une masse d'épreuve positive est attirée par une masse-source positive et repoussée par une masse-source négative, alors que la deuxième de ces équations implique l'inverse: une masse d'épreuve positive doit aussi [comme conséquence nécessaire des eqs (1)] être repoussée par une masse-source positive et attirée par une masse-source négative. En refaisant ce raisonnement à partir d'une source d'épreuve constituée d'une répartition continue de "poussière" à masse négative, c.a.d. $T_{\mu\nu}^{1-} = \rho_1^- u_\mu^- u_\nu^-$, on obtiendrait, mutatis mutandis, deux autres équations similairement contradictoires pour la variation de vitesse $\frac{dv_-^i}{dt}$ d'une masse d'épreuve négative. Ceci montre de façon frappante l'incohérence du modèle Janus (ici au niveau newtonien).

Malgré la précision apportée dans la correspondance du 12 décembre 2022, T. Damour a maintenu sa conclusion sur l'incohérence des lois de force. Cela démontre qu'il n'a pas saisi ou n'a pas souhaité saisir les explications fournies.

Il est ensuite à noter, en réexaminant son texte du 12 décembre 2022, que bien que l'approximation newtonienne élimine la contradiction, il revisite le cas d'une

25. <https://www.jp-petit.org/papers/cosmo/2022-12-28-Damour-IHES.pdf>

solution relativiste pour l'intérieur d'étoiles à neutrons, où de telles approximations sont inadéquates. En effet, les termes $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ présents dans le tenseur d'interaction doivent être choisis de manière à satisfaire la condition de divergence nulle 3.3.37. Cela permettrait théoriquement de construire la métrique $h_{\mu\nu}$. Cependant, quelle observation tangible cela apporterait-il ? **Aucune**.

En effet, cela permettrait de modéliser les géodésiques empruntées par les photons d'énergie négative, qui restent non observables. Par conséquent, nous ne sommes pas obligés de construire cette seconde métrique. Cependant, il est parfaitement possible de construire la métrique intérieure $g_{\mu\nu}$ sous sa forme non linéaire, à savoir celle d'une "solution intérieure de Schwarzschild", qui mène à la célèbre équation d'état de TOV. Cette solution avait déjà été proposée par Karl Schwarzschild dans son second article de février 1916 [90].

Qu'en est-il alors lorsque le champ est généré par une masse négative ? Nous observons cela dans des régions où l'effet répulsif est manifeste, tant sur les masses que sur les photons à énergie négative, en raison de la présence d'un conglomerat de masse négative agissant comme le "Dipole Repeller".

Dans de tels cas, où l'objet est étendu, l'approximation newtonienne est tout à fait suffisante. Les vitesses d'agitation thermique des atomes d'antimatière à masse négative sont insignifiantes comparées à la vitesse de la lumière à énergie négative. De même, le rayon de Schwarzschild associé à l'objet est négligeable par rapport à son diamètre.

La seule situation où les corrections relativistes pourraient être nécessaires serait dans le cas d'une étoile à neutrons à masse négative. Cependant, de tels objets n'existent pas selon le modèle (voir la section Nature de l'antimatière primordiale).

Un cadre théorique a pu être établi, capable de couvrir tous les cas possibles et de répondre aux objections soulevées par T. Damour.

T. Damour a finalement reconnu, après trois ans de retard dans ses articles des 12 et 28 décembre 2022, qu'il n'y avait aucune incohérence manifeste en restant dans le cadre de l'approximation newtonienne. Par conséquent, il n'est pas tenu de fournir une explication détaillée du calcul menant aux équations d'état.

Il n'est pas indispensable de fournir une analyse détaillée du calcul des opérateurs de dérivée covariante. La contradiction en dehors du cadre newtonien se manifeste simplement dans l'effort de construire une solution métrique basée sur des hypothèses de symétrie simples, à savoir :

- Stationnarité
- Invariance sous l'action du groupe $SO(3)$

Il pourrait être objecté que cela limite l'examen aux systèmes présentant une

symétrie sphérique et exempts de rotation. Mais pour être rigoureux, on devrait considérer :

- La métrique extérieure, à savoir celle de Kerr.
- Une métrique intérieure décrivant la géométrie à l'intérieur d'une masse en rotation.

La construction de cette seconde métrique, qui serait le complément de celle de Kerr, reste à ce jour une tâche inachevée.

On se limite donc à la construction de la solution intérieure à symétrie sphérique dont le détail des calculs est présenté dans l'étude de la Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles.

3.3.7 Compatibilité des Équations de Champ dans la Limite des Champs Faibles

Pour obtenir une solution géométrique complète, le modèle doit être capable de reproduire la solution initialement développée par K. Schwarzschild en 1916 [91], et de l'étendre à la géométrie intérieure d'une sphère emplie d'un fluide incompressible [90].

La maîtrise de cette solution est importante pour le calcul de l'atténuation de la luminosité d'une source distante, après que les rayons lumineux qu'elle émet ont traversé un amas de masse négative. En effet, alors que les photons d'énergie positive interagissent avec la matière de masse positive²⁶, ils ne subissent qu'une interaction anti-gravitationnelle lorsqu'ils traversent une masse négative. La représentation schématique de ce phénomène est illustrée dans la 3.16.

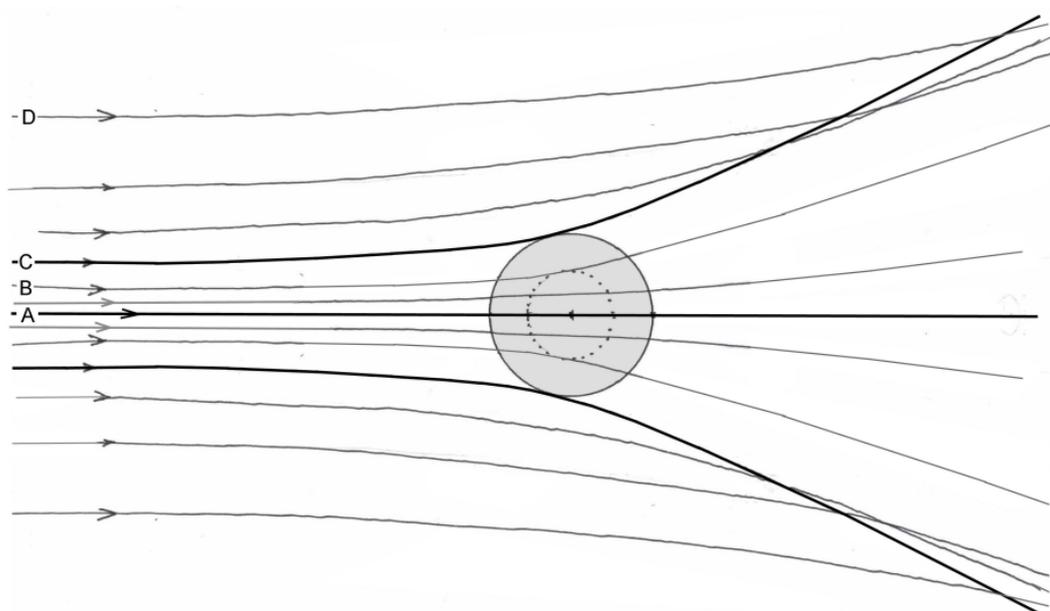


FIGURE 3.16 – Allure de la déviation des photons d'énergie positive par une masse négative.

Une situation analogue se présenterait si nous considérions un faisceau de neutrons parallèles d'énergie positive (ou de faible masse) traversant une masse homogène, également positive (figure 3.17). Les trajectoires, dans les deux cas, lorsque la courbure reste modérée, sont très proches d'hyperboles. Dans les deux cas, l'angle de déviation, positif ou négatif, atteint un maximum (C) lorsque la géodésique est tangente à la limite de la masse, positive ou négative. Il diminue ensuite régulièrement jusqu'à zéro à de très grandes distances (D). L'angle de déviation est nul, à cause de la symétrie, lorsque la géodésique passe par le centre de la masse (A).

26. pouvant être émis ou absorbés par celle-ci.

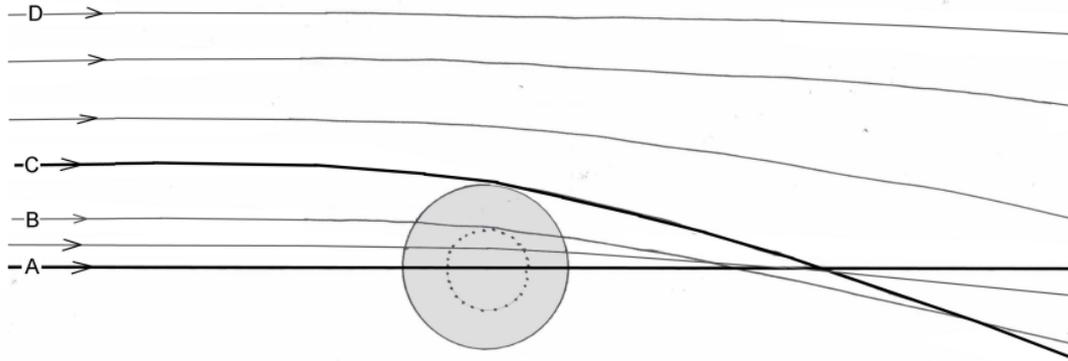


FIGURE 3.17 – Allure de la déviation des neutrinos d'énergie positive par une masse positive.

Dans ce calcul des trajectoires géodésiques correspondant à cette “*solution intérieure de Schwarzschild*” [90] et sous conditions quasi-newtoniennes, les particules, de masse nulle ou non nulle, subissent la déviation (B) qui correspondrait à l'action de la masse contenue à l'intérieur de la sphère pointillée, concentrée au centre. Une sphère tangente à la ligne (C) correspond à la déviation maximale. Pour la ligne (A), passant par le centre de la sphère, elle est nulle. À la distance (D), la déviation tend vers zéro.

En développant un calcul similaire à la construction de la métrique intérieure (14.47) de [1], nous pouvons écrire :

$$ds^{(g)2} = -e^{\nu^{(g)}} dx^{02} + e^{\lambda^{(g)}} dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3.111)$$

$$ds^{(h)2} = -e^{\nu^{(h)}} dx^{02} + e^{\lambda^{(h)}} dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3.112)$$

Considérons à présent ces deux métriques sous la signature (+ - - -) :

$$ds^{(g)2} = e^{\nu^{(r)(g)}} dx^{02} - e^{\lambda^{(r)(g)}} dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3.113)$$

$$ds^{(h)2} = e^{\nu^{(r)(h)}} dx^{02} - e^{\lambda^{(r)(h)}} dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3.114)$$

Dans le cadre de la relativité générale, la forme de la métrique décrivant un espace-temps à symétrie sphérique et statique, est souvent exprimée en termes de fonctions spécifiques pour faciliter l'analyse des équations d'Einstein. Une des solutions les plus adaptées à ces équations est la métrique extérieure de Schwarzschild 2.3.117, qui décrit l'espace-temps autour d'une masse ponctuelle dans un espace vide. Cette solution ne fait pas explicitement usage de fonctions exponentielles dans sa forme la plus connue, mais des formes plus générales de métriques à symétrie sphérique peuvent les introduire pour modéliser diverses configurations de matière.

Dans des situations où la distribution de matière n'est pas ponctuelle ou dans des régimes à forte courbure spatio-temporelle, des fonctions exponentielles telles

que $e^{\nu(r)}$ et $e^{\lambda(r)}$ peuvent être introduites pour décrire le potentiel gravitationnel et la courbure de l'espace. Ces fonctions exponentielles facilitent le traitement mathématique des équations différentielles en assurant certaines propriétés physiques, telles que la platitude de l'espace-temps à l'infini²⁷.

La fonction $\nu(r)$ est liée au potentiel gravitationnel perçu par un observateur à l'infini, tandis que $\lambda(r)$ concerne la courbure de l'espace due à la présence de matière. Pour une métrique générale à symétrie sphérique, l'élément de ligne peut être écrit sous la forme 3.3.113. Cette formulation permet d'adapter la métrique à différentes distributions de matière et de capturer le comportement de la gravité dans des contextes variés, allant des champs gravitationnels faibles aux régimes extrêmes près d'objets supermassifs tels que des étoiles à neutrons. Ainsi, le potentiel gravitationnel peut augmenter de manière "*exponentielle*" à proximité de tels objets, et les fonctions exponentielles peuvent capturer ce comportement de manière précise.

Dans la suite de notre analyse, nous nous appuierons sur le système d'équations 3.3.96 et 3.3.97 en régime stationnaire où les masses négatives sont négligeables par rapport aux masses positives. Nous déterminerons alors la solution de chacune de ces équations de champ dans la limite newtonienne.

Solution de la première Équation de Champ 3.3.96

Nous pouvons exprimer le tenseur métrique 3.3.113 de la manière suivante²⁸ :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.3.115)$$

Et nous savons que :

$$g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (3.3.116)$$

Nous allons à présent calculer les symboles de Christoffel²⁹ du tenseur métrique 3.3.113 selon la relation 2.3.73.

Nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une métrique statique et à symétrie sphérique souvent utilisée en relativité générale. Les composantes non nulles du tenseur métrique sont :

$$g_{tt} = e^{\nu(r)} \quad (3.3.117)$$

$$g_{rr} = -e^{\lambda(r)} \quad (3.3.118)$$

$$g_{\theta\theta} = -r^2 \quad (3.3.119)$$

$$g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta \quad (3.3.120)$$

27. Il s'agit d'une caractéristique de l'espace-temps de Minkowski.

28. Pour simplifier l'écriture, l'exposant (g) ne sera pas pris en compte dans toute la démonstration.

29. Les symboles de Christoffel sont également connus sous le nom de coefficients de connexion de Levi-Civita comme nous l'avons déjà vu.

Et les composantes de la métrique inverse $g^{\beta\alpha}$ sont simplement l'inverse des éléments diagonaux³⁰ :

$$g^{tt} = e^{-\nu(r)} \quad (3.3.121)$$

$$g^{rr} = -e^{-\lambda(r)} \quad (3.3.122)$$

$$g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} \quad (3.3.123)$$

$$g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (3.3.124)$$

Étant donné que cette métrique est diagonale, le calcul se simplifie considérablement. Beaucoup des symboles de Christoffel seront nuls parce que les dérivées partielles des composantes non diagonales sont nulles. Nous devons seulement calculer les composantes non nulles pour :

— Γ_{tt}^r :

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda}) \left[-\frac{d}{dr}(e^\nu) \right] = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda} \frac{d\nu}{dr} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu' \quad (3.3.125)$$

— Γ_{rr}^r :

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda}) \left[\frac{d}{dr}(-e^\lambda) \right] = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} = \frac{1}{2}\lambda' \quad (3.3.126)$$

— $\Gamma_{\theta\theta}^r$:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-2r) = re^{-\lambda} \quad (3.3.127)$$

— $\Gamma_{\phi\phi}^r$:

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \left(-\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-2r \sin^2 \theta) = re^{-\lambda} \sin^2 \theta \quad (3.3.128)$$

— $\Gamma_{r\theta}^\theta$ et $\Gamma_{r\phi}^\phi$:

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) (-2r) = \frac{1}{r} \quad (3.3.129)$$

— $\Gamma_{\phi\phi}^\theta$:

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(-\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) (-2r^2 \sin \theta \cos \theta) = \sin \theta \cos \theta \quad (3.3.130)$$

— $\Gamma_{\theta\phi}^\phi$:

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (2r^2 \sin \theta \cos \theta) = \cot \theta \quad (3.3.131)$$

30. Les éléments non diagonaux sont nuls.

— Γ_{rt}^t :

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2}g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\frac{d}{dr} e^\nu \right) = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} = \frac{1}{2}\nu' \quad (3.3.132)$$

Nous pouvons alors calculer les composantes nécessaires du tenseur de Riemann pour obtenir une des composantes R_{tt} du tenseur de Ricci dans un espace-temps à symétrie sphérique selon la relation suivante (obtenue à partir de 3.3.20) :

$$R_{tt} = R_{trt}^r + R_{t\theta t}^\theta + R_{t\phi t}^\phi \quad (3.3.133)$$

Or la première composante est donnée par :

$$R_{trt}^r = \partial_t \Gamma_{rt}^r - \partial_r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{t\lambda}^r \Gamma_{rt}^\lambda - \Gamma_{r\lambda}^r \Gamma_{tt}^\lambda \quad (3.3.134)$$

Ainsi, en remplaçant chaque symbole de Christoffel par sa valeur calculée précédemment, et en sachant que la métrique est statique, nous obtenons :

$$R_{trt}^r = -\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{2} \right) \quad (3.3.135)$$

La seconde composante nécessaire $R_{t\theta t}^\theta$ se calcule également de manière triviale :

$$R_{t\theta t}^\theta = -\Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{tt}^r \quad (3.3.136)$$

$$R_{t\theta t}^\theta = -\frac{1}{r} \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \quad (3.3.137)$$

$$R_{t\theta t}^\theta = -\frac{1}{2r} e^{\nu-\lambda} \nu' \quad (3.3.138)$$

$$(3.3.139)$$

La dernière composante $R_{t\phi t}^\phi$ est identique à $R_{t\theta t}^\theta$ ³¹ :

$$R_{t\phi t}^\phi = -\frac{1}{2r} e^{\nu-\lambda} \nu' \quad (3.3.140)$$

Finalement, en combinant les différents termes de la composante temporelle R_{tt} du tenseur de Ricci, nous obtenons :

$$R_{tt} = e^{\nu-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) \quad (3.3.141)$$

En utilisant la même méthode, nous pouvons déduire les autres composantes diagonales du tenseur de Ricci :

$$R_{rr} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \quad (3.3.142)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\nu'r}{2} - \frac{\lambda'r}{2} \right) - 1 \quad (3.3.143)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (3.3.144)$$

31. En raison de l'isotropie des coordonnées angulaires

Pour déterminer le scalaire de Ricci³², nous devons d'abord exprimer les composantes du tenseur de Ricci en utilisant des indices mixtes. Pour cela, nous élevons un indice en utilisant la métrique inverse selon la relation suivante :

$$R_{\nu}^{\mu} = \sum_{\rho=0}^3 g^{\mu\rho} R_{\rho\nu} \quad (3.3.145)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$R_t^t = g^{tt} R_{tt} = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) \quad (3.3.146)$$

$$R_r^r = g^{rr} R_{rr} = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (3.3.147)$$

$$R_{\theta}^{\theta} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (3.3.148)$$

$$R_{\phi}^{\phi} = R_{\theta}^{\theta} \quad (3.3.149)$$

Nous pouvons en déduire le scalaire de Ricci :

$$R = R_{\mu}^{\mu} = R_t^t + R_r^r + R_{\theta}^{\theta} + R_{\phi}^{\phi} \quad (3.3.150)$$

$$R = 2e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2} \quad (3.3.151)$$

Or, le tenseur d'Einstein est donnée en mode mixte par la relation suivante :

$$G_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} R \delta_{\mu}^{\nu} \quad (3.3.152)$$

Ainsi, nous pouvons établir chacune des composantes du tenseur d'Einstein :

$$G_t^t = R_t^t - \frac{1}{2} R \delta_t^t = R_t^t - \frac{1}{2} R = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (3.3.153)$$

$$G_r^r = R_r^r - \frac{1}{2} R \delta_r^r = R_r^r - \frac{1}{2} R = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (3.3.154)$$

$$G_{\theta}^{\theta} = R_{\theta}^{\theta} - \frac{1}{2} R \delta_{\theta}^{\theta} = R_{\theta}^{\theta} - \frac{1}{2} R = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) \quad (3.3.155)$$

Or, si nous considérons l'équation de champ d'Einstein en mode mixte :

$$E_{\mu}^{\nu} = \chi T_{\mu}^{\nu} \quad (3.3.156)$$

Nous pouvons exprimer ses composantes dans le même contexte mathématique :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} &= \chi T_t^t \\ e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} &= \chi T_r^r \\ e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) &= \chi T_{\theta}^{\theta} \end{aligned} \quad (3.3.157)$$

32. Le scalaire de Ricci quantifie la courbure totale de l'espace-temps

D'où :

$$\chi T_t^t - \chi T_r^r = -(\nu' + \lambda') \frac{e^{-\lambda}}{r} \quad (3.3.158)$$

Examinons la construction classique de la métrique intérieure en partant de l'expression du tenseur énergie-impulsion $T_\mu^{\nu(g,g)}$ de la première équation de champ 3.3.96 sous sa forme classique en mode mixte³³ :

$$T_\mu^{\nu(g,g)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p}{c^2} \end{pmatrix} \quad (3.3.159)$$

Les équations 3.3.157 et 3.3.158 s'écrivent alors de la manière suivante :

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \chi \rho \quad (3.3.160)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi \frac{p}{c^2} \quad (3.3.161)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) = -\chi \frac{p}{c^2} \quad (3.3.162)$$

$$-\frac{\nu' + \lambda'}{r} e^{-\lambda} = \chi \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (3.3.163)$$

D'où nous pouvons en déduire :

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = e^{-\lambda} \left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right] \quad (3.3.164)$$

$$e^\lambda \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu' + \lambda'}{2r} - \frac{\nu''}{2} \quad (3.3.165)$$

Pour résoudre ces équations différentielles, nous pouvons procéder de manière similaire à l'expression (14.15) de la référence [1] du chapitre 14 en posant :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \implies 2m(r) = r(1 - e^{-\lambda}) \quad (3.3.166)$$

Avec :

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (3.3.167)$$

En considérant 3.3.160, si nous dérivons cette expression, nous obtenons³⁴ :

$$2m' = (1 - e^{-\lambda}) + r\lambda'e^{-\lambda} \quad (3.3.168)$$

$$-\frac{2m'}{r^2} = \frac{-1 + e^{-\lambda} - r\lambda'e^{-\lambda}}{r^2} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (3.3.169)$$

$$m' = -\frac{r^2 \chi \rho}{2} = \frac{4\pi r^2 G}{c^2} \rho \quad (3.3.170)$$

33. (13.1) page 425 de [1]

34. Par convention, nous adoptons la valeur de la constante gravitationnelle d'Einstein $\chi = -\frac{8\pi G}{c^2}$ selon (10.98) de [1].

De manière similaire à l'équation (14.18) de [1], nous pouvons en déduire :

$$m(r) = \frac{G\rho}{c^2} \int_0^r 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{G}{c^2} \quad (3.3.171)$$

Ainsi, l'expression 3.3.161 couplée à l'expression 3.3.166 nous permet d'obtenir :

$$\nu' = \frac{r}{r(r-2m)} \left(-\chi \frac{pr^2}{c^2} + 1 \right) - \frac{(r-2m)}{r(r-2m)} \quad (3.3.172)$$

D'où :

$$\nu' = 2 \frac{m + \frac{4\pi Gpr^3}{c^4}}{r(r-2m)} \quad (3.3.173)$$

Or, en procédant à la dérivation de l'expression 3.3.161, nous obtenons :

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - \lambda' e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + e^{-\lambda} \left(\frac{-2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2} \right) \quad (3.3.174)$$

D'où par simplification :

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r^2} + \frac{\lambda'\nu'}{r} + \frac{2}{r^3} - \frac{\nu''}{r} + \frac{\nu'}{r^2} \right) \quad (3.3.175)$$

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2 \frac{e^{-\lambda}}{r} \left(\frac{\lambda'}{2r} + \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{2r} \right) \quad (3.3.176)$$

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2 \frac{e^{-\lambda}}{r} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda' + \nu'}{2r} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} \right) \quad (3.3.177)$$

En combinant ce résultat avec l'expression 3.3.165, nous pouvons en déduire :

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = -e^{-\lambda} \frac{\nu'}{2r} (\nu' + \lambda') \quad (3.3.178)$$

D'où l'expression suivante par couplage avec la relation 3.3.163 :

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = -\frac{e^{-\lambda}}{r} (\nu' + \lambda') \frac{\nu'}{2} = \chi \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\nu'}{2} \implies \frac{p'}{c^2} = -\frac{\nu'}{2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (3.3.179)$$

En considérant l'expression 3.3.173, nous aboutissons alors à l'équation classique de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) ([66], (14.25c) de [1]) :

$$\frac{p'}{c^2} = -\frac{m + \frac{4\pi Gpr^3}{c^4}}{r(r-2m)} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (3.3.180)$$

Nous pouvons terminer ce calcul en obtenant la forme explicite de la métrique intérieure, toujours dans ce cadre quasi-newtonien.

En effet, en tenant compte de la relation (14.28) de [1]³⁵ pour $r \leq R_s$, et de la masse obtenue 3.3.171, nous pouvons déjà établir l'un des termes de la métrique à partir de 3.3.166 :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} = 1 - \frac{8}{3}\pi r^2 \rho \frac{G}{c^2} \implies e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \quad (3.3.181)$$

35. correspondant à 6.1.3 que l'on étudiera dans la section 8

La métrique intérieure 3.3.113 peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dx^{02} - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3.182)$$

Déterminons à présent la fonction $\nu(r)$ en sachant que la densité de l'étoile est constante par hypothèse. Nous obtenons alors d'après 3.3.179 :

$$\nu' = -\frac{2p'}{\rho c^2 + p} \Rightarrow \nu' = -\frac{2(\rho c^2 + p)'}{\rho c^2 + p} = -2 \ln(\rho c^2 + p)' \quad (3.3.183)$$

Soit :

$$-\frac{\nu}{2} = \ln(\rho c^2 + p) + C_1 \Rightarrow {}^{36} De^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = -\chi \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (3.3.184)$$

En considérant 3.3.163, nous pouvons résoudre cette équation de la manière suivante :

$$-\frac{\nu' + \lambda'}{r} e^{-\lambda} = \chi \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = -De^{-\frac{\nu}{2}} \Rightarrow rDe^{-\frac{\nu}{2}} = \nu' e^{-\lambda} + \lambda' e^{-\lambda} = \nu' e^{-\lambda} - \frac{d}{dr}(e^{-\lambda}) \quad (3.3.185)$$

Ainsi, d'après 3.3.181, nous obtenons :

$$rDe^{-\frac{\nu}{2}} = \nu' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) = \nu' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) + \frac{2r}{\hat{r}^2} \quad (3.3.186)$$

Or, en posant :

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \gamma(r) \Rightarrow \gamma' = \frac{\nu'}{2} e^{\frac{\nu}{2}} \quad (3.3.187)$$

D'où 3.3.186 nous permet d'obtenir :

$$rD = \nu' e^{\frac{\nu}{2}} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) + \frac{2r}{\hat{r}^2} e^{\frac{\nu}{2}} = 2\gamma' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) + \frac{2r}{\hat{r}^2} \gamma \quad (3.3.188)$$

Or, la résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre s'appuie sur la superposition des solutions. La solution générale est la somme d'une solution particulière de l'équation non homogène et de la solution générale de l'équation homogène. Cette méthode exploite la linéarité des opérateurs différentiels pour construire une solution complète qui englobe tous les comportements possibles de l'équation³⁷.

36. En appliquant l'exponentielle à chaque membre de l'équation, on introduit une nouvelle constante d'intégration $D = e^{C_1}$ qui doit être cohérente avec la structure des équations de champ d'Einstein pour un fluide parfait. Dans ces équations, le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est proportionnel au tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ selon la constante gravitationnelle d'Einstein $\frac{8\pi G}{c^4}$ reliant la courbure de l'espace-temps à la distribution de la matière. Ainsi, l'équation $De^{-\frac{\nu}{2}} = \rho c^2 + p$ peut être réécrite de la manière suivante : $De^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)$, où D est déterminée par les conditions aux limites spécifiques pour une densité de matière ρ constante.

37. La résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre implique souvent l'utilisation de la superposition des solutions. Cette méthode repose sur le fait que les opérateurs différentiels sont linéaires, ce qui signifie que si deux fonctions f_1 et f_2 sont des solutions d'une équation différentielle linéaire, alors toute combinaison linéaire de ces fonctions $af_1 + bf_2$ est également une solution.

Ainsi, une solution particulière de cette équation est $\gamma_p = \frac{\hat{r}^2 D}{2}$.³⁸

Et la solution générale de l'équation homogène est donnée par³⁹ :

$$u' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) + \frac{r}{\hat{r}^2} u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \quad (3.3.189)$$

Démonstration. Intégrons les deux membres de l'équation.

L'intégration du premier membre implique u et sa dérivée u' , tandis que l'intégration du second membre s'effectue par rapport à r .

$$\int \frac{u'}{u} du = - \int \frac{r}{\hat{r}^2 - r^2} dr \quad (3.3.190)$$

Ce qui donne :

$$\ln u = \frac{1}{2} \ln(\hat{r}^2 - r^2) + C_1 \quad (3.3.191)$$

D'où :

$$u = -B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \quad 40 \quad (3.3.192)$$

□

La solution générale est donc donnée par :

$$\gamma = e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{\hat{r}^2 D}{2} - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.193)$$

Ainsi, nous obtenons la composante temporelle du tenseur métrique :

$$g_{00} = e^\nu = \left[A - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad (3.3.194)$$

Par identification et en considérant 6.1.3, nous obtenons :

$$\frac{\hat{r}^2 D}{2} = A \Rightarrow D = 2 \frac{A}{\hat{r}^2} = \frac{2\rho}{3} \frac{8\pi G}{c^2} A = -\chi \frac{2\rho}{3} A \quad (3.3.195)$$

Ainsi, en couplant 3.3.185 et 3.3.193, nous obtenons :

$$De^{-\frac{\nu}{2}} = -\chi \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = -\chi \frac{2\rho}{3} A \left[\frac{\hat{r}^2 D}{2} - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \right]^{-1} \quad (3.3.196)$$

38. En effet, cette solution appliquée au second membre de l'équation 3.3.188 permet d'obtenir le premier membre.

39. En posant $u = 2\gamma$

40. B est une constante d'intégration déterminée de telle sorte que la solution appliquée au premier membre de l'équation différentielle 3.3.189 permet de l'annuler.

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\rho + \frac{p}{c^2} = \frac{2\rho}{3} \frac{A}{\left[A - B \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]} \quad (3.3.197)$$

Or, si on considère que la pression s'annule à la surface de la sphère à $r = r_n$ ⁴¹, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$A = 3B \left(1 - \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \quad (3.3.198)$$

Pour déterminer B , il faut opérer un raccordement des métriques intérieures et extérieures à la surface de la sphère⁴², ce que l'on peut traduire de la manière suivante en considérant 3.3.194 :

$$g_{00}^{int}(r_n) = e^{\nu(r_n)} = \left[A - B \left(1 - \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = g_{00}^{ext}(r_n) = \left(1 - \frac{2GM}{r_n c^2}\right) \quad (3.3.199)$$

Ainsi, en considérant 3.3.198, nous pouvons en déduire⁴³ :

$$B^2 \left[3 \left(1 - \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 = \left(1 - \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right) \implies B = \frac{1}{2} \quad (3.3.200)$$

D'où nous pouvons obtenir :

$$A = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \quad (3.3.201)$$

Soit :

$$g_{00}^{int}(r) = \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2}\right]^2 \quad (3.3.202)$$

D'où la métrique intérieure de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left[\frac{3}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)}\right]^2 dx^{0^2} - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.203)$$

Cette métrique se raccorde à la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dx^{0^2} - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.204)$$

Nous pouvons ainsi en déduire selon la théorie classique de la RG, qu'une particule de matière ordinaire subira un champ gravitationnel attractif sous l'effet d'une distribution de masses positives.

41. Comme nous le verrons plus tard 8.2.9

42. Pour $r = r_n$, comme nous l'avons vu à la section 2.3.8

43. En considérant 3.3.171, 3.3.167 et 6.1.3.

Solution de la Seconde Équation de Champ 3.3.97

Considérons l'impact de la présence des masses positives sur la géométrie de l'espace-temps structurée par $h_{\mu\nu}$ de la seconde équation de champ 3.3.97 associée à la population des masses négatives. Nous rappelons qu'on est parfaitement libre de choisir le tenseur d'interaction $T_\mu^{\nu(g,h)}$, dans la mesure où ce choix peut découler d'une dérivation lagrangienne.

Nous avons ainsi choisi l'expression 3.3.106, que nous pouvons définir classiquement de la manière suivante :

$$T_\mu^{\nu(g,h)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{c^2} \end{pmatrix} \quad (3.3.205)$$

Nous pouvons construire les premiers membres à partir de la métrique 3.3.114, qui sont les mêmes que pour le cas précédent des masses positives⁴⁴. Au second membre de la seconde équation de champ 3.3.97, le rapport des déterminants sera considéré quasiment unitaire dans la mesure où nous effectuons ce calcul dans l'approximation newtonienne.

Ainsi, nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} = \sqrt{\frac{e^\nu e^{\lambda} r^4 \sin^2 \theta}{e^{\bar{\nu}} e^{\bar{\lambda}} r^4 \sin^2 \theta}} \approx 1 \quad (3.3.206)$$

Soit :

$$e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\lambda}'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi \rho \quad (3.3.207)$$

$$e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\nu}'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi \frac{p}{c^2} \quad (3.3.208)$$

$$e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{\bar{\nu}''}{2} - \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\nu}' - \bar{\lambda}'}{2r} \right) = -\chi \frac{p}{c^2} \quad (3.3.209)$$

$$-\frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{r} e^{-\bar{\lambda}} = -\chi \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) \quad (3.3.210)$$

D'où :

$$e^{\bar{\lambda}} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{2r} - \frac{\bar{\nu}''}{2} \quad (3.3.211)$$

44. Pour simplifier l'écriture, les exposants (g) et (h) ne seront pas pris en compte dans toute la démonstration. Étant donné que la source du champ gravitationnel de la seconde équation de champ 3.3.97 est créée par une masse positive, nous conserverons la forme classique des variables ρ , c et p au second membre. En revanche, le premier membre de cette équation décrit la géométrie induite par cette source sur les géodésiques parcourues par des masses négatives. Nous utiliserons donc les notations $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ au premier membre pour représenter ce phénomène physique.

Pour résoudre ces équations différentielles, nous pouvons procéder de manière similaire au cas précédent en posant :

$$e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{2\bar{m}(r)}{r} \implies 2\bar{m}(r) = r \left(1 - e^{-\bar{\lambda}}\right) \quad (3.3.212)$$

D'où :

$$-\frac{2\bar{m}'}{r^2} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\lambda}'}{r}\right) \quad (3.3.213)$$

$$(3.3.214)$$

Or, de manière similaire à l'équation (14.18) de [1], nous pouvons écrire :

$$\bar{m}' = -\frac{4\pi r^2 G}{c^2} \rho \implies \bar{m}(r) = -\frac{G\rho}{c^2} \int_0^r 4\pi r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{G}{c^2} = -m(r) \quad (3.3.215)$$

L'expression 3.3.208 nous permet ainsi d'obtenir :

$$\bar{\nu}' = 2 \frac{-m + \frac{4\pi G\rho r^3}{c^4}}{r(r + 2m)} \quad (3.3.216)$$

Or, en procédant à la dérivation de l'expression 3.3.208, nous obtenons :

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - \bar{\lambda}' e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\nu}'}{r}\right) + e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{-2}{r^3} + \frac{\bar{\nu}''}{r} - \frac{\bar{\nu}'}{r^2}\right) \quad (3.3.217)$$

D'où par simplification :

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{\bar{\lambda}'}{r^2} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{r} + \frac{2}{r^3} - \frac{\bar{\nu}''}{r} + \frac{\bar{\nu}'}{r^2}\right) \quad (3.3.218)$$

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r} \left(\frac{\bar{\lambda}'}{2r} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}''}{2} + \frac{\bar{\nu}'}{2r}\right) \quad (3.3.219)$$

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}''}{4} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{4} + \frac{\bar{\lambda}' + \bar{\nu}'}{2r} - \frac{\bar{\nu}''}{2} + \frac{\bar{\nu}''}{4} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{4}\right) \quad (3.3.220)$$

En combinant ce résultat avec l'expression 3.3.211, nous pouvons en déduire :

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = -e^{-\bar{\lambda}} \frac{\bar{\nu}'}{2r} (\bar{\nu}' + \bar{\lambda}') \quad (3.3.221)$$

D'où l'expression suivante par couplage avec la relation 3.3.210 :

$$-\chi \frac{p'}{c^2} = -\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r} (\bar{\nu}' + \bar{\lambda}') \frac{\bar{\nu}'}{2} = -\chi \left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) \frac{\bar{\nu}'}{2} \implies \frac{p'}{c^2} = \frac{\bar{\nu}'}{2} \left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) \quad (3.3.222)$$

En considérant l'expression 3.3.216, nous aboutissons alors à la solution de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) pour la population des masses négatives :

$$\frac{p'}{c^2} = -\frac{m - \frac{4\pi G\rho r^3}{c^4}}{r(r + 2m)} \left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) \quad (3.3.223)$$

Les deux solutions 3.3.180 et 3.3.223 tendent vers l'équation d'Euler dans l'approximation newtonienne. Cela correspond également à la satisfaction asymptotique des identités de Bianchi dans ce même contexte ⁴⁵.

Nous allons à présent établir la métrique intérieure de Schwarzschild associée à la population des masses négatives en appliquant le même schéma de calcul que pour la population des masses positives, ce qui constitue alors la solution de la seconde équation de champ 3.3.97.

En effet, en tenant compte de la relation (14.28) de [1] pour $r \leq R_s$ et de 3.3.212, nous pouvons établir la relation suivante :

$$e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{2\bar{m}(r)}{r} \implies e^{-\bar{\lambda}} = 1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \quad (3.3.224)$$

La métrique intérieure 3.3.114 peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\bar{d}s^2 = e^{\bar{\nu}(r)} dx^{02} - \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3.225)$$

Déterminons à présent la fonction $\bar{\nu}(r)$ en sachant que la densité de l'étoile est constante par hypothèse. Nous obtenons alors d'après 3.3.222 :

$$\bar{\nu}' = -\frac{2p'}{-\rho c^2 + p} \implies \bar{\nu}' = -\frac{2(\rho c^2 - p)'}{\rho c^2 - p} = -2 \ln(\rho c^2 - p)' \quad (3.3.226)$$

Soit :

$$-\frac{\bar{\nu}}{2} = \ln(\rho c^2 - p) + C_2 \implies \bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = -\chi \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) \quad (3.3.227)$$

En considérant 3.3.210, nous pouvons résoudre cette équation de la manière suivante :

$$-\frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{r} e^{-\bar{\lambda}} = -\chi \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) = \bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} \implies -r\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\nu}' e^{-\bar{\lambda}} - \frac{d}{dr}(e^{-\bar{\lambda}}) \quad (3.3.228)$$

Ainsi, d'après 3.3.224, nous obtenons :

$$-r\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\nu}' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) = \bar{\nu}' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{2r}{\hat{r}^2} \quad (3.3.229)$$

Or, en posant :

$$e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\gamma}(r) \implies \bar{\gamma}' = \frac{\bar{\nu}'}{2} e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} \quad (3.3.230)$$

D'où 3.3.229 nous permet d'obtenir :

$$-r\bar{D} = \bar{\nu}' e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{2r}{\hat{r}^2} e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = 2\bar{\gamma}' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{2r}{\hat{r}^2} \bar{\gamma} \quad (3.3.231)$$

45. L'inégalité $r \gg 2m$ (où m est souvent remplacé par $\frac{GM}{c^2}$ (3.3.167) pour obtenir une dimension de longueur, M étant la masse de l'objet et G la constante gravitationnelle) indique que l'on est suffisamment loin de la source gravitationnelle pour que les effets de la relativité générale soient négligeables. En effet, à de grandes distances, la longueur $\frac{2GM}{c^2}$ est totalement négligeable.

Une solution particulière de cette équation est $\bar{\gamma}_p = \frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2}$.

Et la solution générale de l'équation homogène est donnée par ⁴⁶ :

$$\bar{u}' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right) - \frac{r}{\hat{r}^2} \bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = \bar{B} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \quad (3.3.232)$$

D'où la solution générale :

$$\bar{\gamma} = e^{\frac{\bar{v}}{2}} = \frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} + \bar{B} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.233)$$

Ainsi, nous obtenons la composante temporelle du tenseur métrique :

$$\bar{g}_{00} = e^{\bar{v}} = \left[\bar{A} + \bar{B} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad (3.3.234)$$

Par identification et en considérant 6.1.3, nous obtenons :

$$\frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} = \bar{A} \Rightarrow \bar{D} = 2 \frac{\bar{A}}{\hat{r}^2} = \frac{2\rho}{3} \frac{8\pi G}{c^2} \bar{A} = -\chi \frac{2\rho}{3} \bar{A} \quad (3.3.235)$$

Ainsi, en couplant 3.3.228 et 3.3.233, nous obtenons :

$$\bar{D} e^{-\frac{\bar{v}}{2}} = -\chi \left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) = -\chi \frac{2\rho}{3} \bar{A} \left[\frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} + \bar{B} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right]^{-1} \quad (3.3.236)$$

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\rho - \frac{p}{c^2} = \frac{2\rho}{3} \frac{\bar{A}}{\left[\bar{A} + \bar{B} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right]} \quad (3.3.237)$$

Or, si on considère que la pression s'annule à la surface de la sphère à $r = r_n$, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$\bar{A} = -3\bar{B} \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \quad (3.3.238)$$

Pour déterminer \bar{B} , il faut opérer un raccordement des métriques intérieures et extérieures à la surface de la sphère, ce que l'on peut traduire de la manière suivante en considérant 3.3.234 :

$$\bar{g}_{00}^{int}(r_n) = e^{\bar{v}(r_n)} = \left[\bar{A} + \bar{B} \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right]^2 = \bar{g}_{00}^{ext}(r_n) = \left(1 + \frac{2GM}{r_n c^2}\right) \quad (3.3.239)$$

Ainsi, en tenant compte de l'expression 3.3.238, nous pouvons en déduire :

$$\left[-3\bar{B} \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} + \bar{B} \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right]^2 = \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right) \implies B = \frac{1}{2} \quad (3.3.240)$$

46. En posant $\bar{u} = 2\bar{\gamma}$

D'où nous pouvons obtenir :

$$\bar{A} = -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \quad (3.3.241)$$

Soit :

$$\bar{g}_{00}^{int}(r) = \left[-\frac{3}{2} \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \right]^2 \quad (3.3.242)$$

D'où la métrique intérieure de Schwarzschild :

$$\bar{d}s^2 = \left[\frac{3}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} \right]^2 dx^{0^2} - \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.243)$$

Cette métrique se raccorde à la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$\bar{d}s^2 = \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dx^{0^2} - \frac{dr^2}{1 + \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.244)$$

Nous pouvons en déduire qu'une particule de masse négative subira un champ gravitationnel répulsif sous l'effet d'une distribution de masses positives.

Ainsi, la forme générale est donnée par :

$$ds^{(f)^2} = \left[\frac{3}{2} \sqrt{\left(1 - \varepsilon \frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \varepsilon \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} \right]^2 dx^{0^2} - \frac{dr^2}{1 - \varepsilon \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.245)$$

Avec $\varepsilon = 1$ pour représenter des masses de même signe qui s'attirent, et $\varepsilon = -1$ pour des masses de signes opposés qui se repoussent.

Le paradigme de la Relativité Générale (RG) peut être résumé de la manière suivante :

L'univers est une variété M_4 , équipée d'une métrique, solution de l'équation de champ d'Einstein 2.3.1.

Le modèle Janus de Jean-Pierre Petit est une extension de la RG :

L'univers est une variété M_4 , équipée de deux métriques, solutions du système d'équations de champ couplées 3.3.54 et 3.3.55.

Dans ces conditions, la RG représente une approximation de ce modèle, dans les régions où la masse négative peut être négligée, par exemple au voisinage du Soleil. C'est évidemment une proposition extrêmement ambitieuse, qui nécessite des confirmations observationnelles pour être crédible.

3.3.8 Compatibilité des Équations de Champ au voisinage du Répulseur du Dipôle

Considérons à présent les régions où les masses négatives dominent, par exemple, au voisinage du Répulseur du Dipôle. Nous pouvons déterminer la solution de chacune des équations de champ 3.3.100 et 3.3.101.

Solution de la première Équation de Champ 3.3.100

Considérons l'impact de la présence des masses négatives sur la géométrie de l'espace-temps structurée par $g_{\mu\nu}$ de la première équation de champ 3.3.100 associée à la population des masses positives. On peut choisir le tenseur d'interaction $T_{\mu}^{\nu(h,g)}$ de la manière suivante, dans la mesure où ce choix peut découler d'une dérivation lagrangienne⁴⁷ :

$$T_{\mu}^{\nu(h,g)} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\bar{p}}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{p}}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{p}}{c^2} \end{pmatrix} \quad (3.3.246)$$

Nous pouvons construire les premiers membres à partir de la métrique 3.3.113, qui sont les mêmes que pour les cas précédents. Au second membre de la première équation de champ 3.3.100, le rapport des déterminants sera considéré quasiment unitaire.

Ainsi, nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} = \sqrt{\frac{e^{\bar{\nu}} e^{\bar{\lambda}} r^4 \sin^2 \theta}{e^{\nu} e^{\lambda} r^4 \sin^2 \theta}} \approx 1 \quad (3.3.247)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi \bar{\rho} \quad (3.3.248)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi \frac{\bar{p}}{c^2} \quad (3.3.249)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) = -\chi \frac{\bar{p}}{c^2} \quad (3.3.250)$$

$$-\frac{\nu' + \lambda'}{r} e^{-\lambda} = -\chi \left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{c^2} \right) \quad (3.3.251)$$

D'où :

$$e^{\lambda} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu' + \lambda'}{2r} - \frac{\nu''}{2} \quad (3.3.252)$$

47. Pour simplifier l'écriture, les exposants (g) et (h) ne seront pas pris en compte dans toute la démonstration. Étant donné que la source du champ gravitationnel de la première équation de champ 3.3.100 est créée par une masse négative, nous utiliserons les notations $\bar{\rho}$, \bar{c} et \bar{p} au second membre pour représenter ce phénomène physique. En revanche, le premier membre de cette équation décrit la géométrie induite par cette source sur les géodésiques parcourues par des masses positives. Nous conserverons donc la forme classique des variables λ et ν au premier membre.

Pour résoudre ces équations différentielles, nous pouvons procéder de manière similaire à l'étude précédente :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \implies 2m(r) = r(1 - e^{-\lambda}) \quad \text{avec} \quad m = \frac{GM}{c^2} \quad (3.3.253)$$

D'où :

$$-\frac{2m'}{r^2} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (3.3.254)$$

$$(3.3.255)$$

Or, de manière similaire à l'équation (14.18) de [1], nous pouvons écrire :

$$m' = \frac{4\pi r^2 G}{c^2} \rho \implies m(r) = \frac{G\rho}{c^2} \int_0^r 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{G}{c^2} \quad (3.3.256)$$

L'expression 3.3.249 couplée à l'expression 3.3.253 nous permet ainsi d'obtenir :

$$\nu' = 2 \frac{-m + \frac{4\pi G \bar{\rho} r^3}{c^4}}{r(r + 2m)} \quad (3.3.257)$$

Or, en procédant à la dérivation de l'expression 3.3.249, nous obtenons :

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - \lambda' e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + e^{-\lambda} \left(\frac{-2}{r^3} + \frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2} \right) \quad (3.3.258)$$

D'où par simplification :

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r^2} + \frac{\lambda' \nu'}{r} + \frac{2}{r^3} - \frac{\nu''}{r} + \frac{\nu'}{r^2} \right) \quad (3.3.259)$$

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2 \frac{e^{-\lambda}}{r} \left(\frac{\lambda'}{2r} + \frac{\lambda' \nu'}{2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{2r} \right) \quad (3.3.260)$$

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2 \frac{e^{-\lambda}}{r} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda' + \nu'}{2r} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda' \nu'}{4} \right) \quad (3.3.261)$$

En combinant ce résultat avec l'expression 3.3.252, nous pouvons en déduire :

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = -e^{-\lambda} \frac{\nu'}{2r} (\nu' + \lambda') \quad (3.3.262)$$

D'où l'expression suivante par couplage avec la relation 3.3.251 :

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = -\frac{e^{-\lambda}}{r} (\nu' + \lambda') \frac{\nu'}{2} = -\chi \left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{c^2} \right) \frac{\nu'}{2} \implies \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{\nu'}{2} \left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{c^2} \right) \quad (3.3.263)$$

En considérant l'expression 3.3.257, nous aboutissons alors à la solution de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) pour la population des masses positives⁴⁸ :

$$\frac{\bar{p}'}{c^2} = -\frac{m - \frac{4\pi G \bar{\rho} r^3}{c^4}}{r(r + 2m)} \left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{c^2} \right) \quad (3.3.264)$$

48. L'impact du gradient de pression des masses négatives sur les géodésiques parcourues par la matière ordinaire et les photons d'énergie positive

Nous allons à présent établir la métrique intérieure de Schwarzschild solution de la première équation de champ 3.3.100.

En effet, en tenant compte de la relation (14.28) de [1] pour $r \leq R_s$ et de 3.3.253, nous pouvons établir la relation suivante :

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \implies e^{-\lambda} = 1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \quad (3.3.265)$$

La métrique intérieure 3.3.113 peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dx^{02} - \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3.266)$$

Déterminons à présent la fonction $\nu(r)$ en sachant que la densité de la sphère est constante par hypothèse. Nous obtenons alors d'après 3.3.222 :

$$\nu' = -\frac{2\bar{p}'}{-\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p}} \implies \nu' = -\frac{2(\bar{\rho}\bar{c}^2 - \bar{p})'}{\bar{\rho}\bar{c}^2 - \bar{p}} = -2 \ln(\bar{\rho}\bar{c}^2 - \bar{p})' \quad (3.3.267)$$

Soit :

$$-\frac{\nu}{2} = \ln(\bar{\rho}\bar{c}^2 - \bar{p}) + C_2 \implies De^{-\frac{\nu}{2}} = -\chi \left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \right) \quad (3.3.268)$$

En considérant 3.3.251, nous pouvons résoudre cette équation de la manière suivante :

$$-\frac{\nu' + \lambda'}{r} e^{-\lambda} = -\chi \left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \right) = De^{-\frac{\nu}{2}} \implies -rDe^{-\frac{\nu}{2}} = \nu' e^{-\lambda} - \frac{d}{dr}(e^{-\lambda}) \quad (3.3.269)$$

Ainsi, d'après 3.3.265, nous obtenons :

$$-rDe^{-\frac{\nu}{2}} = \nu' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) = \nu' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{2r}{\hat{r}^2} \quad (3.3.270)$$

Or, en posant :

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \gamma(r) \implies \gamma' = \frac{\nu'}{2} e^{\frac{\nu}{2}} \quad (3.3.271)$$

D'où 3.3.270 nous permet d'obtenir :

$$-rD = \nu' e^{\frac{\nu}{2}} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{2r}{\hat{r}^2} e^{\frac{\nu}{2}} = 2\gamma' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{2r}{\hat{r}^2} \gamma \quad (3.3.272)$$

Une solution particulière de cette équation est $\gamma_p = \frac{\hat{r}^2 D}{2}$.

Et la solution générale de l'équation homogène est donnée par⁴⁹ :

$$u' \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{r}{\hat{r}^2} u = 0 \implies u = B \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \quad (3.3.273)$$

49. En posant $u = 2\gamma$

D'où la solution générale :

$$\gamma = e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{\hat{r}^2 D}{2} + B \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.274)$$

Ainsi, nous obtenons la composante temporelle du tenseur métrique :

$$g_{00} = e^\nu = \left[A + B \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad (3.3.275)$$

Par identification et en considérant 6.1.3, nous obtenons :

$$\frac{\hat{r}^2 D}{2} = A \Rightarrow D = 2 \frac{A}{\hat{r}^2} = \frac{2\bar{\rho} 8\pi G}{3 \bar{c}^2} A = -\chi \frac{2\bar{\rho}}{3} A \quad (3.3.276)$$

Ainsi, en couplant 3.3.269 et 3.3.274, nous obtenons :

$$D e^{-\frac{\nu}{2}} = -\chi \left(\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \right) = -\chi \frac{2\bar{\rho}}{3} A \left[\frac{\hat{r}^2 D}{2} + B \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \quad (3.3.277)$$

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\bar{\rho} - \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} = \frac{2\bar{\rho}}{3} \frac{A}{\left[A + B \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (3.3.278)$$

Or, si on considère que la pression s'annule à la surface de la sphère à $r = r_n$, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$A = -3B \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.279)$$

Pour déterminer B , il faut opérer un raccordement des métriques intérieures et extérieures à la surface de la sphère, ce que l'on peut traduire de la manière suivante en considérant 3.3.275 :

$$g_{00}^{int}(r_n) = e^{\nu(r_n)} = \left[A + B \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = g_{00}^{ext}(r_n) = \left(1 + \frac{2GM}{r_n c^2}\right) \quad (3.3.280)$$

Ainsi, en tenant compte de l'expression 3.3.279, nous pouvons en déduire :

$$\left[-3B \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} + B \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right) \Rightarrow B = \frac{1}{2} \quad (3.3.281)$$

D'où nous pouvons obtenir :

$$A = -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.282)$$

Soit :

$$g_{00}^{int}(r) = \left[-\frac{3}{2} \left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \right]^2 \quad (3.3.283)$$

D'où la solution métrique intérieure de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left[\frac{3}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} \right]^2 dx^{0^2} - \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.284)$$

Cette métrique se raccorde à la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dx^{0^2} - \frac{dr^2}{1 + \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.285)$$

Nous pouvons en déduire qu'une particule de matière ordinaire subira un champ gravitationnel répulsif sous l'effet d'une distribution de masses négatives.

Solution de la seconde Équation de Champ 3.3.101

Ici, la source du champ gravitationnel de la seconde équation de champ 3.3.101 est créée par une masse négative. J'adopte donc la même forme des variables $\bar{\rho}$, \bar{c} et \bar{p} au second membre. Le premier membre de cette équation décrivant la géométrie induite par cette source sur les géodésiques parcourues par des masses négatives, j'utilise également les notations $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ au premier membre pour représenter ce phénomène physique.

Examinons la construction classique de la métrique intérieure en partant de l'expression du tenseur énergie-impulsion $T_\mu^{\nu(h,h)}$ de la seconde équation de champ 3.3.101 associée à la population des masses négatives que je suis parfaitement libre de définir de la manière suivante :

$$T_\mu^{\nu(h,h)} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \end{pmatrix} \quad (3.3.286)$$

Ainsi, nous pouvons poser les équations différentielles suivantes :

$$e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\lambda}'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \chi \bar{\rho} \quad (3.3.287)$$

$$e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\nu}'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \quad (3.3.288)$$

$$e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{\bar{\nu}'}{2} - \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}^2}{4} + \frac{\bar{\nu}' - \bar{\lambda}'}{2r} \right) = -\chi \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \quad (3.3.289)$$

$$-\frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{r} e^{-\bar{\lambda}} = \chi \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \right) \quad (3.3.290)$$

D'où :

$$e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\lambda}'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = e^{-\bar{\lambda}} \left[\frac{\bar{\nu}'}{2} - \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\nu}' - \bar{\lambda}'}{2r} \right] \quad (3.3.291)$$

$$e^{\bar{\lambda}} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\nu}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{2r} - \frac{\bar{\nu}'}{2} \quad (3.3.292)$$

Pour résoudre ces équations différentielles, nous pouvons procéder de manière similaire à l'expression (14.15) de la référence [1] du chapitre 14 en posant :

$$e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{2\bar{m}(r)}{r} \implies 2\bar{m}(r) = r \left(1 - e^{-\bar{\lambda}} \right) \quad (3.3.293)$$

En considérant 3.3.287, si nous dérivons cette expression, nous obtenons :

$$2\bar{m}' = \left(1 - e^{-\bar{\lambda}} \right) + r\bar{\lambda}'e^{-\bar{\lambda}} \quad (3.3.294)$$

$$-\frac{2\bar{m}'}{r^2} = \frac{-1 + e^{-\bar{\lambda}} - r\bar{\lambda}'e^{-\bar{\lambda}}}{r^2} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\lambda}'}{r} \right) \quad (3.3.295)$$

$$\bar{m}' = -\frac{r^2\chi\bar{\rho}}{2} = \frac{4\pi r^2 G}{c^2} \bar{\rho} \quad (3.3.296)$$

De manière similaire à l'équation (14.18) de [1], nous pouvons en déduire :

$$\bar{m}(r) = \frac{G\bar{\rho}}{c^2} \int_0^r 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{\rho} \frac{G}{c^2} \quad (3.3.297)$$

L'expression 3.3.288 couplée à l'expression 3.3.293 nous permet d'obtenir :

$$\bar{\nu}' = \frac{r}{r(r-2\bar{m})} \left(-\chi \frac{\bar{\rho} r^2}{c^2} + 1 \right) - \frac{(r-2\bar{m})}{r(r-2\bar{m})} \quad (3.3.298)$$

D'où :

$$\bar{\nu}' = 2 \frac{\bar{m} + \frac{4\pi G \bar{\rho} r^3}{c^4}}{r(r-2\bar{m})} \quad (3.3.299)$$

Or, en procédant à la dérivation de l'expression 3.3.288, nous obtenons :

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - \bar{\lambda}' e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\bar{\nu}'}{r} \right) + e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{-2}{r^3} + \frac{\bar{\nu}'}{r} - \frac{\bar{\nu}'}{r^2} \right) \quad (3.3.300)$$

D'où par simplification :

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - e^{-\bar{\lambda}} \left(\frac{\bar{\lambda}'}{r^2} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{r} + \frac{2}{r^3} - \frac{\bar{\nu}'}{r} + \frac{\bar{\nu}'}{r^2} \right) \quad (3.3.301)$$

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2 \frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r} \left(\frac{\bar{\lambda}'}{2r} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{2} + \frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}'}{2} + \frac{\bar{\nu}'}{2r} \right) \quad (3.3.302)$$

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = \frac{2}{r^3} - 2 \frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{4} + \frac{\bar{\lambda}' + \bar{\nu}'}{2r} - \frac{\bar{\nu}'}{2} + \frac{\bar{\nu}'^2}{4} + \frac{\bar{\lambda}'\bar{\nu}'}{4} \right) \quad (3.3.303)$$

En combinant ce résultat avec l'expression 3.3.292, nous pouvons en déduire :

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = -e^{-\bar{\lambda}} \frac{\bar{\nu}'}{2r} (\bar{\nu}' + \bar{\lambda}') \quad (3.3.304)$$

D'où l'expression suivante par couplage avec la relation 3.3.290 :

$$-\chi \frac{\bar{p}'}{c^2} = -\frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r} (\bar{\nu}' + \bar{\lambda}') \frac{\bar{\nu}'}{2} = \chi \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right) \frac{\bar{\nu}'}{2} \implies \frac{\bar{p}'}{c^2} = -\frac{\bar{\nu}'}{2} \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right) \quad (3.3.305)$$

En considérant l'expression 3.3.299, nous pouvons en déduire l'équation classique de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) :

$$\frac{\bar{p}'}{c^2} = -\frac{\bar{m} + \frac{4\pi G \bar{p} r^3}{c^4}}{r(r - 2\bar{m})} \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right) \quad (3.3.306)$$

Les deux solutions 3.3.264 et 3.3.306 tendent vers l'équation d'Euler dans l'approximation newtonienne. La compatibilité des deux équations de champ est assurée de manière asymptotique.

La forme du tenseur d'interaction 3.3.246 et du tenseur énergie-impulsion 3.3.286 permet de satisfaire les conditions de Bianchi. Ceci ne serait évidemment plus le cas si la masse négative sortait de ce cadre. Pour cela, il faudrait qu'il existe des étoiles à neutrons de masse négative. Or, le temps caractéristique d'évolution des conglomerats de masse négative⁵⁰, dépasse l'âge de l'univers. Ces conglomerats sphéroïdaux ne pouvant évoluer, le contenu de cet espace-temps négatif se limitera à un mélange d'anti-hydrogène et d'anti-hélium de masse négative. La nucléosynthèse ne pouvant se produire, il ne peut donc y avoir ni anti-galaxies, ni anti-étoiles, quelles que soient leur masse. Par conséquent, il ne peut exister d'anti-étoiles à neutrons⁵¹.

Par ailleurs, dans le cas où cet espace-temps négatif engendrerait des astres hyperdenses par un mécanisme encore inconnu, il serait alors nécessaire de reconsidérer la forme de ces tenseurs. Cependant, la configuration actuelle satisfait à toutes les données observationnelles actuellement et potentiellement disponibles.

Les photons d'énergie positive, émis par les sources situées derrière le Répulseur du Dipôle, subiront une diminution significative de leur magnitude en raison de l'effet de lentille gravitationnelle négative. Ces photons traversent alors librement ce grand vide. L'effet sera maximal lorsque les photons frôlent ce conglomerat sphéroïdal, où l'intégralité de la masse doit être prise en compte. En revanche, il sera négligeable lorsque ces photons traversent le voisinage central (Figure 3.16).

Ainsi, lorsqu'une cartographie sera établie par le télescope JWST, la masse invisible pourrait manifester sa présence par une atténuation de luminosité, non pas sur l'ensemble d'un disque, mais selon un anneau.

50. leur "cooling time"

51. Consulter la section Nature de l'antimatière primordiale

Déterminons maintenant la forme explicite de la métrique intérieure.

En tenant compte de la relation (14.28) de [1] pour $r \leq R_s$, nous pouvons établir l'un des termes de la métrique à partir de 3.3.293 :

$$e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{2\bar{m}(r)}{r} = 1 - \frac{8}{3}\pi r^2 \bar{\rho} \frac{G}{c^2} \implies e^{-\bar{\lambda}} = 1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \quad (3.3.307)$$

La métrique intérieure 3.3.114 peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\bar{d}s^2 = e^{\bar{\nu}(r)} dx^{02} - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.3.308)$$

Déterminons à présent la fonction $\bar{\nu}(r)$ en sachant que la densité de la sphère est constante par hypothèse. Nous obtenons alors d'après 3.3.305 :

$$\bar{\nu}' = -\frac{2\bar{p}'}{\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p}} \implies \bar{\nu}' = -\frac{2(\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p})'}{\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p}} = -2 \ln(\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p})' \quad (3.3.309)$$

Soit :

$$-\frac{\bar{\nu}}{2} = \ln(\bar{\rho}\bar{c}^2 + \bar{p}) + C_1 \implies \bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right) = -\chi \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right) \quad (3.3.310)$$

En considérant 3.3.290, nous pouvons résoudre cette équation de la manière suivante :

$$-\frac{\bar{\nu}' + \bar{\lambda}'}{r} e^{-\bar{\lambda}} = \chi \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{c^2} \right) = -\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} \implies r\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\nu}'e^{-\bar{\lambda}} + \bar{\lambda}'e^{-\bar{\lambda}} = \bar{\nu}'e^{-\bar{\lambda}} - \frac{d}{dr}(e^{-\bar{\lambda}}) \quad (3.3.311)$$

Ainsi, d'après 3.3.307, nous obtenons :

$$r\bar{D}e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\nu}' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) = \bar{\nu}' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) + \frac{2r}{\hat{r}^2} \quad (3.3.312)$$

Or, en posant :

$$e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = \bar{\gamma}(r) \implies \bar{\gamma}' = \frac{\bar{\nu}'}{2} e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} \quad (3.3.313)$$

D'où 3.3.312 nous permet d'obtenir :

$$r\bar{D} = \bar{\nu}' e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) + \frac{2r}{\hat{r}^2} e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = 2\bar{\gamma}' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) + \frac{2r}{\hat{r}^2} \bar{\gamma} \quad (3.3.314)$$

Une solution particulière de cette équation est $\bar{\gamma}_p = \frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2}$.⁵²

Et la solution générale de l'équation homogène est donnée par⁵³ :

$$\bar{u}' \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right) + \frac{r}{\hat{r}^2} \bar{u} = 0 \implies \bar{u} = -\bar{B} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \quad (3.3.315)$$

52. En effet, cette solution appliquée au second membre de l'équation 3.3.314 permet d'obtenir le premier membre.

53. En posant $\bar{u} = 2\bar{\gamma}$

La solution générale est donc donnée par :

$$\bar{\gamma} = e^{\frac{\bar{\nu}}{2}} = \frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} - \bar{B} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.316)$$

Ainsi, nous obtenons la composante temporelle du tenseur métrique :

$$\bar{g}_{00} = e^{\bar{\nu}} = \left[\bar{A} - \bar{B} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad (3.3.317)$$

Par identification et en considérant 6.1.3, nous obtenons :

$$\frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} = \bar{A} \Rightarrow \bar{D} = 2 \frac{\bar{A}}{\hat{r}^2} = \frac{2\bar{\rho}}{3} \frac{8\pi G}{\bar{c}^2} \bar{A} = -\chi \frac{2\bar{\rho}}{3} \bar{A} \quad (3.3.318)$$

Ainsi, en couplant 3.3.311 et 3.3.316, nous obtenons :

$$\bar{D} e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} = -\chi \left(\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} \right) = -\chi \frac{2\bar{\rho}}{3} \bar{A} \left[\frac{\hat{r}^2 \bar{D}}{2} - \bar{B} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right]^{-1} \quad (3.3.319)$$

Ce qui nous permet d'en déduire :

$$\bar{\rho} + \frac{\bar{p}}{\bar{c}^2} = \frac{2\bar{\rho}}{3} \frac{\bar{A}}{\left[\bar{A} - \bar{B} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right]} \quad (3.3.320)$$

Or, si on considère que la pression s'annule à la surface de la sphère à $r = \bar{r}_n$, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$\bar{A} = 3\bar{B} \left(1 - \frac{\bar{r}_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \quad (3.3.321)$$

Pour déterminer B , il faut opérer un raccordement des métriques intérieures et extérieures à la surface de la sphère, ce que l'on peut traduire de la manière suivante en considérant 3.3.317 :

$$\bar{g}_{00}^{int}(\bar{r}_n) = e^{\bar{\nu}(\bar{r}_n)} = \left[\bar{A} - \bar{B} \left(1 - \frac{\bar{r}_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right]^2 = \bar{g}_{00}^{ext}(\bar{r}_n) = \left(1 - \frac{2G\bar{M}}{\bar{r}_n \bar{c}^2}\right) \quad (3.3.322)$$

Ainsi, en considérant 3.3.321, nous pouvons en déduire :

$$\bar{B}^2 \left[3 \left(1 - \frac{\bar{r}_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\bar{r}_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right]^2 = \left(1 - \frac{\bar{r}_n^2}{\hat{r}^2}\right) \implies \bar{B} = \frac{1}{2} \quad (3.3.323)$$

D'où nous pouvons obtenir :

$$\bar{A} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\bar{r}_n^2}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \quad (3.3.324)$$

Soit :

$$\bar{g}_{00}^{int}(r) = \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\bar{r}_n^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \right]^2 \quad (3.3.325)$$

D'où la métrique intérieure de Schwarzschild :

$$\bar{d}s^2 = \left[\frac{3}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{\bar{r}_n^2}{\hat{r}^2} \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} \right]^2 dx^{02} - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\hat{r}^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.326)$$

Cette métrique se raccorde à la métrique extérieure de Schwarzschild :

$$\bar{d}s^2 = \left(1 - \frac{2G\bar{M}}{\bar{c}^2 r} \right) \bar{c}^2 dx^{02} - \frac{dr^2}{1 - \frac{2G\bar{M}}{\bar{c}^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3.327)$$

Nous pouvons en déduire qu'une particule de masse négative subira un champ gravitationnel attractif sous l'effet d'une distribution de masses négatives.

Chapitre 4

Modélisation de la Dynamique Galactique

Ce chapitre est extrait du fichier de G. D'Agostini ¹.

Il a été possible de construire un modèle de galaxie à symétrie sphérique entourée par un halo de masses négatives. Cette dernière a un effet confinant qui explique un certain nombre de phénomènes généralement attribués à la matière noire dans le cadre du Modèle Standard Λ CDM, notamment sa décélération résultant de son interaction par *friction dynamique* avec son environnement de masse négative, ainsi que sa structure spirale. Ce modèle explique également pourquoi les étoiles dans les régions extérieures des galaxies se déplacent à des vitesses plus élevées que celles prédites par la seule gravité de la matière visible. Sans les masses négatives, les lois de la gravité newtonienne suggéreraient que ces étoiles devraient se déplacer plus lentement, étant plus éloignées du centre massif de la galaxie. Cependant, les observations montrent que ces étoiles ont des vitesses relativement élevées, ce qui suggère l'influence anti-gravitationnelle supplémentaire d'une masse invisible, à savoir la matière à masse négative.

Les galaxies elliptiques représentent une proportion significative de la masse de l'Univers visible. Elles sont principalement composées d'étoiles âgées, caractérisées par une forte dispersion de vitesse et réparties dans le disque ² ainsi que dans l'halo galactique, et contiennent très peu de gaz ³. À l'opposé, les galaxies spirales contiennent environ 10% de leur masse sous forme de gaz interstellaire. Ce gaz se concentre principalement autour du plan diamétral, formant un disque très aplati. Sa distribution n'est pas uniforme, mais présente des condensations, les plus signi-

1. <http://www.jp-petit.org.papers/cosmo/2016-Dagostini-courbe-rotation.pdf>

2. Le disque se réfère à une structure plate et étendue, qui est distincte des régions centrales plus denses des galaxies, appelées bulbes, et des halos galactiques externes, qui contiennent des étoiles plus anciennes et moins de gaz.

3. Les galaxies elliptiques se distinguent par leur forme sphéroïdale ou elliptique sans bras spiraux distincts. Elles ont généralement une distribution homogène d'étoiles âgées et peu de formation stellaire en cours, en raison de la rareté du gaz nécessaire à la naissance de nouvelles étoiles. Ces galaxies sont souvent trouvées dans des environnements densément peuplés comme les centres des amas de galaxies.

ficatives contribuant à la structure en spirale de la galaxie. Dans ces galaxies, les étoiles jeunes, à faible dispersion de vitesse et concentrées près du plan de symétrie, se trouvent principalement dans les bras spiraux.

Les amas globulaires, en revanche, sont des systèmes à symétrie sphérique, pratiquement dépourvus de gaz.

Pour étudier la dynamique des systèmes stellaires, tels que les galaxies ou les amas globulaires, il est donc raisonnable en première approximation de négliger la présence du gaz et de se concentrer uniquement sur la population d'étoiles âgées, à forte dispersion de vitesse. Il est à noter qu'à l'échelle d'une rotation galactique, ces systèmes sont pratiquement non collisionnels et peuvent être décrits par *l'équation de Vlasov*.

4.1 L'Équation de Vlasov et ses Composants

Les systèmes stellaires auto-gravitants avaient déjà été modélisés en 1942 par S. Chandrasekhar [18] en utilisant une solution de type Maxwell-Boltzmann de *l'équation de Vlasov*, couplée à *l'équation de Poisson*. Les étoiles dans les galaxies formant des ensembles non-collisionnels⁴.

En effet, *l'équation de Vlasov* est une équation fondamentale en physique des plasmas et en dynamique stellaire qui décrit l'évolution temporelle de la *fonction de distribution* $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ dans *l'espace des phases* pour un système de particules sous l'influence d'un champ de force conservatif. Cette équation aide les scientifiques à comprendre comment les groupes de particules, comme les étoiles dans une galaxie ou les particules dans un plasma, se déplacent et se comportent au fil du temps.

La *fonction de distribution* dont il est question dans cette équation représente la répartition des particules dans un espace qui prend en compte à la fois leur position et leur vitesse. Cet *espace des phases* est un outil conceptuel qui permet de visualiser et de calculer le comportement d'un grand nombre de particules simultanément.

L'équation de Vlasov est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f - \nabla_{\vec{r}} \Psi \cdot \nabla_{\vec{v}} f = 0 \quad (4.1.1)$$

où :

- $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ est la fonction de distribution qui représente la densité numérique de particules dans l'espace des phases à une position \vec{r} , avec une vitesse \vec{v} , au

4. Lorsque la fonction de distribution évolue *sans collision* selon *l'équation de Vlasov*, cela signifie qu'elle décrit le mouvement des particules en considérant qu'elles ne se heurtent pas directement les unes avec les autres. C'est une approximation utile pour étudier des systèmes comme les galaxies, où les étoiles sont si éloignées les unes des autres qu'elles interagissent principalement par la gravité et non par des collisions directes.

temps t .

- $\frac{\partial f}{\partial t}$ est la dérivée partielle de la fonction de distribution par rapport au temps, représentant le changement de la fonction de distribution au fil du temps.
- $\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f$ représente la dérivée convective⁵ dans l'espace de position, qui décrit comment la fonction de distribution change en raison du mouvement des particules à travers l'espace à la vitesse \vec{v} .
- $\Psi(\vec{r}, t)$ est le champ potentiel scalaire, qui dépend de la position et du temps, et son gradient négatif $-\nabla_{\vec{r}}\Psi$ donne la force par unité de masse agissant sur les particules.
- $-\nabla_{\vec{r}}\Psi \cdot \nabla_{\vec{v}}f$ est le terme de force, représentant comment la fonction de distribution change en raison des forces agissant sur les particules, modifiant leurs vitesses.

L'équation affirme que la fonction de distribution est constante le long des trajectoires des particules en l'absence de collisions, ce qui est connu comme le *théorème de Liouville*. Cette propriété est importante pour la conservation de la densité de l'espace des phases et sous-tend la dynamique sans collision décrite par l'équation de Vlasov.

NB :

- Dans un contexte physique, le terme $-\nabla_{\vec{r}}\Psi$ représente la force agissant sur une particule. Pour un potentiel scalaire $\Psi(\vec{r}, t)$, le gradient négatif par rapport à la position, écrit comme $-\nabla_{\vec{r}}\Psi$, nous donne le vecteur force \vec{F} . Cette relation est une pierre angulaire de la mécanique classique et est décrite par l'équation :

$$\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}}\Psi \tag{4.1.2}$$

où :

- \vec{F} est le vecteur force ressenti par une particule,
- $\nabla_{\vec{r}}$ désigne le gradient par rapport à la position,
- $\Psi(\vec{r}, t)$ est le champ potentiel scalaire qui dépend de la position \vec{r} et du temps t .

Le signe négatif indique que la force agit dans la direction d'une énergie potentielle décroissante, ce qui s'aligne avec le principe physique selon lequel les particules tendent à se déplacer des régions de haute énergie potentielle

5. La dérivée convective décrit comment une quantité (comme la densité, la vitesse, la température, etc.) change en suivant le mouvement général d'un système fluide. Elle prend en compte à la fois la variation de la quantité dans le temps et la variation due au déplacement du fluide.

vers des régions de basse énergie potentielle.

- **La distribution de Maxwell-Boltzmann**, nommée d’après James Clerk Maxwell et Ludwig Boltzmann, est une loi statistique fondamentale en physique qui joue un rôle important dans la description de la distribution des vitesses des particules dans un gaz à une température spécifique. Lorsqu’un gaz est chauffé, de l’énergie est transmise à ses particules, les amenant à se déplacer à différentes vitesses. Cette distribution caractérise mathématiquement comment ces vitesses sont réparties parmi les particules dans un gaz en équilibre, signifiant que la distribution globale des vitesses reste constante dans le temps, même si les particules individuelles peuvent échanger de l’énergie lors de collisions.

Pour illustrer ce concept, imaginez une salle remplie de balles rebondissantes, chacune représentant une particule dans le gaz. Ces balles entrent en collision les unes avec les autres, en changeant parfois de vitesse. Certaines peuvent ralentir, tandis que d’autres accélèrent. Avec le temps, vous observerez que certaines balles se déplacent lentement, la plupart à des vitesses modérées, et quelques-unes se déplacent très rapidement. La distribution des vitesses de Maxwell est un modèle mathématique qui prédit la proportion de particules se déplaçant à chaque vitesse dans le gaz.

La distribution est exprimée par la fonction de densité de probabilité $f(v)$, où v est la vitesse d’une particule, m est la masse d’une particule, k_B est la constante de Boltzmann, T est la température du gaz. La formule pour $f(v)$ est donnée par :

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (4.1.3)$$

Comprendre la distribution de Maxwell-Boltzmann est essentiel non seulement pour saisir le comportement des gaz mais forme également la base de la théorie cinétique des gaz, qui aide les scientifiques à prédire les propriétés des gaz telles que la diffusion, la viscosité et la conductivité thermique.

Dans certains cas, lorsque la distribution des vitesses est influencée par des facteurs externes tels que des champs gravitationnels ou des distributions de température non uniformes, la fonction de distribution peut être exprimée différemment. En supposant une dépendance de la fonction de distribution aux coordonnées spatiales ρ et z ⁶, ainsi qu’aux composantes de vitesse U, V, W dans les directions X, Y, Z respectivement, l’expression de la distribution devient :

$$\ln f = A(\rho, z) + B(\rho, z)(U^2 + V^2 + W^2) \quad (4.1.4)$$

6. ρ représente la distance radiale dans le plan XY , perpendiculaire à l’axe (OZ), avec $\rho^2 = x^2 + y^2$, et $r^2 = \rho^2 + z^2$ décrit la distance totale depuis l’origine dans l’espace tridimensionnel, comme illustré dans la figure 4.1.

Cette expression peut être simplifiée en considérant la norme au carré de la vitesse⁷ v^2 , où $v^2 = U^2 + V^2 + W^2$. Ainsi, nous pouvons réécrire la fonction de distribution logarithmique sous la forme :

$$\ln f(v) \approx \text{Cst} - \frac{mv^2}{2k_B T} \quad (4.1.5)$$

Cette formulation modifiée de la distribution de Maxwell-Boltzmann est particulièrement utile pour décrire des systèmes où les particules se déplacent à des vitesses élevées, tels que dans des plasmas à haute énergie ou des champs gravitationnels intenses.

Le champ de vitesses correspond alors à une rotation de corps solide où :

$$\mathbf{c}_0 = \omega_0 \mathbf{k} \times \mathbf{r} \quad (4.1.6)$$

ω_0 représente la vitesse angulaire constante des particules dans leur rotation autour de l'axe \mathbf{k} , caractéristique d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe OZ comme illustré dans la figure 4.1. Le vecteur unitaire \mathbf{k} définit la direction de cet axe de rotation, perpendiculaire au plan de rotation (XY). Le vecteur \mathbf{r} représente la position radiale d'une particule dans le plan, mesurant la distance au centre de rotation O , et le produit vectoriel $\mathbf{k} \times \mathbf{r}$ donne la direction de la vitesse tangentielle dans le mouvement circulaire.

Un milieu dans lequel la fonction de distribution est de type Maxwellienne est un milieu dominé par les collisions. En effet, la conductivité thermique et la dissipation visqueuse s'établissent progressivement par le biais des collisions. Un tel milieu, avec cette fonction de distribution, possède une conductivité thermique qui, sinon infinie, est au moins très élevée, et exhibe donc une température absolue constante T en tout point. Sa forte viscosité empêche tout glissement des couches de gaz les unes sur les autres (rotation différentielle), ce qui résulte en une rotation de corps solide.

4.2 Le Système Vlasov-Poisson

Le système Vlasov-Poisson décrit l'évolution d'un système auto-gravitant en l'absence de collisions. Comme nous l'avons évoqué, l'équation de Vlasov régit l'évolution de la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ dans l'espace des phases et l'équation de Poisson relie le potentiel gravitationnel Ψ à la densité de masse ρ :

$$\Delta \Psi = 4\pi G \rho \quad (4.2.1)$$

où ρ est liée à la fonction de distribution par $\rho(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}$, qui est la densité de masse obtenue en intégrant la fonction de distribution sur toutes les vitesses. Ce système d'équations est fondamental dans l'étude de la dynamique des

7. c'est-à-dire la somme des carrés des composantes de la vitesse dans chaque direction spatiale.

systèmes stellaires et des galaxies.

NB : La connexion entre l'équation de Poisson et l'équation de Vlasov se fait par le potentiel gravitationnel Ψ . Dans un système composé de nombreuses particules, telles que les étoiles dans une galaxie ou les molécules dans un gaz, l'équation de Vlasov régit l'évolution de la fonction de distribution des particules dans l'espace des phases, et l'équation de Poisson relie l'effet collectif de la distribution de masse de ces particules au champ de potentiel dans lequel elles se déplacent. Lorsque l'équation de Vlasov est utilisée pour décrire un système auto-gravitant de particules, comme les étoiles dans une galaxie, elle est souvent couplée avec l'équation de Poisson. Le potentiel gravitationnel qui apparaît dans l'équation de Vlasov est le même potentiel qui satisfait l'équation de Poisson. Dans ce système couplé, l'équation de Poisson fournit l'équation de champ qui détermine le potentiel gravitationnel Ψ résultant de la distribution de masse ρ , et l'équation de Vlasov utilise ce potentiel pour déterminer comment la fonction de distribution évolue dans le temps.

Dans le contexte de l'astrophysique, lors de la description du mouvement des particules dans un système, il est courant de distinguer entre la vitesse moyenne des particules et leurs vitesses individuelles ou résiduelles. La vitesse moyenne, notée $\mathbf{c}_0 = \langle \mathbf{c} \rangle$, est la vitesse moyenne de toutes les particules du système. La vitesse résiduelle \mathbf{C} également appelée vitesse particulière (vitesse relative ou propre) d'une particule est alors définie comme sa vitesse individuelle (ou vitesse absolue) \mathbf{c} moins cette vitesse moyenne⁸ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_0 \quad (4.2.2)$$

Cette vitesse résiduelle représente l'écart entre la vitesse d'une particule et l'écoulement moyen. Elle peut être associée au concept de vitesse d'agitation thermique en mécanique des fluides, qui est liée au mouvement aléatoire des particules dans un fluide. En effet, dans un système comme une galaxie ou un fluide, les particules (comme les étoiles ou les molécules) se déplacent. La vitesse moyenne représente celle de toutes ces particules. Cependant, chaque particule a sa propre vitesse, qui peut être différente de cette moyenne. La vitesse résiduelle d'une particule est la différence entre sa vitesse individuelle et la vitesse moyenne du système. C'est comme si vous mesuriez à quel point le mouvement d'une particule est plus rapide ou plus lent que le mouvement moyen dans le système.

De plus, un opérateur D est défini. Il combine la dérivée temporelle avec la convection par l'écoulement moyen (Page 48 - Section 3.12 de [20]) :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \quad (4.2.3)$$

où $\frac{\partial}{\partial t}$ est la dérivée partielle temporelle, et $\mathbf{c}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$ désigne l'opérateur d'advection agissant sur un champ scalaire ou vectoriel par rapport à la vitesse moyenne (Page

8. Nous utiliserons désormais une lettre en gras pour définir un vecteur et une lettre maigre pour désigner un scalaire. De plus, nous utiliserons c plutôt que v pour définir la vitesse selon [20]

9 - Section 1.33 de [20]).

Cet opérateur D est utilisé pour décrire le changement d'une quantité à la fois par rapport au temps et tel qu'il est transporté par l'écoulement moyen. En effet, cet opérateur est une façon de prendre en compte deux choses à la fois : comment les particules changent avec le temps (c'est la partie $\frac{\partial}{\partial t}$) et comment elles se déplacent avec l'écoulement ou le mouvement moyen du système (c'est la partie $\mathbf{c}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$). \mathbf{c}_0 est la vitesse moyenne, et $\nabla_{\mathbf{r}}$ est un opérateur mathématique qui mesure comment les particules changent d'un endroit à l'autre. En combinant ces deux, l'opérateur D nous aide à comprendre comment une quantité (comme la densité ou la pression) change non seulement au fil du temps mais aussi en se déplaçant avec le flux général du système.

Il est particulièrement utile dans l'étude de la dynamique des fluides et de la physique des plasmas, où il peut simplifier les équations régissant le comportement du système en se concentrant sur les fluctuations plutôt que sur le mouvement global.

Nous pouvons alors considérer deux équations de Vlasov, écrites en termes de vitesses résiduelles, couplées avec l'équation de Poisson :

$$\frac{Df}{Dt} + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \frac{D\mathbf{c}_0}{Dt} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} f - \nabla_{\mathbf{C}} f \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0 = 0 \quad (4.2.4)$$

$$\frac{D\underline{f}}{Dt} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \underline{f} - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \frac{D\underline{\mathbf{c}}_0}{Dt} \right) \cdot \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \underline{f} - \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \underline{f} \underline{\mathbf{C}} : \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{c}}_0 = 0 \quad (4.2.5)$$

où, je le rappelle, D est la dérivée convective par rapport à l'écoulement moyen, \mathbf{c}_0 est la vitesse moyenne, \mathbf{C} est la vitesse résiduelle ou la vitesse relative (agitation thermique), f est la fonction de distribution, et Ψ est le potentiel gravitationnel.

Les termes $\nabla_{\mathbf{C}} f \mathbf{C}$ et $\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0$ sont appelés produits dyadiques⁹, qui sont des opérations tensorielles aboutissant à des matrices (dans ce contexte, appelées matrices dyadiques selon [20] et [96]). Le terme $\nabla_{\mathbf{C}} f \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0$ représente le produit scalaire de deux dyades défini ([20] page 16 eq. 1.31.4 et [96] section 3.3) par la notation $A : B = A_i^j B_i^j$.

NB : $A : B$ représente le produit scalaire (point) de deux matrices ou dyades, où chaque élément de la première matrice A est multiplié par l'élément correspondant de la seconde matrice B , et les produits sont sommés :

$$A : B = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{ij} \quad (4.2.6)$$

9. Ce sont des opérations mathématiques complexes qui transforment les vitesses et d'autres quantités en matrices. Ces matrices sont utilisées pour décrire les relations entre différentes vitesses et pour comprendre comment elles changent ensemble.

Or, on sait d'après 4.2.3 que :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_t f + \mathbf{c}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f \quad (4.2.7)$$

Soit :

$$\frac{D \ln(f)}{Dt} = \frac{1}{f} \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial \ln(f)}{\partial t} + \mathbf{c}_0 \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} = \nabla_t \ln(f) + \mathbf{c}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) \quad (4.2.8)$$

Ainsi, les équations 4.2.4 et 4.2.5 deviennent :

$$\nabla_t \ln(f) + \mathbf{c}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \frac{D\mathbf{c}_0}{Dt} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) - \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0 = 0 \quad (4.2.9)$$

$$\nabla_t \underline{\ln(f)} + \underline{\mathbf{c}_0} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\ln(f)} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\ln(f)} - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \frac{D\underline{\mathbf{c}_0}}{Dt} \right) \cdot \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\ln(f)} - \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\ln(f)} \underline{\mathbf{C}} : \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{c}_0} = 0 \quad (4.2.10)$$

Pour rechercher les solutions de ces équations, le principe est le suivant :

1. On commence par prendre une distribution f en fonction des vitesses et du temps.
2. Ensuite, on la substitue dans l'équation de Vlasov.
3. On regroupe les termes en fonction des monômes des composantes de la vitesse, ce qui génère autant d'équations individuelles.

4.3 Modélisation d'une Galaxie à Distribution de Vitesse Ellipsoïdale

La distribution des vitesses dans un système stellaire peut souvent être décrite par une fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann. Le logarithme naturel de cette fonction de distribution f est exprimé en fonction des composantes C_x, C_y, C_z de la vitesse résiduelle, qui dans le cas de la distribution de Maxwell-Boltzmann aboutit à un polynôme sphérique.

Si la distribution n'est pas isotrope¹⁰, ce qui est souvent le cas, par exemple dans le système solaire autour du Soleil, la distribution des vitesses peut adopter une forme ellipsoïdale, comme le montre la figure 4.1. En effet, l'ellipsoïde de vitesses représente un espace des vitesses où la distribution est plutôt de forme ellipsoïdale que sphérique, indiquant une distribution anisotrope¹¹.

10. Le terme *isotrope* fait référence à une propriété qui est identique dans toutes les directions. Une distribution isotrope des vitesses signifierait que les vitesses des objets dans l'espace sont réparties de manière uniforme dans toutes les directions.

11. Les vitesses des étoiles ou des particules au sein d'une galaxie ne sont pas distribuées uniformément dans toutes les directions (isotrope), mais plutôt de manière anisotrope, avec des préférences de direction qui peuvent être décrites par un ellipsoïde

La distribution des vitesses résiduelles stellaires autour du Soleil n'est pas isotrope mais correspond à un ellipsoïde des vitesses où l'un des axes est à peu près le double des deux autres. La figure 4.1 représente l'ellipsoïde des vitesses d'une galaxie en rotation autour de l'axe OZ ¹². Un modèle de galaxie (ou d'amas globulaire) a été construit correspondant à cette figure.

12. Dans une galaxie sphérique, la distribution des positions présente une symétrie sphérique. Cependant, si la galaxie tourne autour de l'axe OZ , comme une galaxie spirale, alors la distribution des vitesses ne peut plus être à symétrie sphérique. En réalité, la vitesse moyenne d'agitation de la matière composant la galaxie devient perpendiculaire à l'axe de rotation. Une distribution à symétrie cylindrique est alors plus appropriée pour représenter ce scénario. Nous cherchons donc une distribution des vitesses où la vitesse moyenne est principalement tangentielle au plan de rotation de la galaxie (avec une composante radiale éventuelle). Pour ce faire, nous décomposons la vitesse d'agitation en introduisant les composantes radiale et tangentielle, avec trois inconnues (H , a et α) que nous cherchons à déterminer à l'aide de l'équation de Vlasov.

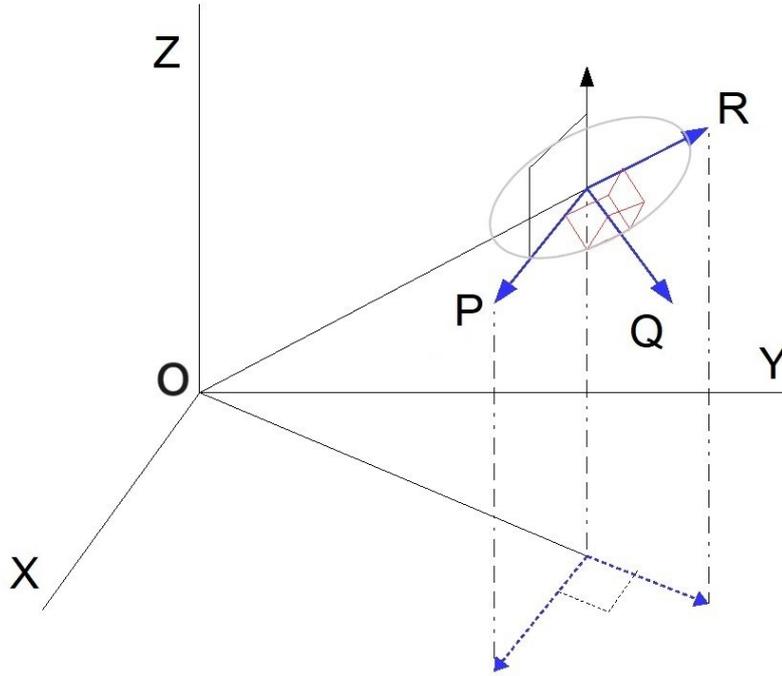


FIGURE 4.1 – Ellipsoïde des vitesses à symétrie cylindrique.

Dans la figure 4.1, nous pouvons noter que :

- \mathbf{k} est, rappelons-le, le vecteur unitaire le long de l'axe (OZ) autour duquel la galaxie tourne.¹³
- \mathbf{R} est le vecteur unitaire le long de l'axe radial, colinéaire à \mathbf{r} , donné par la relation suivante : $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$
- \mathbf{P} est le vecteur unitaire dans la direction perpendiculaire à \mathbf{r} et Z , donné par la relation suivante : $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{k} \times \mathbf{r}\|}$.¹⁴
- \mathbf{Q} est le vecteur unitaire perpendiculaire aux deux vecteurs précédents, donné par la relation suivante : $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{P} \times \mathbf{R}}{\|\mathbf{P} \times \mathbf{R}\|}$

Cette nouvelle étude se fonde sur [60]. Nous choisissons une distribution ellipsoïdale où les vitesses forment un ellipsoïde défini selon une fonction logarithmique de distribution des vitesses quadratiques :

$$\ln(f) = \ln(B) + a_r C_r^2 + a_p C_p^2 + a_q C_q^2 \quad (4.3.1)$$

Ces termes de vitesse sont quadratiques car ils sont proportionnels au carré des composantes de la vitesse dans chaque direction respective :

13. Le vecteur unitaire $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est aligné avec l'axe (OZ) dans le repère (O, X, Y, Z).

14. Le produit vectoriel génère un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés. Ensuite, la normalisation de ce vecteur résultant est effectuée en le divisant par sa propre norme.

- C_r : La composante de vitesse de C dans la direction radiale \mathbf{R} (c'est-à-dire la direction de \mathbf{r}). a_r représente le coefficient associé à la composante de vitesse radiale C_r , correspondant au mouvement des étoiles ou des particules le long de la direction \mathbf{r} . Il modélise l'importance de la dispersion de vitesse dans la direction radiale, que ce soit vers ou loin du centre galactique.
- C_p : La composante de vitesse de C dans une direction perpendiculaire à la direction radiale \mathbf{R} et à l'axe (OZ) (c'est-à-dire le long du vecteur \mathbf{P}). a_p représente le coefficient associé à la composante de vitesse transversale C_p , qui est perpendiculaire à la direction radiale et à l'axe (OZ). Il régle la contribution de la vitesse dans le plan perpendiculaire, souvent liée à la rotation galactique.
- C_q : La composante de vitesse de C dans une direction perpendiculaire à la fois à \mathbf{R} et à \mathbf{P} (c'est-à-dire le long du vecteur \mathbf{Q}). a_q est le coefficient associé à la composante C_q , qui est perpendiculaire à la fois aux directions \mathbf{r} et \mathbf{P} , modélisant les mouvements hors du plan principal de la galaxie.

Ces coefficients contrôlent l'anisotropie de la distribution de vitesse dans ces trois directions.

Les dispersions de vitesse σ (σ_r , σ_p , et σ_q) sont directement liées aux composantes de vitesse C_r , C_p , et C_q . Elles représentent les éléments suivants :

- σ_r : La dispersion de la composante de vitesse radiale C_r , qui représente la vitesse le long de la direction radiale \mathbf{r} . Elle mesure l'étendue des valeurs de C_r , indiquant à quel point les vitesses radiales varient autour de leur moyenne :

$$\sigma_r = \langle C_r^2 \rangle \quad (4.3.2)$$

- σ_p : La dispersion de la composante de vitesse transversale C_p , qui correspond à la vitesse dans la direction transversale \mathbf{P} , perpendiculaire à \mathbf{r} et à \mathbf{Z} . Elle quantifie la variabilité des vitesses dans le plan perpendiculaire au mouvement radial, souvent associée à la rotation galactique :

$$\sigma_p = \langle C_p^2 \rangle \quad (4.3.3)$$

- σ_q : La dispersion de la composante de vitesse verticale C_q , qui représente la vitesse dans la direction verticale \mathbf{Q} , perpendiculaire à la fois à \mathbf{r} et à \mathbf{P} . Elle reflète l'étendue de la variation de la vitesse dans la direction verticale, hors du plan galactique :

$$\sigma_q = \langle C_q^2 \rangle \quad (4.3.4)$$

Le logarithme de la fonction f est alors un polynôme elliptique, une fonction des composantes U, V, W de la vitesse d'agitation thermique \mathbf{C} , également appelée vitesse résiduelle par les astrophysiciens. Dans le cadre d'une distribution de vitesses ellipsoïdale, 4.3.1 peut également s'écrire sous la forme suivante¹⁵ :

$$\ln(f) = \ln(B) - \frac{m}{2k_B H} C^2 + a(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r})^2 + \alpha[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})]^2 \quad (4.3.5)$$

15. $C = \|\mathbf{C}\|$

où :

B , H , a et α dépendent à priori du temps et de l'espace.

Or, nous pouvons poser les hypothèses suivantes :

1. Nous nous placerons en régime stationnaire, ce qui signifie qu'il n'y a pas de dépendance implicite par rapport au temps.
2. Nous considérerons une solution présentant une symétrie autour de l'axe OZ , caractérisée par une rotation autour de cet axe avec une vitesse moyenne tangentielle.

Ce qui se traduit par les simplifications suivantes :

$$\frac{\partial \ln(f)}{\partial t} = 0 \quad (4.3.6)$$

$$\frac{D\mathbf{c}_0}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial t} + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \quad (4.3.7)$$

$$\mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (4.3.8)$$

Les équations de Vlasov 4.2.9 et 4.2.10 se réduisent alors aux expressions suivantes :

$$\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) - \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0 = 0 \quad (4.3.9)$$

$$\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) - \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \underline{\mathbf{c}}_0 \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{c}}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \ln(f) - \nabla_{\underline{\mathbf{C}}} \ln(f) \underline{\mathbf{C}} : \nabla_{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{c}}_0 = 0 \quad (4.3.10)$$

4.3.1 Tentatives de Développement de Solutions à l'Équation de Vlasov

Essayons d'établir une solution de l'équation de Vlasov 4.3.9. En effet, cette expression comporte trois termes. Le premier donné par $\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f)$ va donner des solutions de vitesse d'ordre trois et un. Le second $(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f)$ nous permettra d'obtenir des solutions de vitesse d'ordre un et le dernier $\nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0$ d'ordre deux.

Solution d'ordre 3 pour la fonction de distribution elliptique des vitesses

Le premier terme de l'équation de Vlasov 4.3.9 doit satisfaire la relation suivante :

$$\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) = 0 \quad (4.3.11)$$

Pour simplifier davantage les calculs, à partir de 4.1.6, nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \omega_0 \frac{\partial(\mathbf{k} \times \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \quad (4.3.12)$$

avec :

$$\mathbf{k} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.13)$$

Soit :

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = -yC_x + xC_y \quad (4.3.14)$$

et :

$$[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})](\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y^2C_x - xyC_y \\ -xyC_x + x^2C_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.15)$$

Ainsi, l'introduction de l'équation 4.3.5 dans 4.3.11 nous permet d'obtenir la relation suivante, en ne conservant que les termes d'ordre trois :

$$-\frac{m}{2k_B} C^2 \mathbf{C} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{1}{H} \right) + 2a(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial a}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})]^2 = 0 \quad (4.3.16)$$

Nous pouvons l'exprimer en fonction des composantes C_x , C_y , C_z de la vitesse résiduelle afin de profiter de la symétrie autour de l'axe OZ et de regrouper ensuite les monômes :

$$\begin{aligned} & -\frac{m}{2k_B} (C_x^2 + C_y^2 + C_z^2) \left(C_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) + C_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \right) + C_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H} \right) \right) \\ & + 2a (C_x^2 + C_y^2 + C_z^2) (xC_x + yC_y + zC_z) \\ & + \left(C_x \frac{\partial a}{\partial x} + C_y \frac{\partial a}{\partial y} + C_z \frac{\partial a}{\partial z} \right) (xC_x + yC_y + zC_z)^2 \\ & + \left(C_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_y \frac{\partial \alpha}{\partial y} + C_z \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) (-yC_x + xC_y)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Nous obtenons ainsi 45 termes qui, regroupées par monômes, permettent de déduire les dix équations aux dérivées partielles suivantes :

$$C_x^3 : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) + 2ax + x^2 \frac{\partial a}{\partial x} + y^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (4.3.18)$$

$$C_y^3 : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \right) + 2ay + y^2 \frac{\partial a}{\partial y} + x^2 \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \quad (4.3.19)$$

$$C_z^3 : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H} \right) + 2az + z^2 \frac{\partial a}{\partial z} = 0 \quad (4.3.20)$$

$$C_x^2 C_y : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \right) + 2ay + x^2 \frac{\partial a}{\partial y} + 2xy \frac{\partial a}{\partial x} + y^2 \frac{\partial \alpha}{\partial y} - 2xy \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (4.3.21)$$

$$C_y^2 C_x : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) + 2ax + y^2 \frac{\partial a}{\partial x} + 2xy \frac{\partial a}{\partial y} + x^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} - 2xy \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \quad (4.3.22)$$

$$C_x^2 C_z : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H} \right) + 2az + x^2 \frac{\partial a}{\partial z} + 2xz \frac{\partial a}{\partial x} + y^2 \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \quad (4.3.23)$$

$$C_y^2 C_z : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H} \right) + 2az + y^2 \frac{\partial a}{\partial z} + 2yz \frac{\partial a}{\partial y} + x^2 \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \quad (4.3.24)$$

$$C_z^2 C_x : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) + 2ax + z^2 \frac{\partial a}{\partial x} + 2xz \frac{\partial a}{\partial z} = 0 \quad (4.3.25)$$

$$C_z^2 C_y : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \right) + 2ay + z^2 \frac{\partial a}{\partial y} + 2yz \frac{\partial a}{\partial z} = 0 \quad (4.3.26)$$

$$C_x C_y C_z : 2yz \frac{\partial a}{\partial x} + 2xz \frac{\partial a}{\partial y} + 2xy \frac{\partial a}{\partial z} - 2xy \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \quad (4.3.27)$$

En faisant l'hypothèse que a et α ne dépendent pas de r , nous obtenons :

$$C_x^3 \equiv C_z^2 C_x \equiv C_y^2 C_x : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) + 2ax = 0 \quad (4.3.28)$$

$$C_y^3 \equiv C_x^2 C_y \equiv C_z^2 C_y : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H} \right) + 2ay = 0 \quad (4.3.29)$$

$$C_z^3 \equiv C_x^2 C_z \equiv C_y^2 C_z : -\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H} \right) + 2az = 0 \quad (4.3.30)$$

Cependant, nous savons que le rayon de l'ellipsoïde dans son plan de rotation défini selon le repère (O, X, Y) autour de l'axe (OZ) est donné par :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \implies \begin{cases} \frac{\partial \rho^2}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial \rho^2}{\partial y} = 2y \end{cases} \quad (4.3.31)$$

Nous obtenons alors en fonction de ρ :

$$-\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) + a \frac{\partial \rho^2}{\partial x} = 0 \quad (4.3.32)$$

En posant $\zeta = \rho^2$, nous avons :

$$-\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) + a \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (4.3.33)$$

En multipliant les deux membres de l'équation 4.3.33 par $\frac{\partial x}{\partial \zeta}$, nous obtenons :

$$-\frac{m}{2k_B} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H} \right) + a \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (4.3.34)$$

Ainsi, en appliquant la règle de la chaîne, nous obtenons :

$$-\frac{m}{2k_B} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{H} \right) + a = 0 \quad (4.3.35)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{2k_B}{m} a \quad (4.3.36)$$

D'où :

$$\frac{1}{H} = \frac{2k_B}{m} a \zeta + \varphi_1 \quad (4.3.37)$$

où la constante d'intégration φ_1 dépend de z , c'est pourquoi nous renommons φ_1 en $f_1(z)$ comme suit :

$$\frac{1}{H} = \frac{2k_B}{m} a \rho^2 + f_1(z) \quad (4.3.38)$$

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2k_B}{m} a \rho^2 + f_1(z) \right) = \frac{\partial}{\partial z} f_1(z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H} \right) \quad (4.3.39)$$

À partir de 4.3.30, nous pouvons déduire :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{4k_B}{m} a z \quad (4.3.40)$$

Puis :

$$\frac{\partial}{\partial z} f_1(z) = \frac{4k_B}{m} a z \quad (4.3.41)$$

Et donc :

$$f_1(z) = \frac{2k_B}{m} a z^2 + \kappa \quad (4.3.42)$$

où κ est une constante d'intégration.

Finalement, nous avons :

$$\frac{1}{H} = \frac{2k_B}{m} a \rho^2 + \frac{2k_B}{m} a z^2 + \kappa \quad (4.3.43)$$

Puisque $r^2 = \rho^2 + z^2$, nous obtenons :

$$\frac{1}{H} = \frac{2k_B}{m} a r^2 + \kappa \quad (4.3.44)$$

Nous décidons d'assigner la valeur $\frac{1}{T_0}$ à $\frac{1}{H}$ lorsque $r = 0$ ¹⁶.

Alors :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{T_0} \left(1 + \frac{2ak_B T_0}{m} r^2 \right) \quad (4.3.45)$$

Définissons :

$$r_0^2 = \frac{m}{2ak_B T_0} \quad (4.3.46)$$

Nous pouvons en déduire :

$$H = \frac{T_0}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}} \quad (4.3.47)$$

Nous savons que la composante de tout vecteur \mathbf{C} le long de l'un des axes du repère est la projection orthogonale, obtenue en effectuant le produit scalaire du vecteur \mathbf{C} avec le vecteur unitaire de l'axe respectif. Ainsi, nous pouvons exprimer les composantes de 4.3.1 de la manière suivante :

$$C_r = \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{C} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \quad (4.3.48)$$

$$C_p = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{C} \cdot \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{k} \times \mathbf{r}\|} = \frac{\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})}{\|\mathbf{k} \times \mathbf{r}\|} \quad (4.3.49)$$

C_q est définie par :

$$C_q \mathbf{Q} = \mathbf{C} - C_r \mathbf{R} - C_p \mathbf{P} \quad (4.3.50)$$

Et en tenant compte du fait que¹⁷ :

$$\|\mathbf{k} \times \mathbf{r}\|^2 = (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = r^2 - z^2 = \rho^2 \quad (4.3.51)$$

Après introduction dans 4.3.1 et en regroupant les termes, nous obtenons :

$$\ln(f) = \ln(B) + \frac{(a_r - a_q)}{r^2} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{(a_p - a_q)}{\rho^2} [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})]^2 + a_q \mathbf{C}^2 \quad (4.3.52)$$

Ainsi, par identification avec 4.3.5, nous pouvons en déduire que :

$$a_q = -\frac{m}{2k_B H} \quad (4.3.53)$$

$$a = \frac{a_r - a_q}{r^2} \Rightarrow a_r = -\frac{m}{2k_B H} + ar^2 \quad (4.3.54)$$

$$\alpha = \frac{a_p - a_q}{\rho^2} \Rightarrow a_p = -\frac{m}{2k_B H} + \alpha \rho^2 \quad (4.3.55)$$

Or, si on pose également :

$$\rho_0^2 = \frac{m}{2\alpha k_B T_0} \quad (4.3.56)$$

16. ainsi $\kappa = \frac{1}{T_0}$.

17. L'identité de Lagrange est une relation bien connue en mathématiques qui s'énonce comme suit :

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont des vecteurs.

Alors, nous obtenons :

$$a_r = -\frac{m}{2k_B T_0} \quad (4.3.57)$$

$$a_p = -\frac{m}{2k_B T_0} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \quad (4.3.58)$$

$$a_q = -\frac{m}{2k_B T_0} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad (4.3.59)$$

Nous pouvons en déduire la fonction logarithmique de distribution des vitesses quadratiques :

$$f = f_0 e^{\left(-\frac{m}{2k_B T_0} \left[C_r^2 + C_p^2 \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) + C_q^2 \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right] \right)} \quad (4.3.60)$$

avec :

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.61)$$

où n est la densité locale de particules, qui représente le nombre de particules par unité de volume à une position spatiale donnée. Le terme f_0 assure la normalisation correcte de la distribution de telle sorte que l'intégrale de f sur l'espace des vitesses donne la densité locale de particules n . Ici, T_0 représente la température caractéristique du système, et r_0 et ρ_0 sont des échelles spatiales caractéristiques.

Cela nous donne les axes de l'ellipsoïde des vitesses :

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m}} \quad (4.3.62)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}}} \quad (4.3.63)$$

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}}} \quad (4.3.64)$$

Nous voyons que :

$$\sigma_p \leq \sigma_q \leq \sigma_r \quad (4.3.65)$$

Au centre du système, la distribution des vitesses est Maxwellienne :

$$\sigma_p = \sigma_q = \sigma_r \quad (4.3.66)$$

La composante σ_r est indépendante de r . Si nous voulons prendre en compte les données observationnelles, celles-ci indiquent que $\sigma_p \approx \sigma_q$. Cela signifie, dans notre solution, que $\frac{1}{\rho_0^2} \ll \frac{1}{r_0^2}$, c'est-à-dire $\alpha \ll a$.

À une certaine distance, les axes transversaux tendent vers zéro, tandis que l'axe radial conserve sa valeur.

Solution d'ordre 2 pour la détermination des vitesses angulaire et circulaire

L'identification des termes du second ordre est indispensable pour déterminer la loi de la vitesse de rotation. Dans le cadre de l'équation de Vlasov 4.3.9, cela se traduit par l'analyse du dernier terme associé à ces contributions. Il correspond à $\nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0$, qui implique le double produit de deux dyadiques égal à la trace du produit des matrices correspondantes :

$$\nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \mathbf{C} : \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0 = \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = 0 \quad (4.3.67)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \mathbf{C} \\ \mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{c}_0 \end{cases}$$

Calculons \mathbf{B} :

D'après 4.1.6, nous pouvons en déduire :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial c_{0x}}{\partial x} & \frac{\partial c_{0y}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial c_{0x}}{\partial y} & \frac{\partial c_{0y}}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial c_{0x}}{\partial z} & \frac{\partial c_{0y}}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \frac{\partial \omega}{\partial x} & x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega & 0 \\ -y \frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega & x \frac{\partial \omega}{\partial y} & 0 \\ -y \frac{\partial \omega}{\partial z} & x \frac{\partial \omega}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.68)$$

Calculons \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) \mathbf{C} \quad (4.3.69)$$

À partir de 4.3.5, nous pouvons déduire ce qui suit, que nous décomposons en 3 matrices, \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 et \mathbf{A}_3 :

$$\mathbf{A} = \underbrace{-\frac{m}{k_B H} \mathbf{C}\mathbf{C}}_{\mathbf{A}_1} + \underbrace{2a(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}\mathbf{C}}_{\mathbf{A}_2} + \underbrace{2\alpha[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r})](\mathbf{k} \times \mathbf{r})\mathbf{C}}_{\mathbf{A}_3} \quad (4.3.70)$$

Calculons chaque terme :

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{m}{k_B H} \begin{pmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ C_y C_x & C_y^2 & C_y C_z \\ C_z C_x & C_z C_y & C_z^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.71)$$

$$\mathbf{A}_2 = 2a(xC_x + yC_y + zC_z) \begin{pmatrix} xC_x & xC_y & xC_z \\ yC_x & yC_y & yC_z \\ zC_x & zC_y & zC_z \end{pmatrix}, \quad (4.3.72)$$

$$\mathbf{A}_3 = 2\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x - xy C_y \\ -xy C_x + x^2 C_y \\ 0 \end{pmatrix} (C_x \ C_y \ C_z) \quad (4.3.73)$$

$$= 2\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x C_x - xy C_y C_x & y^2 C_x C_y - xy C_y C_y & y^2 C_x C_z - xy C_y C_z \\ -xy C_x C_x + x^2 C_y C_x & -xy C_x C_y + x^2 C_y C_y & -xy C_x C_z + x^2 C_y C_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.74)$$

Considérons les deux matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.3.75)$$

La trace de leur produit matriciel est donnée par¹⁸ :

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{yx} + A_{xz}B_{zx} + A_{yx}B_{xy} + A_{yy}B_{yy} + A_{yz}B_{zy} + 0 \quad (4.3.76)$$

Calculons chaque terme A_{ij} de cette trace :

$$\begin{aligned} A_{xx} &= -\frac{m}{k_B H} C_x^2 + 2a(x^2 C_x^2 + yx C_x C_y + zx C_x C_z) + 2\alpha(y^2 C_x^2 - xy C_y C_x) \\ &= C_x^2 \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ax^2 + 2\alpha y^2 \right) + C_x C_y 2(a - \alpha)xy + C_x C_z 2axz \end{aligned} \quad (4.3.77)$$

$$\begin{aligned} A_{yy} &= -\frac{m}{k_B H} C_y^2 + 2a(x C_x y C_y + y C_y y C_y + z C_z y C_y) + 2\alpha(-xy C_x C_y + x^2 C_y C_y) \\ &= C_y^2 \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ay^2 + 2\alpha x^2 \right) + C_x C_y 2(a - \alpha)xy + C_y C_z 2ayz \end{aligned} \quad (4.3.78)$$

$$\begin{aligned} A_{xy} &= -\frac{m}{k_B H} C_x C_y + 2a(x C_x x C_y + y C_y x C_y + z C_z x C_y) + 2\alpha(y^2 C_x C_y - xy C_y C_y) \\ &= C_x C_y \left(-\frac{m}{k_B H} + 2\alpha x^2 + 2\alpha y^2 \right) + C_y^2 2(a - \alpha)xy + C_y C_z 2axz \end{aligned} \quad (4.3.79)$$

$$\begin{aligned} A_{yx} &= -\frac{m}{k_B H} C_y C_x + 2a(x C_x y C_x + y C_y y C_x + z C_z y C_x) + 2\alpha(-xy C_x C_x + x^2 C_y C_x) \\ &= C_x^2 2(a - \alpha)xy + C_x C_y \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ay^2 + 2\alpha x^2 \right) + C_x C_z 2ayz \end{aligned} \quad (4.3.80)$$

$$\begin{aligned} A_{xz} &= -\frac{m}{k_B H} C_x C_z + 2a(x C_x x C_z + y C_y x C_z + z C_z x C_z) + 2\alpha(y^2 C_x C_z - xy C_y C_z) \\ &= C_z^2 2axz + C_x C_z \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ax^2 + 2\alpha y^2 \right) + C_y C_z 2(a - \alpha)xy \end{aligned} \quad (4.3.81)$$

$$\begin{aligned} A_{yz} &= -\frac{m}{k_B H} C_y C_z + 2a(x C_x y C_z + y C_y y C_z + z C_z y C_z) + 2\alpha(-xy C_x C_z + x^2 C_y C_z) \\ &= C_z^2 2ayz + C_x C_z 2(a - \alpha)xy + C_y C_z \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ay^2 + 2\alpha x^2 \right) \end{aligned} \quad (4.3.82)$$

Les termes en C_x^2 proviennent de $A_{xx} B_{xx}$ et $A_{yx} B_{xy}$:

$$\left(-\frac{m}{k_B H} + 2ax^2 + 2\alpha y^2 \right) \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + 2(a - \alpha)xy \left(x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \right) = 0 \quad (4.3.83)$$

Les termes en C_y^2 proviennent de $A_{xy} B_{yx}$ et $A_{yy} B_{yy}$:

$$\left(-\frac{m}{k_B H} + 2ay^2 + 2\alpha x^2 \right) \left(x \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + 2(a - \alpha)xy \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega \right) = 0 \quad (4.3.84)$$

18. En considérant la rotation de la galaxie autour de l'axe (OZ), qui impose une symétrie axiale et annule les composantes en dehors du plan de rotation, comme indiqué dans 4.3.68

Les termes en C_z^2 proviennent de $A_{xz} B_{zx}$ et $A_{yz} B_{zy}$:

$$2axz \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + 2ayz \left(x \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.3.85)$$

Les termes en $C_x C_y$ proviennent de $A_{xy} B_{yx}$, $A_{xx} B_{xx}$, $A_{yx} B_{xy}$ et $A_{yy} B_{yy}$:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ax^2 + 2\alpha y^2 \right) \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega \right) + 2(a - \alpha)xy \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ & + \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ay^2 + 2\alpha x^2 \right) \left(x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \right) + 2(a - \alpha)xy \left(x \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.86)$$

Les termes en $C_x C_z$ proviennent de $A_{xz} B_{zx}$, $A_{xx} B_{xx}$, $A_{yx} B_{xy}$ et $A_{yz} B_{zy}$:

$$\begin{aligned} & (2axz) \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ax^2 + 2\alpha y^2 \right) \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \\ & + (2axy) \left(x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \right) + 2(a - \alpha)xy \left(x \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.87)$$

Les termes en $C_y C_z$ proviennent de $A_{xy} B_{yx}$, $A_{xz} B_{zx}$, $A_{yy} B_{yy}$ et $A_{yz} B_{zy}$:

$$\begin{aligned} & (2axz) \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega \right) + 2(a - \alpha)xy \left(-y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \\ & + (2ayz) \left(x \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ay^2 + 2\alpha x^2 \right) \left(x \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.88)$$

Exploitions à présent le fait que ω ne dépend que de ρ^2 et z^2 pour simplifier les expressions. Ainsi, d'après 4.3.31, nous obtenons :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho^2}{\partial x} = 2x \frac{\partial \omega}{\partial \rho^2} \quad (4.3.89)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho^2}{\partial y} = 2y \frac{\partial \omega}{\partial \rho^2} \quad (4.3.90)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial z^2} \frac{\partial z^2}{\partial z} = 2z \frac{\partial \omega}{\partial z^2} \quad (4.3.91)$$

L'équation en C_x^2 devient¹⁹ :

$$\frac{\partial \ln \omega}{\partial \rho^2} = -\frac{a - \alpha}{\frac{m}{k_B H} - 2\alpha \rho^2} \quad (4.3.92)$$

En se plaçant dans le contexte particulier où a et α sont constants dans l'espace (indépendants de \mathbf{r}), soit à partir de 4.3.45, nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \omega}{\partial \rho^2} &= -\frac{1}{2} \frac{2(a - \alpha)}{\left(\frac{m}{k_B T_0} + 2(a - \alpha)\rho^2 + 2az^2 \right)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho^2} \left[\ln \left(\frac{m}{k_B T_0} + 2(a - \alpha)\rho^2 + 2az^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3.93)$$

19. En utilisant la relation $\frac{\partial \ln \omega}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \rho^2}$

De la même manière qu'auparavant, l'équation pour $C_x C_z$ nous donne :

$$\frac{\partial \ln \omega}{\partial z^2} = -\frac{a}{\frac{m}{k_B H} - 2\alpha\rho^2} \quad (4.3.94)$$

Ainsi, les solutions aux équations différentielles 4.3.93 et 4.3.94 fournissent la vitesse angulaire de la galaxie :

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{m}{k_B T_0} + 2(a - \alpha)\rho^2 + 2az^2}} \quad (4.3.95)$$

Cette solution étant compatible avec le dernier terme en $C_y C_z$ ²⁰.

Les solutions des autres équations sont compatibles²¹.

Dans le contexte de la dynamique des galaxies, si ω représente la vitesse angulaire de la galaxie²², alors la vitesse circulaire v à un rayon ρ est donnée par :

$$v = \rho \cdot \omega = \rho \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{m}{k_B T_0} + 2(a - \alpha)\rho^2 + 2az^2}} \quad (4.3.96)$$

Dans le plan diamétral de la galaxie :

$$v = \frac{\omega_0 \rho}{\sqrt{\frac{m}{k_B T_0} + 2(a - \alpha)\rho^2}} \quad (4.3.97)$$

En prenant en compte que $\alpha \ll a$:

$$v \approx \frac{\omega_0 \rho}{\sqrt{\frac{m}{k_B T_0} + 2a\rho^2}} \quad (4.3.98)$$

Cela conduit à une augmentation linéaire de la vitesse près du centre de symétrie (indiquant une rotation de corps solide) et à une vitesse constante en périphérie, formant un plateau (voir Figure 4.2).

Nous observons que le simple fait d'orienter l'ellipsoïde des vitesses d'une manière particulière nous a permis de déterminer :

- L'évolution de ses axes dans l'espace.
- La valeur locale de la vitesse de rotation, avec un mouvement de corps solide au centre de la galaxie.
- L'existence d'un plateau de vitesse en périphérie.

20. $(\frac{m}{k_B H} - 2\alpha\rho^2) (\frac{\partial \omega}{\partial z^2}) = -a\omega$

21. Pour les termes en C_y^2 , $C_z^2 = 0$ et $C_x C_y$

22. Cela est dû au fait que la vitesse circulaire est la vitesse à laquelle une étoile (ou tout autre objet) doit se déplacer le long d'un chemin circulaire pour maintenir une orbite stable autour du centre de la galaxie, en raison de la force centripète fournie par l'attraction gravitationnelle de la galaxie.

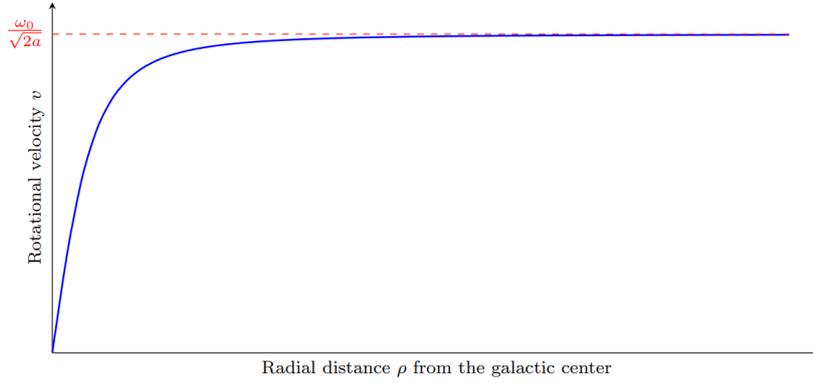


FIGURE 4.2 – Courbe théorique de rotation d’une galaxie. Le graphique illustre la variation de la vitesse de rotation en fonction de la distance radiale par rapport au centre de la galaxie. L’axe des abscisses représente la distance radiale depuis le centre galactique, tandis que l’axe des ordonnées montre la vitesse de rotation. Près du centre de symétrie, la vitesse augmente linéairement, indiquant une rotation de corps solide, où toutes les parties de la galaxie tournent comme une unité unique. À mesure que la distance au centre augmente, la vitesse de rotation atteint une valeur constante, formant un plateau en périphérie. Ce comportement est typique des galaxies spirales, où la courbe de rotation plate à grande distance suggère la présence de matière noire ou pourrait être expliquée par un modèle impliquant une masse négative.

Il convient de souligner que cette solution ne décrit pas un système de masses ponctuelles s’auto-gravitant dans leur propre champ gravitationnel. Elle se limite à représenter le mouvement d’une galaxie dans un champ gravitationnel ψ , dont la source reste initialement indéterminée. Néanmoins, il est possible de construire ce potentiel gravitationnel dans le plan en considérant que le champ gravitationnel compense la force centrifuge. En effet, la vitesse de rotation circulaire v est directement liée à la dérivée du potentiel gravitationnel ψ par rapport à la distance radiale ρ dans le plan de symétrie, ou plan équatorial, de la galaxie ([11]). La relation entre la vitesse circulaire et le potentiel gravitationnel s’exprime ainsi :

$$v^2 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \quad (4.3.99)$$

Ainsi, selon 4.3.98, nous pouvons déduire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{\omega_0^2 \rho}{\frac{m}{k_B T_0} + 2a\rho^2} = \frac{k_B T_0 \omega_0^2}{m} \frac{\rho}{1 + \frac{\rho^2}{r_0^2}} \quad (4.3.100)$$

$$\text{Définissons } \xi = 1 + \frac{\rho^2}{r_0^2} \implies \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{2\rho}{r_0^2}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{2}{r_0^2} \frac{\rho}{1 + \frac{\rho^2}{r_0^2}} \quad (4.3.101)$$

En multipliant les deux membres de l'équation 4.3.101 par $\frac{r_0^2}{2} \frac{k_B T_0 \omega_0^2}{m}$, nous obtenons :

$$\frac{r_0^2}{2} \frac{k_B T_0 \omega_0^2}{m} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{k_B T_0 \omega_0^2}{m} \frac{\rho}{1 + \frac{\rho^2}{r_0^2}} \quad (4.3.102)$$

Selon 4.3.46, nous pouvons déduire l'expression suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{2a} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \quad (4.3.103)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{2a} \frac{\partial \ln \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \quad (4.3.104)$$

Par conséquent :

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{2a} \ln \xi + \Phi \quad (4.3.105)$$

où Φ ne dépend pas de ρ .

Ainsi :

$$\psi = \frac{\omega_0^2}{2a} \ln \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r_0^2}} + \Phi(z) \quad (4.3.106)$$

Nous pouvons également réécrire 4.3.100 comme suit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{k_B T_0 \omega_0^2}{m \rho} \frac{1}{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r_0^2}} \quad (4.3.107)$$

Pour $\rho \gg r_0$, $\frac{1}{\rho^2} \ll \frac{1}{r_0^2}$, donc $\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r_0^2} \approx \frac{1}{r_0^2}$, d'où :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \approx \frac{k_B T_0 \omega_0^2 r_0^2}{m} \frac{1}{\rho} \quad (4.3.108)$$

Ensuite, à grande distance, comme montré dans la Figure 4.3 et selon l'équation 4.3.46, nous pouvons déduire :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \approx \frac{\omega_0^2}{2a} \frac{1}{\rho} \implies \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \propto \frac{1}{\rho} \quad (4.3.109)$$

De plus, selon l'équation 4.3.106, nous pouvons calculer le Laplacien du champ gravitationnel en coordonnées cylindriques, qui est donné par :

$$\Delta \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (4.3.110)$$

Ainsi :

$$\Delta \psi = \frac{\omega_0^2}{2a} \frac{2r_0^2}{(r_0^2 + \rho^2)^2} + \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} \quad (4.3.111)$$

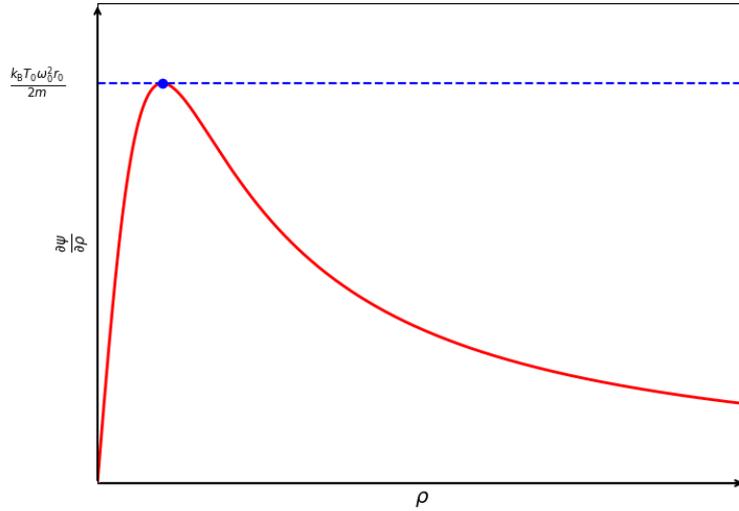


FIGURE 4.3 – Cette courbe théorique montre la dérivée du potentiel gravitationnel ψ par rapport à la distance radiale ρ depuis le centre galactique, mettant en évidence l'équilibre entre les forces gravitationnelles et les forces centrifuges. La dérivée atteint un maximum à $\rho = r_0$, où l'attraction gravitationnelle est compensée par la force centrifuge. Au-delà de cette distance, la dérivée diminue, indiquant une réduction progressive de l'influence gravitationnelle à mesure que ρ augmente. Cette décroissance suit approximativement un comportement en $\frac{1}{\rho}$ à grande distance, ce qui est caractéristique d'un potentiel gravitationnel classique dans certains modèles de halos de matière noire, ou pourrait être expliqué par un modèle impliquant une masse négative.

À partir de cela, nous pouvons déduire sa valeur à grande distance :

$$\Delta\psi \approx \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (4.3.112)$$

ce qui est indépendant de ρ .

Ainsi, la majeure partie du potentiel n'est pas créée par la masse des étoiles de la galaxie, mais par une entité externe de nature inconnue. Pour expliquer ce champ de vitesse de rotation, il est nécessaire de supposer qu'en plus du champ gravitationnel de la galaxie, il en existe un créé par un vaste halo de matière noire à masse positive [6, 12, 14, 27, 15, 37, 57, 63, 102], ou bien, dans le cadre d'un modèle cosmologique bimétrique tel que le modèle Janus [28, 54, 75, 76, 77, 80], que cette contribution soit due à un vide dans un environnement de masse négative.

Solution d'ordre 1

Les termes contribuant à la solution de l'équation de Vlasov sont $\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f)$ et $(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f)$, et doivent satisfaire la relation :

$$\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f) + \left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) = 0 \quad (4.3.113)$$

Il faut donc exprimer $\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \ln(f)$ en ne conservant que les termes d'ordre 1, soit :

$$\mathbf{C} \frac{\partial \ln B}{\partial \mathbf{r}} = C_x \frac{\partial \ln B}{\partial x} + C_y \frac{\partial \ln B}{\partial y} + C_z \frac{\partial \ln B}{\partial z} \quad (4.3.114)$$

Concernant $(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}}) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f)$, nous savons que la vitesse angulaire d'une galaxie ω ne dépend que de ρ^2 et de z^2 . Ainsi, les expressions 4.3.89, 4.3.90 et 4.3.91 nous permettent de transformer la relation 4.3.68 de la manière suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -2xy \frac{\partial \omega}{\partial r^2} & 2x^2 \frac{\partial \omega}{\partial r^2} + \omega & 0 \\ -2y^2 \frac{\partial \omega}{\partial r^2} - \omega & 2xy \frac{\partial \omega}{\partial r^2} & 0 \\ -2yz \frac{\partial \omega}{\partial z^2} & 2xz \frac{\partial \omega}{\partial z^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.115)$$

Ainsi, son produit scalaire avec 4.1.6 nous permet d'en déduire que :

$$\mathbf{c}_0 \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} = -\omega_{c_0}^2(x, y, 0) \quad (4.3.116)$$

Donc :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \omega_{c_0}^2(x, y, 0) \quad (4.3.117)$$

Or nous savons que²³ :

$$\omega_{c_0}^2(x, y, 0) = - \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{r}} \right) = - \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}, \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \right) \quad \text{avec} \quad \Psi_0 = -\frac{1}{2} \omega_{c_0}^2 \rho^2 \quad (4.3.118)$$

Par conséquent :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) = - \frac{\partial (\Psi + \Psi_0)}{\partial \mathbf{r}} \quad (4.3.119)$$

Ainsi, d'après 4.1.6, 4.3.15 et 4.3.70, nous pouvons en déduire :

$$\nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) = - \frac{m}{k_B H} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} + 2a \begin{pmatrix} xx C_x + xy C_y + xz C_z \\ xy C_x + yy C_y + yz C_z \\ xz C_x + yz C_y + zz C_z \end{pmatrix} + 2\alpha \begin{pmatrix} y^2 C_x - xy C_y \\ -xy C_x + x^2 C_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.120)$$

Ce qui donne :

$$\nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) = \begin{pmatrix} C_x \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ax^2 + 2\alpha y^2 \right) + C_y 2xy(a - \alpha) + C_z 2axz \\ C_x 2xy(a - \alpha) + C_y \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ay^2 + 2\alpha x^2 \right) + C_z 2ayz \\ C_x 2axz + C_y 2ayz + C_z \left(-\frac{m}{k_B H} + 2az^2 \right) \end{pmatrix} \quad (4.3.121)$$

23. En considérant 4.3.31, nous pouvons en déduire que $\frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} \omega_{c_0}^2 \frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} = -\omega_{c_0}^2(x, y, 0)$

Nous obtenons donc :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}} \Psi + \mathbf{c}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{C}} \ln(f) = - \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial \mathbf{r}} \begin{pmatrix} C_x \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ax^2 + 2\alpha y^2 \right) + C_y 2xy(a - \alpha) + C_z 2axz \\ C_x 2xy(a - \alpha) + C_y \left(-\frac{m}{k_B H} + 2ay^2 + 2\alpha x^2 \right) + C_z 2ayz \\ C_x 2axz + C_y 2ayz + C_z \left(-\frac{m}{k_B H} + 2az^2 \right) \end{pmatrix} \quad (4.3.122)$$

Ainsi, les trois équations aux dérivées partielles qui satisfont les termes d'ordre 1 de l'équation de Valsov 4.3.113 sont les suivantes²⁴ :

$$\frac{\partial \ln B}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial x} \left(\frac{m}{k_B T_0} + 2(a - \alpha)y^2 + 2az^2 \right) - 2 \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial y} xy(a - \alpha) - 2 \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial z} axz = 0 \quad (4.3.123)$$

$$\frac{\partial \ln B}{\partial y} - 2 \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial x} xy(a - \alpha) + \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial y} \left(\frac{m}{k_B T_0} + 2(a - \alpha)x^2 + 2az^2 \right) - 2 \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial z} ayz = 0 \quad (4.3.124)$$

$$\frac{\partial \ln B}{\partial z} + 2 \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial x} axz + 2 \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial y} ayz - \frac{\partial(\Psi + \Psi_0)}{\partial z} \left(\frac{m}{k_B T_0} + 2az^2 \right) = 0 \quad (4.3.125)$$

24. Toujours en se plaçant dans le contexte particulier où a et α sont constants dans l'espace et sachant que d'après 4.3.45, nous obtenons $\frac{m}{k_B H} = \frac{m}{k_B T_0} + 2ar^2 = \frac{m}{k_B T_0} + 2ax^2 + 2ay^2 + 2az^2$

4.3.2 Comparaison avec les Données Observationnelles

Les courbes de rotation d'un large échantillon de galaxies spirales sont présentées dans la figure 4.4. Bien que la plupart montrent effectivement un plateau à grande distance du centre, elles présentent également des pics de vitesse abrupts près du centre, contrairement à notre modèle. Cela est dû aux noyaux à forte densité stellaire présents dans la majorité des galaxies spirales. En revanche, pour les quelques galaxies de type disque uniquement, il existe une correspondance globale raisonnable, comme le montre la figure 4.5 pour la galaxie prototype NGC 128.

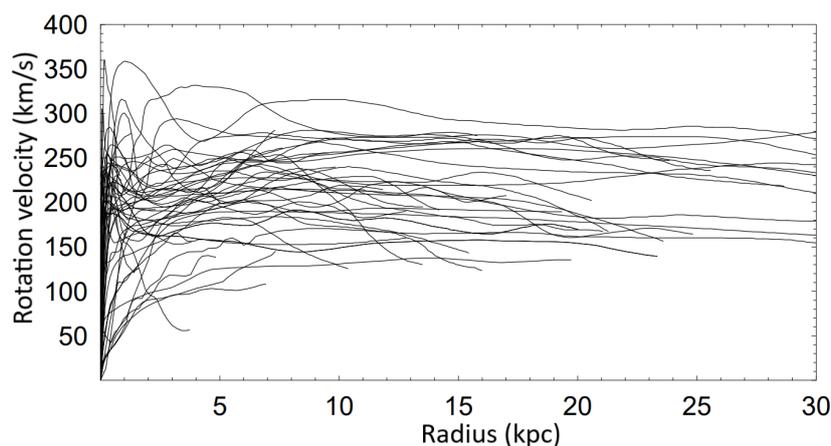


FIGURE 4.4 – Courbes de rotation de galaxies spirales obtenues en combinant des données CO pour les régions centrales, optiques pour les disques, et HI pour le disque externe et le halo ([92]). Ces courbes de rotation observées pour un large échantillon de galaxies spirales illustrent le plateau caractéristique de la vitesse de rotation à grande distance, une indication claire de la présence de matière noire dans les régions externes. De nombreuses galaxies présentent des pics de vitesse abrupts près du centre en raison de leurs noyaux à forte densité stellaire, ce qui diffère des prédictions de notre modèle, qui n'anticipe pas de tels pics de vitesse centraux.

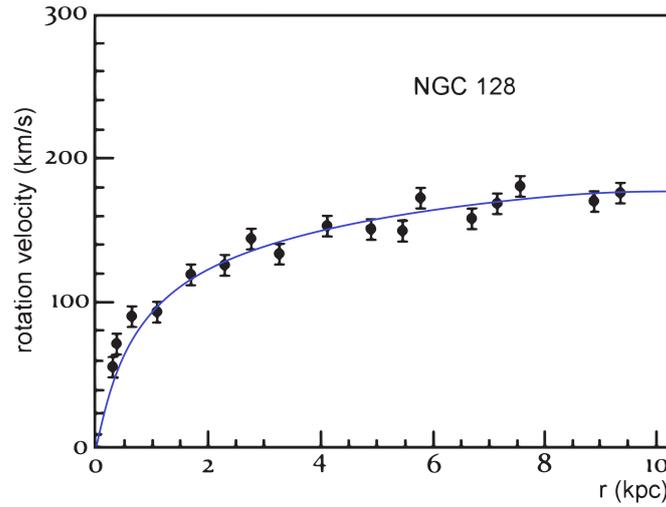


FIGURE 4.5 – Courbe de rotation de la galaxie prototype NGC 128, de type disque uniquement. Contrairement aux galaxies spirales typiques, les galaxies de type disque uniquement montrent une meilleure correspondance globale avec le modèle, avec une augmentation plus graduelle de la vitesse de rotation sans pics centraux prononcés.

La forme singulière près de l'origine résulte du phénomène de cannibalisme galactique. Les grandes galaxies absorbent les plus petites, mais les deux types restent des systèmes non-collisionnels. La petite galaxie tombe dans le puits de potentiel de la plus grande, subissant une compression de sa population stellaire. Comme une patineuse qui rapproche ses bras de son corps, la conservation du moment angulaire augmente la vitesse de rotation de ces étoiles.

4.3.3 Modélisation Des Effets De L'Environnement De Masse Négative Sur La Distribution De Vitesse

En symétrie sphérique, les deux axes transversaux de l'ellipsoïde des vitesses, qui sont égaux, diffèrent de l'axe pointant vers le centre de la galaxie. Pour un système axisymétrique, les deux axes transversaux diffèrent, ce qui a été développé dans la référence [60]. Dans la configuration de la figure 4.6, la forme de la fonction de distribution de vitesse correspond à une configuration particulière à symétrie sphérique :

$$\ln(f) = \ln B(r) - \frac{\mathbf{C}^2}{\langle c^2 \rangle} + a(r)(\mathbf{C} \cdot \mathbf{r})^2 \quad (4.3.126)$$

L'équation prend en compte la moyenne du carré des vitesses des particules, notée $\langle c^2 \rangle$, et une fonction potentielle $B(r)$, ainsi qu'une fonction $a(r)$ qui ajuste la distribution en fonction de la distance radiale r . Le terme \mathbf{C} représente la vitesse résiduelle d'agitation thermique, et $\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}$ représente le produit scalaire de la vitesse résiduelle avec le vecteur position, ce qui aurait une signification dans le contexte d'une distribution de vitesse dans une galaxie ou un système similaire.

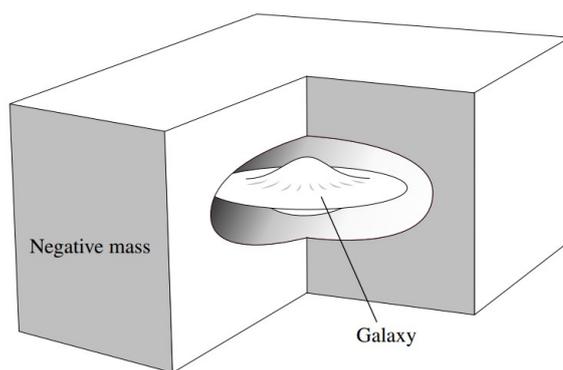


FIGURE 4.6 – Galaxie entourée d’une masse négative confinante.

Pour l’environnement de masse négative, une distribution de vitesse Maxwellienne est utilisée :

$$\ln(f) = \ln B(r) - \frac{\mathbf{C}^2}{\langle c^2 \rangle} \quad (4.3.127)$$

En introduisant ces fonctions dans les deux équations de Vlasov 4.3.9 et 4.3.10 et en utilisant l’algèbre dyadique ([20] [96]), nous obtenons des solutions exactes qui modélisent le confinement de cette galaxie correspondant à la figure 4.7.

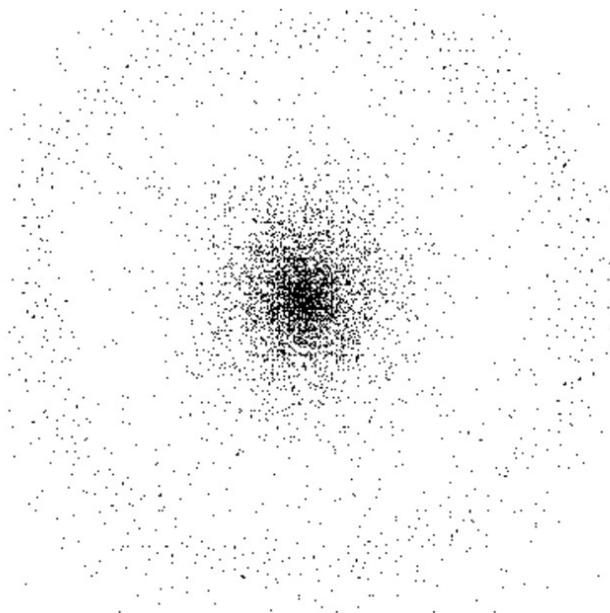


FIGURE 4.7 – Galaxie sphéroïdale, amas globulaire ou amas de galaxies.

Ce modèle met en évidence le rôle de l’environnement de masse négative dans le confinement des galaxies, des amas de galaxies et, dans le cas des galaxies, donne la possibilité de reconstruire leurs courbes de rotation plates. Les objets à masse positive sont situés dans des vides de la distribution de masse négative. Ces vides, équivalents à une masse positive, sont principalement responsables des effets de lentille gravitationnelle observés. Ainsi, le modèle rend compte de cet ensemble d’ob-

servations.

Dans cette perspective, il offre une alternative au modèle de matière noire. Dans ce contexte, une rotation de corps solide²⁵ est introduite.

L'image de la figure 3.7 provient de simulations numériques menées au laboratoire Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY) à Hambourg en 1992 par l'étudiant Frédéric Descamp, qui a utilisé le pseudonyme F. Landsheat dans ses publications. En seulement quelques cycles, après une phase transitoire, une galaxie spirale barrée se forme, et persiste pendant environ trente cycles [81].

L'évolution du moment cinétique de la galaxie, ainsi que l'établissement de sa courbe de rotation différant de la rotation initiale du corps solide, sont illustrés dans la figure 3.8.

Le phénomène de décélération sert d'illustration dans les systèmes où les collisions sont minimales et les phénomènes de transport tels que la chaleur et le moment angulaire sont négligeables. Dans le contexte des galaxies spirales, ces interactions sont orchestrées par des ondes de densité, qui deviennent évidentes dans la distribution des masses positives et de leurs contreparties dans le domaine des masses négatives, comme le démontrent les simulations numériques.

Depuis trois décennies, les astrophysiciens ont lié les structures spirales observées dans les galaxies à un phénomène de décélération. Un article de recherche récent [22] présente des preuves observationnelles de ce phénomène, connu sous le nom de *friction dynamique*. Les auteurs concluent que cela soutient l'hypothèse de l'existence d'un halo de matière noire, qui, selon eux, explique cette décélération. Néanmoins, une interprétation alternative reste plausible. Notre étude peut être vue comme fournissant un argument en faveur de l'idée que la décélération résulte de l'interaction entre la masse de la galaxie et l'environnement de masse négative qui la confine.

NB :

- Le *moment cinétique* est une propriété physique qui décrit la rotation d'un objet. Pour une galaxie, cela signifie la manière dont elle tourne dans l'espace. L'*évolution du moment cinétique* indique qu'au fil du temps, la façon dont la galaxie tourne change. Cela peut être dû à plusieurs facteurs, tels que les interactions gravitationnelles avec d'autres galaxies ou son environnement de masses négatives, les mouvements internes des étoiles, ou même la formation de nouvelles structures à l'intérieur de la galaxie.

- La *courbe de rotation* d'une galaxie montre comment la vitesse de rotation

25. Cela signifie que toutes les parties de l'objet tournent à la même vitesse, comme une toupie. Mais la courbe de rotation réelle de la galaxie diffère de ce modèle simple de corps solide. Autrement dit, la vitesse de rotation de la galaxie varie à différentes distances du centre, ce qui est typique pour les galaxies réelles.

varie à différentes distances de son centre. Typiquement, on s'attendrait à ce que les parties éloignées de la galaxie tournent plus lentement que les parties proches du centre, un peu comme les planètes dans notre système solaire - plus elles sont éloignées du soleil, plus leur vitesse orbitale est lente.

- Un phénomène de *friction dynamique* existe au sein de la galaxie. Il s'agit d'un processus qui se produit lorsqu'un objet massif, comme une étoile ou un groupe d'étoiles, se déplace à travers un champ de matière dense composé de gaz et d'étoiles dans une galaxie. En se déplaçant, cet objet massif attire la matière environnante en raison de la gravité. Cette matière tire en retour sur l'objet, le ralentissant progressivement. Imaginez courir à travers une foule. Même si les gens ne vous arrêtent pas directement, leur présence ralentit votre mouvement. C'est une analogie simple de la friction dynamique. Lorsque de nombreux objets dans une galaxie subissent une friction dynamique, cela peut ralentir la rotation générale de la galaxie. Ce ralentissement n'est généralement pas uniforme ; il peut affecter différentes parties de la galaxie de manière différente, en fonction de la distribution de la matière et des mouvements des étoiles et d'autres objets.

4.3.4 Conclusion

Le logarithme de la fonction de distribution a été modélisé selon un polynôme quadratique du second degré en les composantes U , V , et W de la vitesse résiduelle. En utilisant des données observationnelles au voisinage du Soleil, on peut sélectionner un ellipsoïde de vitesse dans une solution stationnaire et axisymétrique, avec son axe majeur orienté vers le centre de la galaxie. Les calculs ont révélé que la fonction de distribution est maxwellienne au centre de la galaxie, et que cet axe majeur reste constant dans l'espace, tandis que les axes transversaux tendent vers zéro en périphérie. Les calculs de vitesse révèlent une rotation uniforme au centre de la galaxie, similaire à celle d'un corps solide, qui évolue progressivement vers un plateau de vitesse constante en périphérie, une caractéristique typique des courbes de rotation galactiques observées. Ainsi, sur la base de mes considérations théoriques relatives à la forme de la distribution de vitesse résiduelle, nous pouvons observer que le champ responsable de cette distribution de vitesse n'a pas pour origine les masses visibles de la galaxie, mais plutôt une entité de nature inconnue. Dans l'interprétation standard, cela est attribué à la présence d'un halo de matière noire de masse positive. En revanche, dans le cadre du modèle cosmologique Janus de J-P Petit, un résultat similaire est obtenu avec une cavité dans une distribution uniforme de masse négative entourant la galaxie, où le profil de densité correspond à l'image négative du halo de matière noire. En analysant les courbes de rotation, nous pouvons remarquer qu'elles conservent les empreintes des instances successives de cannibalisme galactique, avec l'augmentation de la vitesse liée à la conservation du moment angulaire de la galaxie absorbée. Les deux galaxies, principale et ingérée, forment des systèmes non collisionnels, empêchant l'ajustement des vitesses angulaires entre elles. Ce modèle fournit un ajustement raisonnable aux courbes de vitesse rotationnelle observées pour les galaxies à disque uniquement, mais présente un désaccord marqué pour les galaxies dotées de noyaux centraux très denses.

4.4 Simulations de Galaxies Spirales Stables

Dans le cadre de l'étude des structures spirales galactiques, nous avons réalisé des simulations N-body 2D et 3D en Javascript. Ces simulations utilisent des techniques avancées pour modéliser l'interaction gravitationnelle entre masses positives et négatives, et intègrent des hypothèses spécifiques sur la matière négative.

4.4.1 Modèle Théorique

Calcul de la Force Gravitationnelle

Pour calculer l'accélération gravitationnelle dans un système N-body classique, nous pouvons utiliser la formule suivante [11] :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \quad (4.4.1)$$

Cette expression inclut un paramètre de lissage ϵ pour éviter les singularités lorsque deux masses sont très proches l'une de l'autre. Le code implémente cette formule par les étapes suivantes :

— Calcul de la distance au carré :

$$d = r.x^2 + r.y^2 + r.z^2 \quad (4.4.2)$$

— Calcul de l'inverse du cube de la distance :

$$inv_d = \frac{1}{d^{3/2}} \quad (4.4.3)$$

Pour $\epsilon = 0$, nous obtenons effectivement une force en $1/r^2$.

Dans la version actuelle de notre simulation, nous utilisons une méthode légèrement différente pour calculer les forces gravitationnelles, en intégrant un cutoff implicite pour éviter les singularités.

Dans la simulation, nous calculons la force gravitationnelle en appliquant un cutoff implicite. Cela signifie que si la distance entre deux particules est inférieure à une certaine valeur seuil, la force entre elles est considérée comme nulle. Cette méthode évite les singularités lorsque les particules sont très proches les unes des autres. La formule utilisée dans notre code est la suivante :

$$\vec{F}_{ij} = \begin{cases} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \cdot \vec{r}_{ij}, & \text{si } r_{ij} \geq r_{cutoff} \\ 0, & \text{si } r_{ij} < r_{cutoff} \end{cases} \quad (4.4.4)$$

où r_{cutoff} est la distance seuil en dessous de laquelle la force est considérée comme nulle.

Le code implémente cette formule de la manière suivante :

— Calcul de la distance entre les particules i et j :

$$d = \sqrt{(r_i.x - r_j.x)^2 + (r_i.y - r_j.y)^2 + (r_i.z - r_j.z)^2} \quad (4.4.5)$$

— Calcul de la force gravitationnelle en utilisant la distance modifiée :

$$\vec{F}_{ij} = \begin{cases} \frac{Gm_i m_j}{d^3} \cdot \vec{r}_{ij} & \text{si } d > r_{\text{cutoff}} \\ 0 & \text{si } d \leq r_{\text{cutoff}} \end{cases} \quad (4.4.6)$$

Cette méthode de calcul assure que les forces gravitationnelles restent finies et physiques même lorsque deux particules sont très proches l'une de l'autre, améliorant ainsi la stabilité de la simulation.

Condition d'Équivalence des Masses

Une condition importante dans notre simulation est que la masse inertielle m_i est égale à la valeur absolue de la masse gravitationnelle $|m_g|$. Cette condition permet de reproduire la dynamique newtonienne classique dans le cadre du modèle cosmologique Janus. En d'autres termes, elle assure que les interactions gravitationnelles dans notre simulation suivent les mêmes principes que ceux décrits par la mécanique newtonienne, même en présence de matière positive et négative.²⁶

La mise en œuvre de cette condition garantit que les forces d'interaction et les mouvements des particules dans la simulation restent cohérents avec les lois de la physique classique, tout en permettant d'explorer les effets uniques de la matière négative prévue par le modèle Janus. Cette approche simplifie également le calcul des forces gravitationnelles et contribue à la stabilité globale de la simulation.

Calcul de l'Accélération

Dans un cadre newtonien classique, la force gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 est donnée par :

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} \quad (4.4.7)$$

où m_{g1} et m_{g2} sont les masses gravitationnelles, r_{12} est la distance entre les masses, et \vec{r}_{12} est le vecteur unitaire dans la direction de $r_1 - r_2$.

L'accélération de la masse m_1 est alors donnée par :

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_{i1}} \quad (4.4.8)$$

26. En physique, la masse inertielle (m_i) mesure la résistance d'un objet à l'accélération lorsqu'une force est appliquée, tandis que la masse gravitationnelle (m_g) mesure la force gravitationnelle exercée par un objet. Le principe d'équivalence stipule que ces deux masses sont égales ($m_i = m_g$). Dans le modèle cosmologique Janus, cette condition est adaptée pour les masses négatives en utilisant $m_i = |m_g|$, ce qui signifie que la masse inertielle est égale à la valeur absolue de la masse gravitationnelle. Cette adaptation permet de conserver une dynamique cohérente même avec des masses négatives.

où m_{i_1} est la masse inertielle de m_1 .

Or, dans le modèle cosmologique Janus, nous avons $m_{i_1} = |m_{g_1}|$.

Ainsi, l'accélération devient :

$$\vec{a}_1 = \frac{Gm_{g_1}m_{g_2}}{|m_{g_1}|r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12} \quad (4.4.9)$$

Nous pouvons simplifier cela en notant que $m_{g_1}/|m_{g_1}|$ est le signe de m_{g_1} , soit :

$$\vec{a}_1 = \text{sgn}(m_{g_1}) \frac{Gm_{g_2}}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{12} \quad (4.4.10)$$

où $\text{sgn}(m_{g_1})$ est le signe de m_{g_1} .

Impact sur le Principe d'Équivalence

Le principe d'équivalence modifié se manifeste par le fait que les termes de masse gravitationnelle ne se simplifient plus dans l'expression de l'accélération. Autrement dit, la force gravitationnelle est toujours proportionnelle à m_{g_1} et m_{g_2} , mais l'accélération ressentie par une particule dépend de la valeur absolue de sa masse gravitationnelle. Cela se traduit par l'expression 4.4.9, où le terme $\frac{m_{g_1}}{|m_{g_1}|}$ représente le rapport entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle, qui n'est plus nécessairement égal à 1.

Cette distinction est importante pour comprendre les dynamiques gravitationnelles dans le modèle cosmologique Janus, où des particules de masse positive et négative interagissent selon des règles légèrement modifiées par rapport à la gravité newtonienne classique.

4.4.2 Résultats des Simulations

Les simulations en $2D + 1$ des figures 4.8, 4.10 (2 dimensions spatiales et 1 dimension temporelle) et en $3D + 1$ des figures 4.9, 4.11 (3 dimensions spatiales et 1 dimension temporelle) créent des galaxies stables qui ne s'effondrent pas. Un ami B. Mélesi a réalisé ces simulations en appliquant des hypothèses spécifiques sur la vitesse et la température de la matière négative, utilisant la condition de Jeans pour modéliser son comportement d'effondrement gravitationnel [49]. J'ai reproduit sa simulation et ajouté un algorithme de lissage des fluctuations de vitesse.

Pour les vitesses des particules, toutes les particules sont initialisées avec la même vitesse absolue, et une direction aléatoire est attribuée aux particules de masse négative. Bien que l'utilisation d'une distribution de Maxwell-Boltzmann soit commune [56], cette approche simplifiée n'affecte pas significativement la formation et l'évolution des galaxies dans cette simulation²⁷. Un potentiel gravitationnel est appliqué

²⁷. Le gaz de masse négative présent autour de la galaxie ne s'est pas effondré pour former des proto-étoiles géantes de masse négative. Par conséquent, ce gaz appartient déjà à la queue de la

vers le centre de la simulation pour représenter l'influence de la masse négative extérieure.

L'équilibre constant dans la simulation est maintenu grâce à un échange continu de particules à la frontière, reflétant l'interaction avec un environnement de matière négative. Un léger moment angulaire est appliqué pour initier le mouvement de rotation en spirale de la galaxie. Il est important de noter que la taille de la simulation doit être grande par rapport à la taille de la galaxie pour minimiser les effets d'onde induits par les particules négatives repoussées par les particules positives, assurant ainsi un rééquilibrage constant des masses.

4.4.3 Courbes de Rotation

La rotation de la galaxie composée uniquement de masses positives montre une croissance rapide de la vitesse de rotation des étoiles près du centre de la galaxie due à la forte concentration de masse. Ensuite, la vitesse de rotation diminue progressivement en suivant une relation proportionnelle à $1/r^2$, conforme aux lois képlériennes pour un système gravitationnel newtonien [11].

Néanmoins, la galaxie avec un halo de masse négative a une courbe de rotation (incrustée en haut à gauche de la figure 4.11) dont la vitesse augmente rapidement près du centre galactique, suivie d'une diminution progressive selon une relation proportionnelle à $1/r^2$, puis une stabilisation essentiellement plate à une distance plus éloignée due à l'échange dynamique des ondes de densité entre les particules de masses positive et négative.

Pour montrer que la vitesse de rotation tend à se stabiliser même à des distances éloignées du centre galactique, j'ai développé un algorithme de lissage des fluctuations de vitesse. Il divise le rayon de la galaxie en plusieurs segments, calcule la moyenne des vitesses des étoiles dans chaque segment et utilise une fenêtre glissante sur plusieurs segments voisins pour lisser les fluctuations.

distribution de Maxwell-Boltzmann, ce qui implique qu'il possède des vitesses supérieures à la moyenne avant même la formation de la structure à grande échelle de l'univers. Ainsi, avant la formation des galaxies, ce gaz faisait partie d'une distribution de vitesses relativement homogène, mais les particules situées à l'extrémité de cette distribution présentaient des vitesses plus élevées. Après l'effondrement des proto-étoiles géantes et la formation des galaxies, il est incertain que ce gaz de masse négative soit suffisamment dense pour atteindre un nouvel équilibre thermique, tel que décrit par une distribution de Maxwell-Boltzmann. En fait, pour déterminer si ce gaz de masse négative peut se rééquilibrer thermiquement après ces processus, il serait nécessaire de réaliser des simulations hydrodynamiques avancées incorporant les effets de la relativité générale (RG). De telles simulations permettraient d'évaluer la capacité du gaz à atteindre une nouvelle distribution de Maxwell-Boltzmann après la formation des grandes structures. IL s'agit là d'un nouveau terrain de recherche à développer.

Simulation size : 2400 px

Scale (pixel / light-year) -> 1px/2000ly = 0.0005 :

Time Step (years):

Number of Stars (of each ,total star x2):

Negative Mass (solar mass):

Positive Mass (solar mass):

Size of Negative Hole (pixels):

Galaxy radius Size (pixels):

Galaxy initial Shape (1 for circular, < 1 for elliptical):

Rotation Speed :

Initial speed in pixel/year (tuned empirically for NegMatter, no Jean instability condition of points):

Star Color Nega:

Star Color Posi:

Star Neg Opacity (0-100):

Star Posi Opacity (0-100):

FIGURE 4.8 – Interface de configuration des paramètres pour la simulation N-Body en $2D + 1$ utilisant le modèle cosmologique Janus. Elle intègre des paramètres telles que la taille de la simulation, l'échelle, le pas de temps, le nombre d'étoiles de masse positive et négative, les masses solaires correspondantes, le rayon de la galaxie, la forme initiale de la galaxie, la vitesse de rotation initiale, et les opacités des étoiles de masse positive et négative. Ces paramètres permettent d'ajuster les conditions initiales et d'observer différents comportements dynamiques dans la simulation.

4.4.4 Conclusion

Ces simulations montrent que des galaxies spirales stables peuvent être formées et maintenues grâce aux interactions complexes entre la matière à masse positive et la matière à masse négative, selon le modèle cosmologique Janus. Les résultats obtenus confirment les observations des courbes de rotation galactique et offrent une nouvelle perspective sur la dynamique des galaxies.

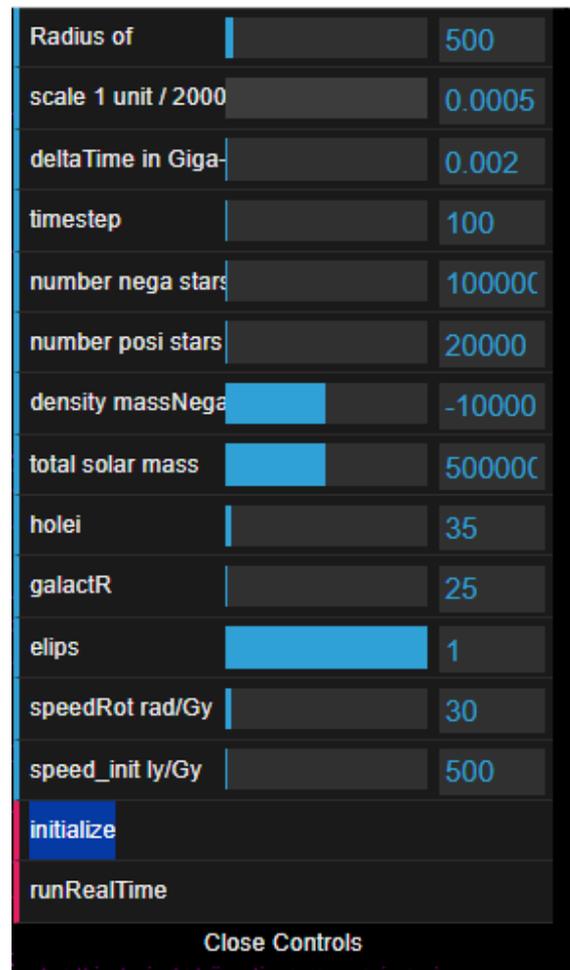


FIGURE 4.9 – Interface de configuration des paramètres pour la simulation N-Body en $3D + 1$ utilisant le modèle cosmologique Janus. Elle intègre des paramètres telles que la taille de la simulation, l'échelle, le pas de temps, le nombre d'étoiles de masse positive et négative, les masses solaires correspondantes, le rayon de la galaxie, la forme initiale de la galaxie, la vitesse de rotation initiale, et les opacités des étoiles de masse positive et négative. Ces paramètres permettent d'ajuster les conditions initiales et d'observer différents comportements dynamiques dans la simulation.

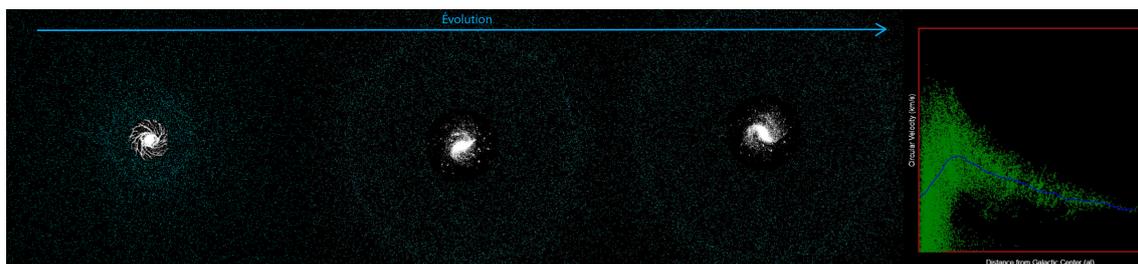


FIGURE 4.10 – Évolution temporelle de la galaxie spirale dans la simulation N-Body en $2D + 1$ utilisant le modèle cosmologique Janus. Les images montrent la distribution des étoiles de masse positive (en blanc) et de masse négative (en cyan) à trois étapes différentes de la simulation. On observe la formation et la stabilisation d’une structure spirale, avec une interaction dynamique continue entre les particules de masse positive et négative (*friction dynamique* par échange d’ondes de densité). Ces images illustrent comment les paramètres initiaux influencent la formation et l’évolution de la galaxie spirale. La courbe de rotation (à droite en bleu) montre la vitesse circulaire des étoiles en fonction de la distance par rapport au centre galactique en années-lumière. Elle représente la moyenne mobile de la vitesse des étoiles soumises à un halo de masse négative tandis que les points verts montrent les vitesses individuelles des étoiles. On observe une augmentation rapide de la vitesse de rotation près du centre galactique, suivie d’une diminution progressive conforme à une relation proportionnelle à $1/r^2$, et une stabilisation à des distances plus éloignées due à l’influence de cet halo de masse négative.

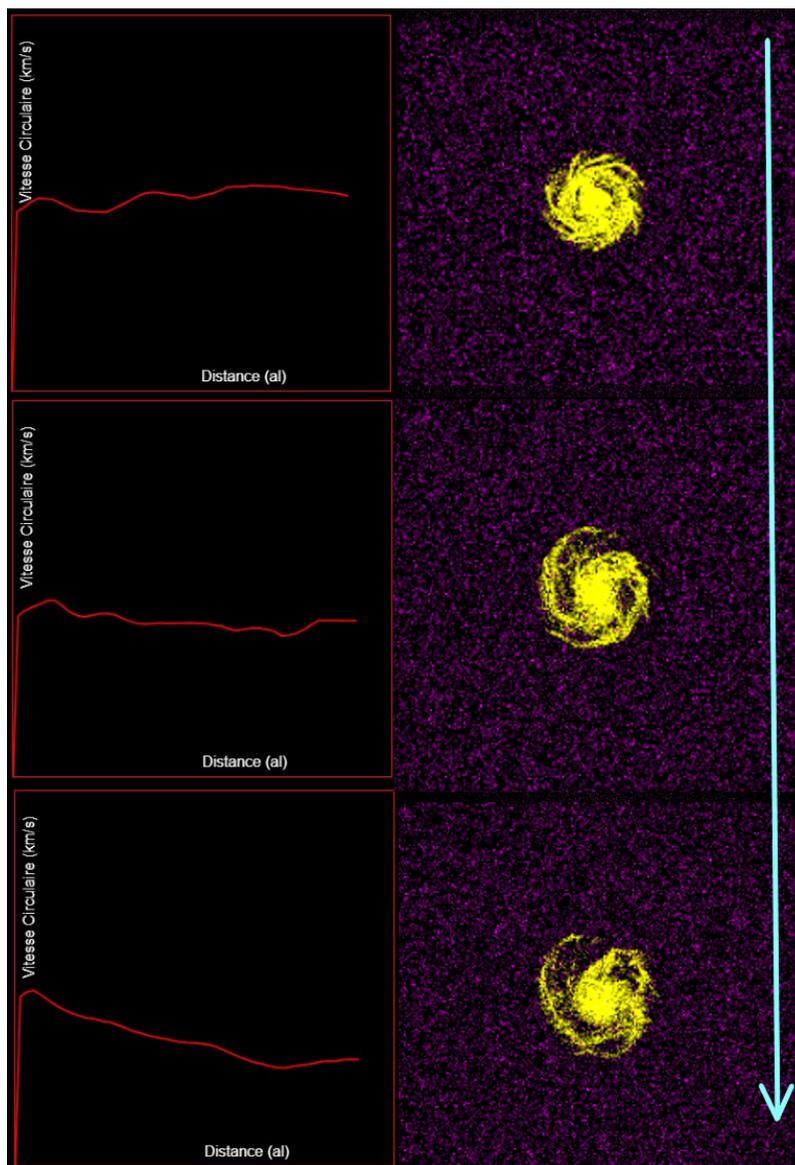


FIGURE 4.11 – Simulation N-Body $3D + 1$ d'une galaxie spirale stable représentant notre voie lactée utilisant le modèle cosmologique Janus. Cette simulation présente la distribution des étoiles avec des particules positives (en jaune) et des particules négatives (en violet). Les paramètres de la simulation incluent un nombre de 100,000 masses négatives et 20,000 masses positives, une masse solaire totale de 5×10^{11} unités, une densité de masse négative de $-10,000$ unités (masse solaire / année-lumière³), et un paramètre de lissage $\epsilon = 1$. La courbe de rotation (incrutée en haut à gauche) montre la vitesse circulaire des étoiles de masse positive soumises à un halo de masses négatives en fonction de la distance au centre de la galaxie en années-lumière. On observe une vitesse de rotation qui augmente rapidement près du centre galactique, suivie d'une diminution progressive selon une relation proportionnelle à $1/r^2$, puis une stabilisation à une distance plus éloignée due à l'échange dynamique des ondes de densité entre les particules de masses positive et négative. Les paramètres de simulation permettent d'explorer différents effets de masse, de vitesse et de taille, garantissant la formation et la stabilité de la galaxie spirale dans un cadre newtonien.

Chapitre 5

Contribution à la Cosmologie & à la Physique des Particules

5.1 Introduction aux Groupes Dynamiques

La Théorie des Systèmes Dynamiques est une discipline mathématique axée sur l'analyse des évolutions au fil du temps de différents systèmes en prenant en compte les conditions initiales et les influences externes. *La Géométrie Symplectique*, qui fusionne des aspects de la théorie des systèmes dynamiques avec ceux de la géométrie différentielle, se penche sur les propriétés et les déformations des espaces courbes sous l'action de forces extérieures. Ce domaine, fondé sur les principes de la mécanique hamiltonienne, explore des structures nommées "*variétés symplectiques*", dotées d'une configuration singulière utile pour mesurer les volumes. À la différence de la géométrie riemannienne qui se sert d'un tenseur métrique pour évaluer longueurs et angles, la géométrie symplectique emploie une forme mathématique, la "*forme symplectique*", pour le calcul des superficies.

Jean-Marc Souriau a été un pionnier de premier plan en géométrie topologique symplectique. Il a développé le concept de quantification géométrique, transformant des quantités physiques fondamentales telles que l'énergie et la quantité de mouvement en objets purement géométriques. Le travail de Souriau a donné une signification physique à l'inversion de la flèche du temps dans notre modèle cosmologique ([10], [50]).

Qu'est-ce qu'un groupe ?

En termes mathématiques, il fait référence à certaines matrices agissant sur d'autres matrices. Mais physiquement, que représente cela ?

Selon J-M Souriau, un groupe est créé pour le transport, et la méthode de transport est plus significative que l'entité transportée : "*Dites-moi comment vous vous déplacez, et je vous dirai qui vous êtes.*"

Notre attention se porte principalement sur les groupes de Lie (voir [16]), qui sont à la fois des groupes et des variétés différentielles (des "*espaces courbes*" localement projetés sur un espace euclidien n-dimensionnel). Ils sont essentiels pour décrire les

mouvements et les transformations dans l'espace. Deux groupes clés sont le groupe orthogonal $O(3)$ et le groupe euclidien $E(3)$:

- **Le groupe orthogonal $O(3)$** est utilisé pour décrire les rotations et les symétries en trois dimensions, préservant les distances dans l'espace. Il comprend un sous-groupe appelé $SO(3)$, le groupe des rotations, qui gère les rotations autour d'un axe.
- **Le groupe euclidien $E(3)$** décrit les mouvements tridimensionnels tels que les rotations, les symétries et les translations. Basé sur le groupe orthogonal $O(3)$, il peut être décomposé en une force et un couple appliqués à un objet en mécanique des solides. Il s'agit d'un groupe dans lequel le théorème de Pythagore peut être utilisé pour calculer la distance entre deux points. Ce groupe transforme un point avec des coordonnées x, y, z en un nouveau point avec des coordonnées x', y', z' . La caractéristique unique de ce groupe dynamique est sa capacité à générer une famille d'objets géométriques invariants au sein du groupe. Par exemple, une ligne soumise à une translation reste une ligne, en faisant un objet géométrique invariant unidimensionnel. Une sphère est un exemple parfait d'objet symétrique tridimensionnel. Sa propriété unique est qu'elle reste inchangée sous l'action d'une rotation autour de son centre, démontrant une symétrie de rotation. En termes géométriques, cela implique que lorsqu'une sphère effectue un mouvement de rotation, elle conserve ses propriétés géométriques de manière uniforme en chaque point. Dans le domaine de la physique, en particulier dans l'étude de l'espace-temps en relativité générale, la solution de Schwarzschild est un concept important. Elle décrit le champ gravitationnel à l'extérieur d'une masse sphériquement symétrique et non rotative telle qu'une étoile. La métrique de Schwarzschild, solution des équations de champ d'Einstein, est invariante sous l'action de rotations et de translations dans le temps et l'espace, ressemblant à l'invariance observée en géométrie euclidienne mais appliquée à l'espace-temps courbé de la relativité générale. Dans l'espace-temps de Schwarzschild, les géodésiques sont déterminées par la courbure de l'espace-temps, qui est décrite par la métrique de Schwarzschild. Pour un objet se déplaçant le long d'une géodésique, certaines quantités comme son moment angulaire et son énergie par rapport à la masse causant la courbure de l'espace-temps sont conservées. Cette conservation est le résultat des symétries de l'espace-temps, analogues aux lois de conservation en mécanique classique.

Les groupes de Lie décrivent donc les mouvements dans l'espace tout en préservant les distances et les longueurs. Ce sont des groupes d'isométrie lorsque les propriétés géométriques des objets en mouvement restent inchangées (distances et angles) dans l'espace lors d'une transformation. Les rotations sont des exemples de symétries de l'espace tridimensionnel, car elles n'altèrent pas les propriétés géométriques de l'espace. Par exemple, faire tourner un cube ne modifie pas les distances entre ses sommets. En d'autres termes, les propriétés géométriques de l'objet restent inchangées, même si sa position a été modifiée.

Selon la théorie de la relativité restreinte, au lieu de vivre dans un espace euclidien tridimensionnel $[x, y, z]$ avec une signature $(+ + +)$ où le temps est une entité distincte, nous existons en réalité dans un espace-temps à quatre dimensions où les trois dimensions spatiales sont perpendiculaires à une dimension temporelle $[t, x, y, z]$ appelé espace de Minkowski dont la signature est $(- + + +)$.

Le groupe de Poincaré, associé à cet espace, joue un rôle important dans la description des mouvements dans l'espace-temps de la relativité restreinte. Ce groupe permet de modéliser des comportements spécifiques, notamment ceux de particules sans masse telles que les photons, qui se déplacent invariablement à la vitesse de la lumière. Bien que leur vitesse demeure constante, la gravité affecte leur énergie, ce qui se manifeste dans des phénomènes tels que le décalage vers le rouge gravitationnel. Par ailleurs, le groupe de Poincaré s'applique aussi aux particules de masse non nulle, chacune obéissant à ses propres dynamiques dictées par les principes de la relativité. Ce groupe dynamique appliqué à la relativité restreinte, inclut le mouvement de masses ou de photons avec une possible inversion de la flèche du temps¹, et peut être représenté sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.1)$$

où L représente la matrice du groupe de Lorentz (\mathcal{Lor}) qui décrit comment les coordonnées d'espace-temps changent entre différents référentiels inertiels. Ces transformations incluent les rotations dans l'espace ainsi que les transformations de Lorentz (boosts), qui sont des changements de référentiels en mouvement à une vitesse constante l'un par rapport à l'autre. C est un vecteur correspondant aux translations spatio-temporelles dans $\mathbb{R}^{1,3}$.

En effet, la moitié des éléments du groupe dynamique inversent le temps, ce qui signifie que si nous considérons un élément espace-temps comme une masse ou un photon et que nous appliquons un mouvement temporel du passé vers le futur, nous pouvons réaliser le même mouvement dans le sens inverse en utilisant le groupe de Poincaré. Par conséquent, selon la théorie de Souriau issue de son travail "*Structure of Dynamic Systems*" ([50]), si le groupe dynamique peut faire circuler des photons ou des masses avec une flèche du temps en opposition, alors leur énergie, et donc leur masse, peut également être inversée.

N.B. : Le groupe de Poincaré restreint gère exclusivement les mouvements relativistes "*orthochrones*" en quatre dimensions de l'espace de Minkowski, passant du passé au futur. Sa forme matricielle inclut la matrice L_o du groupe de Lorentz "*orthochrone*" \mathcal{Lor}_o comme suit :

$$\begin{pmatrix} L_o & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

Peut-on maintenant considérer ces mouvements avec une énergie et une masse négatives et une flèche du temps opposée comme faisant partie de la Physique ? Peuvent-

1. Du passé vers le futur et vice versa.

ils être mesurés ou observés ?

Les particules avec une énergie négative émettent des photons d'énergie négative, elles ne peuvent donc pas être observées ni mesurées optiquement. Cependant, il a été observé et mesuré que l'expansion de l'univers s'accélère en raison de la pression négative liée à l'énergie noire ([69]). En effet, la pression est une densité d'énergie par unité de volume.

Ainsi, l'expansion de l'univers est directement liée à l'énergie négative. Cela suggère qu'une partie substantielle de l'univers, actuellement définie comme de l'énergie noire, affecte cette expansion par le biais de l'effet gravitationnel. Cette approche dynamique et géométrique fournit donc une réponse à son origine et à sa nature. Elle pourrait contenir des masses ou des photons chargés d'énergie négative.

5.2 Diverses Symétries Associées à Chaque Opérateur d'Inversion

Le groupe de Poincaré restreint gère les mouvements relativistes en quatre dimensions de l'espace de Minkowski. Le groupe de Poincaré est le groupe défini selon la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.1)$$

où C est le vecteur correspondant aux translations spatio-temporelles dans $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (5.2.2)$$

Il agit sur les points de l'espace de Minkowski selon :

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.2.3)$$

Ce groupe de Lie à 10 paramètres indépendants² est le groupe d'isométrie de cet espace, défini par sa métrique :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (5.2.4)$$

Le groupe de Lorentz \mathcal{Lor} possède quatre composantes connexes :

2. Inclut les 6 paramètres indépendants du groupe de Lorentz (3 rotations et 3 boosts) et 4 transformations indépendantes qui sont les translations suivant les 4 directions de l'espace de Minkowski.

— $\mathcal{L}or_n$ la composante neutre, n'inverse ni l'espace ni le temps et se définit par :

$$\mathcal{L}or_n = \{L \in \mathcal{L}or, \det(L) = 1 \wedge [L]_{00} \geq 1\}$$

— $\mathcal{L}or_s$ inverse l'espace et se définit par :

$$\mathcal{L}or_s = \{L \in \mathcal{L}or, \det(L) = -1 \wedge [L]_{00} \geq 1\}$$

— $\mathcal{L}or_t$ inverse le temps mais pas l'espace et se définit par :

$$\mathcal{L}or_t = \{L \in \mathcal{L}or, \det(L) = 1 \wedge [L]_{00} \leq -1\}$$

— $\mathcal{L}or_{st}$ inverse à la fois l'espace et le temps et se définit par :

$$\mathcal{L}or_{st} = \{L \in \mathcal{L}or, \det(L) = -1 \wedge [L]_{00} \leq -1\}$$

Et on obtient :

$$\mathcal{L}or = \mathcal{L}or_n \sqcup \mathcal{L}or_s \sqcup \mathcal{L}or_t \sqcup \mathcal{L}or_{st} \quad (5.2.5)$$

Les deux premières composantes sont regroupées pour former le sous-ensemble appelé "orthochrone" :

$$\mathcal{L}or_o = \mathcal{L}or_n \sqcup \mathcal{L}or_s \quad (5.2.6)$$

Il inclut la *symétrie P*, ce qui ne pose aucun problème aux physiciens qui savent qu'il existe des photons d'"*hélicité droite et gauche*" dont les mouvements sont dérivés de cette symétrie. Cela correspond au phénomène de polarisation de la lumière.

Les deux dernières composantes forment le sous-ensemble "antichrone" ou "rétrochrone", dont les composantes inversent le temps :

$$\mathcal{L}or_a = \mathcal{L}or_t \sqcup \mathcal{L}or_{st} \quad (5.2.7)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\mathcal{L}or = \mathcal{L}or_o \sqcup \mathcal{L}or_a \quad (5.2.8)$$

Notons que :

$$\mathcal{L}or_t = -\mathcal{L}or_s \quad \mathcal{L}or_{st} = -\mathcal{L}or_n \quad (5.2.9)$$

Le *groupe de Poincaré* hérite des propriétés du groupe de Lorentz et possède donc quatre composantes connexes, il est défini par :

$$\mathcal{P}oin := \left\{ \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.2.10)$$

5.3 Groupe Dynamique de Lorentz

L'application de l'action coadjointe d'un groupe dynamique sur le dual de son algèbre de Lie, initiée par le mathématicien Jean-Marie Souriau, a éclairé certains aspects de l'approche suivie en physique. Le groupe dynamique de Lorentz restreint, limité à ses deux composantes orthochrones, traduit, à travers ses propriétés d'invariance résultantes, des aspects de la relativité restreinte. En 1970, J-M Souriau

a établi que l'analyse des composantes de son moment met en évidence la nature géométrique d'un spin ([93] [95]). Le groupe de Lorentz possède deux composantes orthochrones connexes, à savoir sa première composante neutre, contenant l'élément neutre du groupe, et sa deuxième composante énantiomorphe, inversant l'espace synonyme de la *symétrie P*. Dans la théorie des groupes dynamiques, une classification en termes de mouvements devient évidente. À ce stade, l'action de ces éléments inversant l'espace est illustrée dans le phénomène de la polarisation de la lumière, où tout photon "*droit*" peut être converti en un photon "*gauche*". Ce groupe peut être représenté par une famille de matrices L de dimension 4×4 , définies axiomatiquement par $L^T G L = G$, où L^T est la transposée de la matrice de Lorentz L , et G est la matrice métrique de Minkowski, souvent appelée matrice de Gram dans ce contexte. En relativité restreinte, elle est généralement représentée par une matrice diagonale avec des éléments $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Cette équation signifie que la transformation de Lorentz préserve le produit scalaire de Minkowski, condition importante pour la cohérence de la théorie de la relativité restreinte.

5.4 Groupe Dynamique de Poincaré Restreint

Le produit du groupe de Lorentz avec le groupe de translation spatio-temporelle nous permet de construire le groupe dynamique de Poincaré restreint, toujours limité à ses deux composantes orthochrones. Dans son moment, nous trouvons d'abord l'énergie liée au sous-groupe des translations temporelles. Ensuite, l'impulsion, liée aux translations spatiales, les deux étant reliées par l'invariance du module du quadri-vecteur énergie-impulsion sous l'action du groupe de Lorentz. La matrice associée à ce groupe doit inclure la matrice de Lorentz "*orthochrone*" L_o de dimension 3×3 , ainsi que le vecteur de translation C et des composantes supplémentaires pour compléter sa structure (voir 5.1.2).

5.5 Groupes Dynamiques de Kaluza & Janus Restreints

En ajoutant une translation le long d'une cinquième dimension au groupe de Poincaré restreint, nous formons un groupe de Lie auquel nous donnerons le nom de *Groupe de Kaluza Restreint* ([7], [9], [10], [50], [52]). Ce groupe n'est pas le groupe de Kaluza à 15 paramètres indépendants associé à une variété lorentzienne à 5 dimensions, mais un nouveau groupe à 11 paramètres indépendants, incluant un paramètre de translation en plus des 10 paramètres du groupe de Poincaré. Cette nouvelle dimension confère à l'impulsion, un scalaire supplémentaire de nature purement géométrique qui peut être identifié à la charge électrique q , positive, négative ou nulle. Nous mettons alors en évidence la translation géométrique selon un scalaire ϕ en dotant les masses d'une charge électrique invariante. Ensuite, en introduisant une nouvelle symétrie reflétant l'inversion de la cinquième dimension, synonyme d'inversion du scalaire de q à $-q$, nous doublons le nombre de ses composantes connexes de 2 à 4. L'action sur le moment lie ensuite cette nouvelle symétrie

à l'inversion de la charge électrique q . Nous déduisons ainsi la modélisation géométrique de la conjugaison de charge ou de la *Symétrie C*, qui traduit la symétrie "*Matière-Antimatière*" introduite par Dirac. Il est alors logique de nommer cette nouvelle extension le *Groupe Janus Restreint*.

5.6 Groupe Dynamique Janus

En introduisant une nouvelle symétrie au groupe précédent, que nous décrivons comme *Symétrie T* et qui convertit la matière en antimatière à masse négative³, nous construisons le *Groupe Dynamique Janus*. Ainsi, nous doublons le nombre de composantes connexes de quatre à huit, regroupées en deux sous-ensembles : "*orthochrones*", conservant les propriétés temporelles et énergétiques, et "*antichrones*", inversant le temps et l'énergie. Par conséquent, nous mettons en avant la translation géométrique consistant à doter les masses d'une charge électrique invariante. Comme l'a démontré Jean-Marie Souriau dès 1970, pionnier dans la théorie des groupes dynamiques ([93], [95]), cette approche a permis de conférer une nature purement géométrique à des éléments clés qui ont marqué les progrès de la physique relativiste.

Voici la matrice associée au Groupe Dynamique Janus à partir de laquelle il est possible de reconstruire tous les groupes de symétrie :

$$\mathcal{Jan} = \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^\mu & 0 & \phi \\ 0 & T^\lambda S^\nu L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \{0, 1\} \wedge \phi \in \mathbb{R} \wedge L \in \mathcal{Lor} \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.1)$$

— *Symétrie P* :

En appliquant $\mu = 0$, $\lambda = 0$ et $\nu = 1$, nous obtenons :

$$\mathcal{Jan} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L_s = SL_n \in \mathcal{Lor} \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.2)$$

Cet opérateur de symétrie correspond à l'inversion de l'espace, où un élément de la deuxième composante connexe du groupe orthochrone est considéré. C'est cette symétrie qui inverse l'hélicité d'un photon, transformant un "*photon droit*" en un "*photon gauche*", ce qui correspond au phénomène de la polarisation de la lumière.

— *Symétrie C* :

Nous devons appliquer $\mu = 1$, $\lambda = 0$ et $\nu = 0$.

En partant de l'élément L_n du groupe de Lorentz restreint orthochrone, en inversant la cinquième dimension portant la charge électrique q , nous obtenons l'opérateur "*Symétrie C*" ou "*conjugaison de charge*" (quantique) tel

3. Un concept que nous pourrions appeler *antimatière au sens de Feynman*

que :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.3)$$

C'est cette symétrie qui représente la transformation "*Matière-Antimatière*".

— **Symétrie T :**

En appliquant $\mu = 0$, $\lambda = 1$ et $\nu = 0$, nous supprimons la *symétrie C* ($\mathcal{J}an_{11} = 1$) et la *symétrie P* ($\mathcal{J}an_{22} = -L_s$). Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L_s = -L_t = -TL_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.4)$$

— **Symétrie CP :**

En appliquant $\mu = 1$, $\lambda = 0$ et $\nu = 1$, nous ajoutons la *symétrie C* ($\mathcal{J}an_{11} = -1$) et la *symétrie P* ($\mathcal{J}an_{22} = L_s$) de manière à obtenir :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L_s = SL_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.5)$$

NB : On peut également la déduire en supprimant la *symétrie T* ($\mathcal{J}an_{22} = L_s$) de la *symétrie CPT* suivant cette opération : $\mathbf{CP} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{CPT}$

— **Symétrie CPT :**

Nous devons appliquer $\mu = 1$, $\lambda = 1$ et $\nu = 1$.

Nous savons que l'élément L_n du groupe neutre n'inverse ni le temps ni l'espace, donc l'élément $\mathcal{J}an_{22} = -L_n$ inverse à la fois l'espace et le temps pour former l'opérateur de *symétrie PT*. Cependant, si nous ajoutons la *symétrie C* ($\mathcal{J}an_{11} = -1$), nous formons le *groupe Janus CPT avec une symétrie de charge* tel que :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L_n = -TSL_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.6)$$

— **Symétrie PT :**

Nous devons appliquer $\mu = 0$, $\lambda = 1$ et $\nu = 1$.

En supprimant la *symétrie C* ($\mathcal{J}an_{11} = 1$) de la *symétrie CPT* suivant cette opération : $\mathbf{PT} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{CPT}$ nous obtenons :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L_n = -TSL_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.7)$$

— *Symétrie CT* :

Nous devons appliquer $\mu = 1$, $\lambda = 1$ et $\nu = 0$.

En supprimant la *symétrie P* ($\mathcal{J}an_{22} = -L_s$) de la *symétrie CPT* suivant cette opération : $\mathbf{CT} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{CPT}$ nous obtenons :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L_s = -TL_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.8)$$

— *Opérateur Neutre* :

En appliquant $\mu = 0$, $\lambda = 0$ et $\nu = 0$, l'objet se déplace à travers les cinq dimensions sans changer sa nature. Seul l'élément neutre du sous-groupe "orthochrone" est considéré ($\mathcal{J}an_{22} = L_n$). Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{J}an = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.6.9)$$

Il est important de noter que Feynman considère que l'application de la *symétrie PT* aux mouvements des particules conduit à la création d'antimatière par l'application de la *symétrie C*. Par conséquent, la *symétrie PT* est équivalente à la *symétrie C*, c'est-à-dire qu'une particule de matière "vue dans un miroir" et se déplaçant "à rebours" dans le temps est de l'antimatière.

Cette perspective découle du travail de Weinberg, "La théorie quantique des champs" dans la Section 2.6, intitulée "Inversion de l'espace et renversement du temps" ([103]). En effet, un choix arbitraire est appliqué pour l'opérateur d'inversion T , ce qui fait que l'opérateur CPT devient l'identité.

Ainsi, étant donné que $\mathbf{CPT} = \mathbf{I}$, il s'ensuit que $\mathbf{PT} = \mathbf{PT} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{PT} \cdot \mathbf{CPT} = \mathbf{C}$. Par conséquent, le point de vue de Feynman repose principalement sur la mécanique quantique, où les théoriciens quantiques font des choix a priori entièrement arbitraires concernant les opérateurs P et T , contraints par la "nécessité d'éviter l'émergence d'états d'énergie négative (considérés comme non-physiques)". Par conséquent, l'opérateur P doit être linéaire et unitaire, et l'opérateur T anti-linéaire

et anti-unitaire. Et pour conclure en ajoutant à la page 104 que : "*On ne connaît aucun exemple de particules fournissant des représentations non conventionnelles des inversions, donc ces possibilités ne seront pas explorées davantage ici. Désormais, on supposera que les inversions ont l'action conventionnelle décrite dans la Section 2.6*".

Les états d'énergie négative (associés à une pression négative) existent car ils sont responsables de l'accélération de l'expansion cosmique, comme en témoigne le travail récompensé par le prix Nobel de Perlmutter en 2011 ([69]). Cependant, à l'époque de l'émergence de la théorie quantique des champs, ce phénomène n'était pas encore connu.

Par conséquent, pour Feynman, la présence de l'opérateur d'inversion du temps T dans sa *symétrie PT* globale ne conduit pas à l'inversion de la masse, mais transforme la matière en antimatière de masse positive par inversion de charge via la *symétrie C*.

Dans la perspective du groupe Janus, en partant du mouvement d'une particule de masse positive dans l'espace à 5 dimensions, la *symétrie C* (portée par l'inversion de la cinquième dimension) transforme cette particule (ce mouvement) en une antiparticule de masse positive que l'on peut appeler une "*antiparticule de type Dirac*", similaire à celle produite en laboratoire et qui a récemment été démontrée comme se comportant de la même manière que la matière ordinaire sous l'influence de la gravité ([5]).

D'autre part, la transformation *PT*-symétrique appliquée à une particule produit une antiparticule avec une énergie et une masse négatives, due à la *symétrie T*, que l'on peut appeler une "*antiparticule de type Feynman*", correspondant à l'antimatière primordiale située entre les galaxies et que l'on trouve notamment sous forme de conglomérats dans le *Répulseur du Dipôle* ([47]). L'équivalence $PT = C$, selon Feynman, n'est alors plus applicable.

5.7 Implications

Les contributions significatives de cette étude affectent principalement les domaines de la mécanique quantique et de la cosmologie :

- **En mécanique quantique**, un aspect notable est l'inversion de l'énergie de certains objets. Une question intrigante se pose concernant la faisabilité d'objets ayant des états d'énergie négative en mécanique quantique. En abordant la *symétrie T*, les physiciens quantiques adoptent traditionnellement une perspective anti-linéaire et anti-unitaire pour l'opérateur T , dans le but d'exclure les états d'énergie négative, qui ne sont généralement pas considérés comme intrinsèques à la physique. De manière similaire, un opérateur P est choisi comme étant unitaire et linéaire pour des raisons analogues (voir [103]). Ces choix sous-tendent le théorème *CPT*, renforçant l'idée que la *symétrie PT* s'aligne avec la *symétrie C*. Au contraire, l'adoption d'un opérateur T linéaire

et unitaire révèle que les états d'énergie négative sont un résultat naturel dans les équations de Schrödinger et de Dirac, ouvrant la voie à de nouveaux terrains de recherche. De plus, les observations cosmologiques ont confirmé que l'expansion de l'univers s'accélère, attribuée à une pression négative associée à l'énergie noire, comme l'a démontré le travail de Perlmutter récompensé par le prix Nobel en 2011. Puisque la pression représente une densité d'énergie par unité de volume, ce phénomène est directement lié à l'influence de l'énergie négative sur l'expansion de l'univers.

- **Dans le domaine de la cosmologie**, la relativité générale rejette fermement le concept de masses négatives, invoquant l'émergence du phénomène de fuite et des conflits avec les principes d'action-réaction et d'équivalence (voir [13]). Par conséquent, tout nouveau modèle proposant l'intégration d'états d'énergie et de masse négatifs nécessiterait une extension du cadre géométrique fondamental de la relativité. La théorie des groupes dynamiques, centrée autour de divers groupes tels que Lorentz, Poincaré ou Kaluza, fournit un cadre pour décrire un univers dépourvu de forces, caractérisé par une structure plate et non courbée. Dans un tel univers, les particules suivent les géodésiques de l'espace de Minkowski dans une métrique lorentzienne ou naviguent dans un espace fibré influencé par une cinquième dimension, qu'elle soit ouverte ou fermée. Cette approche théorique suggère la coexistence de deux types distincts de matière, existant en isolation sans interaction mutuelle. Ainsi, les particules dans ces espaces n'interagissent pas les unes avec les autres. Cette perspective innovante ouvre de nouvelles voies pour comprendre les interactions entre particules dans l'espace-temps.

5.8 Annexe

Dans la théorie des groupes dynamiques développée par J.M. Souriau en 1970, la connexion entre la structure géométrique et le contenu physique d'un système est explorée à l'aide de groupes dynamiques spécifiques ([93],[95]). Ces groupes dynamiques décrivent les symétries et les transformations qui préservent les propriétés géométriques du système. En étudiant la nature du groupe dynamique associé à un système physique donné, nous pouvons déterminer les relations entre la géométrie et les quantités physiques associées.

Chaque mouvement d'un objet dans l'espace-temps possède son moment. Cependant, cela n'est pas synonyme d'*instant* ou des concepts physiques de moment linéaire ou angulaire. Le terme *moment* en théorie des groupes se réfère au mouvement, c'est-à-dire un déplacement physique entre des points dans l'espace.

Pour déterminer ce moment, il est nécessaire de définir d'abord ce qu'est une action de groupe. Il s'agit de la manière dont un groupe de matrices peut agir par multiplication sur un autre groupe de matrices afin de gérer, par exemple dans le groupe euclidien, les rotations, symétries et translations en une seule opération.

Mais J.M. Souriau a découvert qu'un groupe peut également agir sur les moments, générant à son tour un nouvel espace géométrique. Ainsi, il peut exister une autre action du groupe sur un autre espace. En fait, il existe un espace où les mouvements sont inscrits : l'espace-temps. Dans l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions, un groupe agit sur un point de coordonnées t_1, x_1, y_1, z_1 pour donner un autre point de coordonnées t_2, x_2, y_2, z_2 . Cependant, ce qui est inscrit dans l'espace-temps est seulement la trajectoire. Pourtant, le mouvement agit dans deux espaces, le second étant l'espace des paramètres de mouvement, que Souriau appelle l'espace des moments⁴.

Action Coadjointe du Groupe de Poincaré sur son Espace des Moments

Considérons le mouvement d'un objet dans l'espace. Un tel mouvement est également défini par son moment μ . Le physicien peut alors appliquer un élément \mathcal{G} , par exemple du groupe Galiléen, à ce moment μ . Cela produit un nouveau moment

4. L'approche de Souriau permet, grâce au groupe de Poincaré qui est le groupe d'isométrie de l'espace de Minkowski englobant le groupe de Lorentz (avec ses quatre composantes connexes), de faire apparaître les paramètres associés à chacun de ces mouvements, dont les points représentatifs appartiennent à un espace vectoriel, *l'espace des moments*. La dimension de celui-ci est égale à celle du groupe : dix. En effet, le groupe de Lorentz est formé des transformations qui préservent la forme quadratique de l'espace-temps. Il est constitué du groupe des transformations de Lorentz orthochrones et du groupe des translations. Les transformations du groupe de Lorentz orthochrones ont 6 degrés de liberté, tandis que le groupe des translations a 4 degrés de liberté. Cette structure mène à 10 paramètres indépendants du groupe de Poincaré. En les regroupant dans une matrice antisymétrique appelée *torseur*, on peut ainsi y définir les paramètres de l'espace des mouvements.

μ' . Cette action peut s'écrire comme suit :

$$\mu' = \mathcal{G} \times \mu \times \mathcal{G}^T \quad (5.8.1)$$

\mathcal{G}^T représente la transposée de cette matrice, et μ est la matrice des moments. C'est une matrice antisymétrique de taille 5×5 , c'est-à-dire que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale ont des signes opposés. Les éléments de la diagonale principale sont égaux à zéro (qui est son propre opposé). Nous pouvons définir cette matrice de la manière suivante :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x & -E \\ l_z & 0 & -l_x & f_y & -p_x \\ -l_y & l_x & 0 & f_z & -p_y \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 & -p_z \\ E & p_x & p_y & p_z & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.2)$$

Par exemple, pour mieux comprendre ce que μ représente, cette matrice 5×5 peut être décomposée de la manière suivante :

— Une matrice M de dimension 4×4 donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.3)$$

— Un quadrivecteur énergie-impulsion P de dimension 4×1 donné par⁵ :

$$P = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (5.8.4)$$

— Sa transposée, le vecteur ligne P^T de dimension 1×4 donné par :

$$P^T = (E \quad p_x \quad p_y \quad p_z) \quad (5.8.5)$$

Nous pouvons en déduire la forme plus compacte de μ de la manière suivante :

$$\mu = \begin{pmatrix} M & -P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.6)$$

L'action coadjointe est l'action d'un groupe sur son espace de moments. Plus précisément, il s'agit de l'action d'un groupe de Lie sur l'espace vectoriel dual de son algèbre de Lie⁶.

5. Nous précisons le mot *vecteur* pour indiquer la nature de la variable utilisée, afin de ne pas alourdir les expressions.

6. Le dual d'une algèbre de Lie, dans le contexte de la physique, est un espace mathématique composé de covecteurs. Ces covecteurs sont des entités mathématiques qui assignent des valeurs

Groupe de Poincaré

En Relativité Générale, le groupe de Poincaré régit le mouvement des particules matérielles relativistes (5.2.10) et peut être défini par le groupe de matrices ⁷ :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \lambda L_o \in \mathcal{L}or \wedge \lambda = \pm 1 \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.8.7)$$

agissant sur l'espace de Minkowski selon :

$$g(X) = L.X + C \quad (5.8.8)$$

L'action du groupe sur son espace des moments est l'action sur le dual de l'algèbre de Lie du groupe. L'élément de l'algèbre de Lie est obtenu en différenciant les dix composantes du groupe. Souriau désigne par la lettre grecque Λ la différentielle de la matrice carrée Z représentant l'élément du groupe de Poincaré et par la lettre grecque Γ l'élément du sous-groupe des translations spatio-temporelles ⁸ :

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{\Lambda} = -\Lambda \wedge \Gamma \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.8.9)$$

Nous avons montré que la matrice des moments μ inclut des éléments ayant une interprétation physique, tels que le quadrivecteur P , où E représente l'énergie et $p = \{p_x, p_y, p_z\}$ le moment linéaire.

Toutefois, quelle est l'essence et la signification physique de cette matrice antisymétrique M ?

Procédons à sa décomposition pour le découvrir :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{pmatrix} \\ S &= \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix} \\ f &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.8.10)$$

scalaires à des vecteurs dans l'algèbre de Lie, représentant des grandeurs physiques qui ne possèdent pas de direction spécifique, telles que l'énergie ou la température. Les moments, dans ce contexte, sont des mesures qui décrivent comment les transformations associées à un groupe de Lie modifient l'algèbre de Lie elle-même. La représentation coadjointe est une méthode par laquelle un groupe agit sur le dual de son algèbre de Lie. Cette action permet d'examiner la transformation des covecteurs, comme les moments, sous l'influence du groupe. L'intérêt de cette approche réside dans sa capacité à révéler des informations sur les caractéristiques géométriques et physiques de systèmes étudiés, en analysant comment ces systèmes évoluent ou restent invariants sous les transformations du groupe.

7. (13.51) et (13.52) de [95]

8. (13.54) de [95]. Il écrit ensuite μ , élément de l'espace des mouvements, sous la forme (13.57) et exprime l'invariance sous la forme de la constance du scalaire (13.58), où M est une matrice antisymétrique.

Soit sous sa forme compacte :

$$M = \begin{pmatrix} S & f \\ -f^T & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.11)$$

La vitesse V est implicitement intégrée dans la matrice L du groupe de Lorentz. Lorsqu'on examine un mouvement se déroulant dans une direction spécifique, par exemple le long d'un axe, avec une vitesse V et une translation $\Delta z = c$, et que $c = V\Delta t$, nous nous plaçons alors dans un système de coordonnées qui suit le mouvement de la particule le long de cette translation dans l'espace-temps. Dans ce contexte, le vecteur f s'avère être nul.

La matrice S peut alors s'exprimer de la manière suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.12)$$

Il s'agit du *spin* d'une particule. Comme Souriau l'a démontré en 1970, il présente une nature purement géométrique : il est représenté par une matrice antisymétrique de taille 3×3 . La méthode de quantification géométrique qu'il a développée révèle que le spin ne peut être qu'un multiple entier de \hbar (la constante de Planck réduite). Souriau a également exploré, dans [95], comment l'existence d'une charge électrique dans une particule suggère son déplacement dans un espace-temps doté d'une cinquième dimension de taille extrêmement réduite⁹, similaire à la dimension de Kaluza, qui est bouclée sur elle-même telle un faisceau de fibres. Cette cinquième dimension, étant bouclée sur elle-même, pourrait conduire à la quantification géométrique de la charge électrique, grâce à une "*forme de fermeture*" dans l'espace-temps, permettant à un objet de redevenir identique à lui-même après une rotation de 360° . Cette caractéristique est fondamentale pour comprendre la quantification du spin.

La quantité $f = [f_x, f_y, f_z]$, désignée par Souriau comme le "*passage*", s'annule dans le référentiel de la particule en mouvement et n'est perceptible que depuis un autre référentiel, illustrant un effet du mouvement¹⁰.

La relation $C_m = f + pt$ établit un lien entre le passage f et la position du centre de masse C_m au temps $t = 0$.

Le moment galiléen complet se compose des éléments suivants :

$$\mu = \{\text{énergie, masse, quantité de mouvement, passage, spin}\}$$

9. La longueur de Planck

10. Par exemple, vous êtes assis dans un avion en vol à l'arrière de la cabine et on vous invite à vous déplacer vers l'avant. Vous ne pourrez passer que si "*vous empruntez un peu de passage*" à l'avion. Cela le fera dévier légèrement de son plan de vol initial. C'est la conservation du passage qui permet d'établir la règle suivante : Si un objet est en espace libre, son centre de masse se déplace en ligne droite, à vitesse constante, dans la direction de la quantité de mouvement à moins d'être perturbé par des forces externes telles que la gravité. Si la quantité de mouvement est nulle, le centre de masse est immobile.

Chaque mouvement d'un objet est caractérisé par son propre moment, qui ne peut être que transféré partiellement d'un objet à un autre, sans possibilité de création ou de disparition. Cela permet de mesurer le moment en transférant une partie du moment de l'objet vers l'instrument de mesure.

Il est important de noter que la masse (au repos) est considérée comme un paramètre du moment. Contrairement à la masse classique, qui était traitée comme une constante additive arbitraire dans le groupe de Galilée, la masse dans le groupe de Poincaré est définie comme la masse relativiste $m = \frac{E}{c^2}$, et varie donc avec la vitesse. Ce traitement diffère également du groupe dynamique non relativiste par l'absence de décomposition barycentrique¹¹, une caractéristique du groupe de Galilée résultant de l'existence d'un sous-groupe privilégié absent dans le groupe de Poincaré¹². Tout mouvement virtuel peut être interprété comme un mouvement réel par changement de référentiel¹³. Le groupe de Poincaré décrit ainsi les propriétés des particules élémentaires en utilisant uniquement deux paramètres physiquement interprétables : la masse au repos et le spin¹⁴.

Pour les particules sans masse telles que les photons, l'hélicité, en plus de la polarisation (linéaire ou elliptique), est également importante. L'hélicité du photon, pouvant prendre les valeurs ± 1 , correspond respectivement à une polarisation circulaire gauche (PCG) et à une polarisation circulaire droite (PCD). L'hélicité d'une particule est déterminée par l'orientation de son spin par rapport à son vecteur de mouvement.

Maintenant que nous avons exposé les principaux outils, nous pouvons montrer l'action coadjointe du groupe de Poincaré sur son espace des moments.

Nous savons que l'action coadjointe est l'action d'un groupe de Lie sur l'espace vectoriel dual de son algèbre de Lie.

Ainsi, en appliquant l'action du groupe de Poincaré sur le dual de son algèbre de Lie, c'est-à-dire sur son espace des moments, nous obtenons l'action suivante à partir de 5.8.1 :

$$\mu' = \begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M & -P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L^T & 0 \\ C^T & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.13)$$

11. Le concept de décomposition barycentrique fait référence à la capacité de séparer le mouvement d'un système en un mouvement du centre de masse et des mouvements relatifs des particules autour de ce centre.

12. Comme nous l'avons déjà étudié, le groupe de Galilée régit les transformations entre les référentiels inertiels. Une caractéristique importante du groupe de Galilée est la possibilité d'identifier un centre de masse (ou barycentre) pour un système de particules, qui se comporte de manière simple sous ces transformations. En relativité restreinte, le concept de centre de masse n'est pas aussi simple ou universel que dans la mécanique classique, car la définition du centre de masse dépend du référentiel d'observation.

13. En relativité restreinte, ce qui peut apparaître comme un mouvement purement hypothétique dans un référentiel peut être observé comme un mouvement physique concret dans un autre.

14. ou moment angulaire intrinsèque

$$\mu' = \begin{pmatrix} LML^T - LPC^T + CP^T L^T & -LP \\ P^T L^T & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.14)$$

Par identification avec 5.8.6, nous pouvons en déduire que¹⁵ :

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^T L^T \quad \text{et} \quad P' = LP \quad (5.8.15)$$

Quelle est alors la signification des différentes composantes de l'espace des moments¹⁶ ?

$$\mu = \{M, P\} = \{l, g, p, E\} \quad (5.8.16)$$

M est la matrice des moments associée à μ et P le vecteur énergie-impulsion. l est le moment angulaire de M , g est le barycentre relativiste de M , p est le moment linéaire de P et E est l'énergie de P .

Dans le chapitre 5 de [95], J.M. Souriau développe une méthode de quantification géométrique qui mène à la quantification du spin, considéré comme un attribut géométrique¹⁷.

$$s = n \frac{\hbar}{2} \quad (5.8.17)$$

Nous obtenons ainsi une description des particules dans leur espace de moment, avec différentes valeurs de spin.

Inversion du Temps et de l'Énergie

Les éléments du groupe de Lorentz agissent sur des points de l'espace-temps qui constituent un mouvement. En faisant agir un élément L du groupe de Lorentz sur un mouvement donné, nous obtenons un autre mouvement.

Comme évoqué à travers l'expression 5.2.5, le groupe de Lorentz possède quatre composantes connexes.

La composante neutre $\mathcal{L}or_n$ est un sous-groupe contenant la matrice unitaire qui n'inverse ni l'espace ni le temps.

Considérons la matrice à 4 composantes ω constituées de deux paramètres λ_1 et λ_2 :

$$\omega_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \pm 1 \\ \lambda_2 = \pm 1 \end{cases} \quad (5.8.18)$$

Ainsi, les quatre composantes du groupe de Lorentz peuvent être facilement exprimées en utilisant les quatre combinaisons possibles de ces deux paramètres

15. (13.107) de [95]

16. (13.57) de [95]

17. (18.82) de [95]

appliquées à sa composante neutre, dont un élément $L_n \in \mathcal{L}or_n$ est exprimé selon l'expression $L = \omega L_n$:

$$\begin{aligned} \omega_{(1,1)} \times L_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_n & \quad \omega_{(1,-1)} \times L_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_s \\ \omega_{(-1,1)} \times L_n &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_t & \quad \omega_{(-1,-1)} \times L_n &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}or_{st} \end{aligned} \quad (5.8.19)$$

Nous constatons que $\lambda_1 = -1$ inverse le temps tandis que $\lambda_2 = -1$ inverse l'espace. Les quatre composantes sont regroupées en deux sous-ensembles “*orthochrone*” et “*rétrochrone*” selon les expressions respectives 5.2.6 et 5.2.7.

Le groupe de Poincaré peut alors s'écrire selon ces quatre composantes connexes de la manière suivante :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} \omega L_n & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \omega L_n \in \mathcal{L}or \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.8.20)$$

Ainsi l'action de ce groupe de Poincaré sur les coordonnées de l'espace-temps donne l'espace des mouvements suivants :

$$\begin{bmatrix} \omega L_n & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega L_n \xi + C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.8.21)$$

Il s'agit en fait de l'action du groupe de Poincaré sur son espace des moments μ possédant dix scalaires indépendants :

- L'énergie E
- L'impulsion $p = \{p_x, p_y, p_z\}$
- Le passage $f = \{f_x, f_y, f_z\}$
- Le spin $s = \{l_x, l_y, l_z\}$

L'action du groupe de Poincaré sur le dual de son algèbre de Lie est l'action coadjointe sur son espace des moments M (passage f et spin s) et le vecteur énergie-impulsion P (énergie E et impulsion p), ce qui donne :

$$M' = (\omega L_n)M(\omega L_n)^T - (\omega L_n)PC^T + CP^T(\omega L_n)^T \quad \text{et} \quad P' = (\omega L_n)P \quad (5.8.22)$$

A présent, considérons par exemple la symétrie T , où il y a seulement une inversion du temps ($\lambda_1 = -1$), sans inversion de l'espace ($\lambda_2 = 1$), dans un cas où il n'y a également aucune translation dans l'espace-temps ($C = 0$). Nous avons donc :

$$\omega_{(-1,1)} \times L_n = L_t \quad (5.8.23)$$

D'où :

$$L_t \times \xi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.8.24)$$

Nous obtenons ainsi l'action de l'inversion du temps dans l'espace des trajectoires ou dans l'espace-temps.

La seconde équation de 5.8.15 éclaire la signification physique de cette inversion de la coordonnée temporelle. En effet, l'application de la composante L_t du groupe de Lorentz au mouvement d'une particule donne :

$$P' = L_t P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (5.8.25)$$

Nous pouvons donc en déduire que l'application de la composante L_t du groupe de Lorentz au mouvement d'une particule induit une inversion de son énergie de E en $-E$.

La symétrie T appliquée au mouvement d'une particule inverse donc son énergie, ce qui conduit à une inversion de sa masse¹⁸, selon la définition suivante¹⁹ :

$$m = \sqrt{P^T \cdot P} \operatorname{sgn}(E) \quad (5.8.26)$$

Groupe de Kaluza Restreint

Appliquons une extension du groupe de Poincaré pour former le groupe dynamique suivant :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R} \wedge L = \lambda L_o \in \mathcal{L}or \wedge \lambda = \pm 1 \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.8.27)$$

Partons de l'espace de Minkowski :

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} \quad (5.8.28)$$

Introduisons l'espace de Kaluza²⁰ qui intègre une matrice de Gram de dimension

18. pages 198-199 de [95].

19. (14.57) à la page de [95].

20. L'espace de Kaluza est une variété riemannienne hyperbolique de signature $(+ - - - -)$

5×5 :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.8.29)$$

Dans le groupe considéré, nous ajoutons juste une translation ϕ à la cinquième dimension ζ . Alors, la dimension du groupe devient 11 (section 5.5). Il est le groupe d'isométrie de l'espace de Kaluza, défini par sa métrique :

$$ds^2 = dX^T \Gamma dX = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\zeta^2 \quad (5.8.30)$$

Avec :

$$X = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (5.8.31)$$

Selon le théorème de Noether²¹, cette nouvelle symétrie est accompagnée de l'invariance d'un scalaire que nous appellerons q . Le torseur de ce groupe de Kaluza intègre alors un paramètre supplémentaire :

$$\mu = \{M, P, q\} = \{l, g, p, E, q\} \quad (5.8.32)$$

Introduisons l'action du groupe sur son algèbre de Lie :

$$Z' = g^{-1} Z g \quad (5.8.33)$$

Or, si on considère un élément de l'algèbre de Lie de ce groupe :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.34)$$

La matrice inverse de g ²² donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.35)$$

21. Le théorème de Noether établit que pour chaque symétrie continue d'une action physique, il existe une quantité conservée. Dans notre contexte, si une nouvelle symétrie assure l'invariance d'un scalaire q , ce scalaire est la quantité conservée. Cela signifie que q reste constant lorsque la symétrie est appliquée à l'action du système.

22. Par exemple, pour trouver l'inverse d'une matrice 2×2 , on utilise la formule suivante lorsque la matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

L'inverse est :

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Et :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega L & G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.36)$$

Nous pouvons alors calculer 5.8.33 de la manière suivante :

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.37)$$

Soit :

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega L & G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & L^{-1}G\omega L & L^{-1}G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.38)$$

Donc :

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & L^{-1}G\omega L & L^{-1}G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.39)$$

Ainsi, par identification, nous pouvons en déduire :

$$\delta\phi' = \delta\phi \quad (5.8.40)$$

$$G\omega' = L^{-1}G\omega L \quad (5.8.41)$$

$$\gamma' = L^{-1}G\omega C + L^{-1}\gamma \quad (5.8.42)$$

Par conséquent, la relation de dualité²³ nous donne :

$$\frac{1}{2}Tr(M \cdot \omega) + P^T \cdot G\gamma + q\delta\phi = \frac{1}{2}Tr(M' \cdot \omega') + P'^T \cdot G\gamma' + q'\delta\phi' \quad (5.8.43)$$

Ce qui nous permet de déduire l'action du groupe suivant :

$$q' = q \quad (5.8.44)$$

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^T L^T \quad (5.8.45)$$

$$P' = LP \quad (5.8.46)$$

Si on identifie q à la charge électrique, cela montrerait que le mouvement d'une particule massive dans un espace à cinq dimensions la transformerait en une particule électriquement chargée.

23. (13.58) de [95]

Groupe Janus Restreint

Considérons le groupe dynamique suivant :

$$g := \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \mu = \pm 1 \wedge \phi \in \mathbb{R} \wedge L = \lambda L_o \in \mathcal{L}or \wedge \lambda = \pm 1 \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.8.47)$$

L'action du groupe sur les coordonnées de l'espace-temps à 5 dimensions défini par 5.8.31 donne l'espace des mouvements suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc} \mu & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \zeta \\ \xi \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mu\zeta + \phi \\ L\xi + C \\ 1 \end{array} \right) \quad (5.8.48)$$

Un calcul similaire aux précédents permet d'obtenir l'action du groupe :

$$q' = \mu q \quad (5.8.49)$$

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^T L^T \quad (5.8.50)$$

$$P' = LP \quad (5.8.51)$$

Ce groupe agit sur l'espace de Kaluza à cinq dimensions. Nous pouvons remarquer que $\mu = -1$ inverse la cinquième dimension ζ et le scalaire q .

Nous trouvons, à travers une interprétation dynamique du groupe, l'idée suggérée par J.M. Souriau [95] : l'inversion de la cinquième dimension est associée à l'inversion de la charge électrique. Mais celle-ci n'est que l'une des charges quantiques²⁴.

En effet, la *Symétrie C* traduisant la symétrie "*Matière-Antimatière*" introduite par Dirac, inverse toutes les charges quantique. Cette opération d'inversion ne s'obtient qu'en ajoutant autant de dimensions compactifiées qu'il y a de charges quantiques. L'action du groupe sur les coordonnées de l'espace-temps à n dimensions donnant l'espace des mouvements suivants :

$$\left(\begin{array}{cccccc} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \\ \xi \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mu\zeta^1 + \phi^1 \\ \mu\zeta^2 + \phi^2 \\ \vdots \\ \mu\zeta^p + \phi^p \\ L\xi + C \\ 1 \end{array} \right) \quad (5.8.52)$$

Le torseur de ce groupe intègre plusieurs scalaires supplémentaires q^p :

$$\mu = \{M, P, \sum_1^p q^i\} = \{l, g, p, E, q^1, q^2, \dots, q^p\} \quad (5.8.53)$$

24.

Ce qui nous permet d'obtenir l'action du groupe sur son espace des moments :

$$q'^1 = \mu q^1 \quad (5.8.54)$$

$$q'^1 = \mu q^1 \quad (5.8.55)$$

$$\dots \quad (5.8.56)$$

$$q'^p = \mu q^p \quad (5.8.57)$$

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^T L^T \quad (5.8.58)$$

$$P' = LP \quad (5.8.59)$$

De plus, Souriau considère que la charge électrique peut être géométriquement quantifiée suivant des valeurs discrètes $(+e, 0, -e)$, lorsque la cinquième dimension associée est fermée.

Imaginez que nous représentons le mouvement dans l'espace de Minkowski le long d'une ligne droite simple, orientée dans le temps. À chaque point, nous ajoutons une dimension fermée, qui étend l'espace de Minkowski en un faisceau. Dans la figure didactique 5.1, on le représente comme un cylindre.

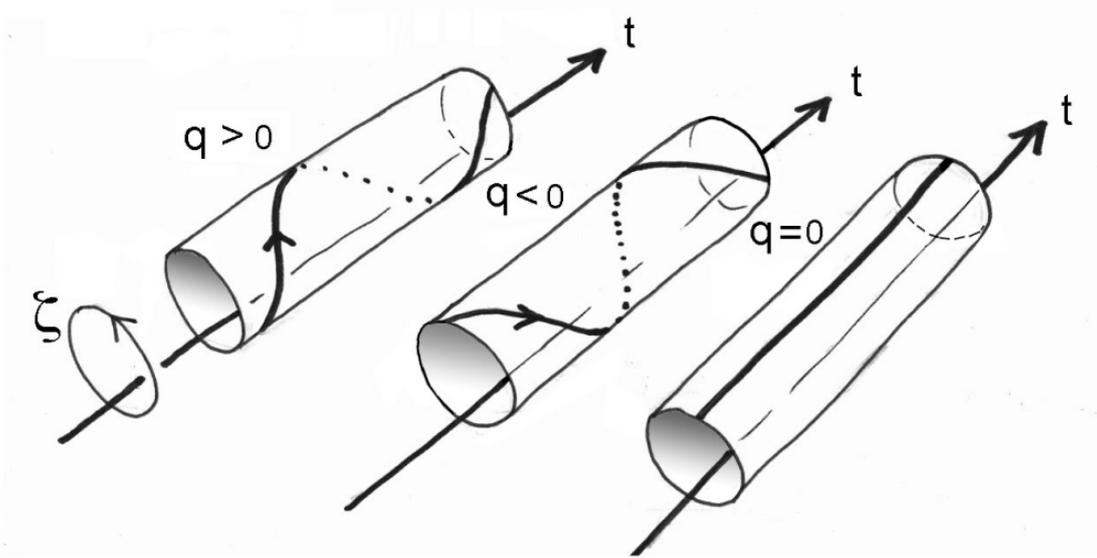


FIGURE 5.1 – Inversion de la direction d’enroulement du mouvement d’une particule traduisant la symétrie C

Groupe Dynamique Janus

Comme étudié dans la section 5.6, si on introduit une nouvelle symétrie au groupe précédent, que l’on peut qualifier de *Symétrie PT* permettant de convertir la matière en antimatière à masse négative²⁵, nous combinons ainsi les *Symétrie C* et *PT* pour former le *Groupe Dynamique Janus*²⁶ suivant :

$$g := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \{-1, 1\} \wedge \phi \in \mathbb{R} \wedge L_o \in \mathcal{L}or_o \wedge C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\} \quad (5.8.60)$$

Nous pouvons considérer que des particules de matière et d’antimatière peuvent cohabiter dans le même feuillet d’espace. En revanche, aucune cohabitation n’est possible pour le mouvement de particules déduit par T -symétrie (ou PT -symétrie).

Cet espace est de dimension $4 + p$ (pour p charges quantiques).

On envisagera donc le revêtement à deux feuillets de cette variété M_{n+p} .

Dans chacune de ces deux nappes subsistent une possibilité d’opérer la symétrie correspondant à $\mu = -1$ c’est à dire l’inversion de toutes les charges quantiques.

Autrement dit la dualité "*Matière-Antimatière*" existe dans les deux nappes.

25. Un concept que nous pourrions appeler *antimatière au sens de Feynman*

26. Dont la forme générale est donnée par 5.6.1

Pour comprendre la nature des différents composants de ces nappes, nous allons considérer le mouvement d'une particule de matière dotée d'une énergie et d'une masse :

- En faisant agir sur ce mouvement, des éléments du groupe correspondant à $(\lambda = 1; \mu = 1)$, nous obtiendrons d'autres mouvements de particules de matière de masse et d'énergie positive.
- En faisant agir sur ce mouvement, des éléments du groupe correspondant à $(\lambda = 1; \mu = -1)$, nous obtiendrons d'autres mouvements d'antiparticules de matière de masse et d'énergie positive²⁷.
- En faisant agir sur ce mouvement, des éléments du groupe correspondant à $(\lambda = -1; \mu = 1)$, nous obtiendrons d'autres mouvements de particules de matière de masse et d'énergie négative.
- En faisant agir sur ce mouvement, des éléments du groupe correspondant à $(\lambda = -1; \mu = -1)$, nous obtiendrons d'autres mouvements d'antiparticules de matière de masse et d'énergie négative²⁸.

Son groupe d'isométrie est celui de l'espace Janus, défini par la même métrique que celle structurant l'espace de Kaluza 5.8.30, et dont la dimension est de 11²⁹. Le tenseur du groupe est également le même que 5.8.32.

Or, si on considère un élément de l'algèbre de Lie de ce groupe :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.61)$$

La matrice inverse de g (5.8.60) donnant :

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & -\lambda\mu\phi \\ 0 & \lambda L_o^{-1} & -\lambda L_o^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.62)$$

Et :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \phi \\ 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda^2 G\omega L_o & \lambda G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.63)$$

Nous pouvons alors calculer 5.8.33 de la manière suivante :

$$Z' = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & -\lambda\mu\phi \\ 0 & \lambda L_o^{-1} & -\lambda L_o^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \lambda^2 G\omega L_o & \lambda G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.64)$$

27. Il s'agit de l'"antimatière au sens de Dirac" (C -symétrie).

28. Il s'agit de l'"antimatière au sens de Feynman" (PT -symétrie).

29. $10 + 1$ dimension associée à la cinquième dimension d'espace ζ que J.M. Souriau identifie à la charge électrique q .

Soit :

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta\phi' \\ 0 & \lambda G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda\mu)\delta\phi \\ 0 & \lambda^3 L_o^{-1} G\omega L_o & \lambda^2 L_o^{-1} G\omega C + \lambda L_o^{-1} \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.65)$$

Ainsi, par identification, nous pouvons en déduire :

$$\delta\phi' = \lambda\mu\delta\phi \quad (5.8.66)$$

$$\omega' = \lambda^2 G L_o^{-1} G\omega L_o \quad (5.8.67)$$

$$\gamma' = \lambda^2 L_o^{-1} G\omega C + \lambda L_o^{-1} \gamma \quad (5.8.68)$$

$$(5.8.69)$$

Or :

$$L_o^{-1} = G L_o^T G \quad (5.8.70)$$

Donc³⁰ :

$$\delta\phi' = \lambda\mu\delta\phi$$

$$\omega' = \lambda^2 L_o^T \omega L_o \quad (5.8.71)$$

$$\gamma' = \lambda^2 G L_o^T \omega C + \lambda G L_o^T G \gamma$$

Or, inspiré par J.M. Souriau, nous pourrions ajouter autant de dimensions fermées supplémentaires que de charges quantiques et écrire le groupe dynamique de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \lambda\mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda\mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.72)$$

Le groupe d'isométrie de cet espace peut être défini par la métrique suivante :

$$ds^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 - (d\zeta^1)^2 - (d\zeta^2)^2 - \dots - (d\zeta^p)^2 \quad (5.8.73)$$

Avec :

$$X = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \end{pmatrix} \quad (5.8.74)$$

30. GG=I

L'action de ce groupe Janus sur les coordonnées de l'espace-temps à $10 + p$ paramètres indépendants donne alors l'espace des mouvements suivants :

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi^1 \\ 0 & \lambda\mu & 0 & \cdots & 0 & \phi^2 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \lambda\mu & 0 & \phi^p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda L_o & C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^p \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu\zeta^1 + \phi^1 \\ \lambda\mu\zeta^2 + \phi^2 \\ \vdots \\ \lambda\mu\zeta^p + \phi^p \\ \lambda L_o \xi + C \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.8.75)$$

Selon le théorème de Noether, cette nouvelle symétrie est accompagnée de l'invariance des scalaires additionnels q^p . Le torseur du groupe les intègre donc selon cette relation :

$$\mu = \{M, P, \sum_1^p q^i\} = \{l, g, p, E, q^1, q^2, \dots, q^p\} \quad (5.8.76)$$

Ainsi, la relation de dualité³¹ nous donne :

$$\frac{1}{2}Tr(M \cdot \omega) + P^T \cdot G\gamma + \delta\phi \sum_1^p q^i = \frac{1}{2}Tr(M' \cdot \omega') + P'^T \cdot G\gamma' + \delta\phi \sum_1^p q'^i \quad (5.8.77)$$

Ce qui nous permet de déduire l'action du groupe par identification avec 5.8.71 :

$$\sum_1^p q'^i = \lambda\mu \sum_1^p q^i \quad (5.8.78)$$

$$M' = LML^T - LPC^T + CP^T L^T \quad (5.8.79)$$

$$P' = LP \quad (5.8.80)$$

31. (13.58) de [95]

Chapitre 6

Modèle Bimétrique du Trou de Ver

Dans un article récent [53], une version modifiée du pont d'Einstein-Rosen [31] a été étudiée. Ce pont modifié est traversable et fonctionne comme un trou de ver unidirectionnel : une particule sur le premier feuillet, tombant en chute libre vers la gorge du trou de ver, l'atteindra en un temps fini (en coordonnées d'Eddington [30]) et continuera sa trajectoire sur le deuxième feuillet. Dans ce chapitre, issu de l'article [54] publié dans la prestigieuse revue *Annals of Physics* et sur lequel il est fondé, nous montrerons que la particule subit une *symétrie PT* en traversant la gorge. Cela pourrait entraîner des effets observables grâce à un ingrédient supplémentaire proposé par Einstein et Rosen : des points congruents sur les deux feuillets sont identifiés. Nous proposons un modèle bimétrique permettant de réaliser cette identification pour notre modèle de trou de ver modifié.

6.1 Solutions de l'Équation d'Einstein Reflétant Différentes Topologies

Nous commençons cet article par une revue de certains travaux découlant de la découverte par Schwarzschild d'une solution exacte aux équations de champ d'Einstein dans le vide. Le travail d'Einstein et Rosen [31] est d'une importance particulière pour cette nouvelle étude puisque nous nous intéresserons au parcours d'une particule traversant un pont d'Einstein-Rosen. À première vue, cette ligne de recherche peut sembler être une impasse pour certains lecteurs. En effet, le pont d'Einstein-Rosen a souvent été présenté comme non traversable dans la littérature. Dans la section 6.2, nous soulignons que cette conclusion est en fait basée sur une analyse de l'extension de Kruskal-Szekeres, qui en tant qu'objet géométrique est très différente d'un pont d'Einstein-Rosen. Les principaux développements de ce chapitre ont lieu dans les sections 6.3 et 6.5. Nous montrons qu'une particule traversant le pont subit une *symétrie PT*, et nous finissons par discuter de sa signification physique. Nous ne travaillerons en fait pas avec le pont d'Einstein-Rosen tel que défini dans l'article fondateur [31], mais avec une version modifiée étudiée dans [53]. Une raison majeure de cette modification est que, comme expliqué par la suite, le pont tel que défini dans [31] n'est pas correctement raccordé à la gorge dans le sens suivant : comme il est bien connu, les géodésiques entrantes n'atteignent pas la gorge

du trou de ver pour une valeur finie du paramètre de temps de Schwarzschild t . La construction dans [53] est inspirée de [43, 44] et résout ce problème.

En 1916, Karl Schwarzschild a successivement publié deux articles ([91],[90]). Le premier présentait la construction d'une solution aux équations d'Einstein dans le vide. Sous sa forme classique avec la signature $(+ - - -)$, il s'agit de la métrique de Schwarzschild extérieure :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.1.1)$$

Il a rapidement complété cette solution, appelée métrique extérieure de Schwarzschild, avec une métrique intérieure [90] décrivant la géométrie à l'intérieur d'une sphère remplie d'un fluide à densité constante ρ_o et solution de l'équation d'Einstein avec un second membre. Les conditions pour relier les deux métriques (continuité des géodésiques) ont été assurées. Les phénomènes de l'avance du périhélie de Mercure et de la déviation des rayons lumineux par effet de lentille gravitationnelle confirment cette solution (Figure 3.3). K. Schwarzschild a oeuvré pour s'assurer que les conditions régissant ces deux métriques étaient conformes à la réalité physique.

À titre d'exemple, de nos jours, les étoiles à neutrons, en raison de leur densité stupéfiante et de leur masse formidable, servent de laboratoires cosmiques naturels, explorant des régions de densité et de gravité inaccessibles dans les laboratoires terrestres. Considérons deux façons distinctes par lesquelles une étoile à neutrons pourrait atteindre un état de criticité physique.

Dans un scénario où la densité de l'étoile, ρ_o , reste constante, un rayon caractéristique \hat{r} peut être défini. Ensuite, une criticité physique est atteinte lorsque le rayon de l'étoile est :

$$R_{\text{cr}_\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_o}} \quad (6.1.2)$$

avec

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_o}} \quad (6.1.3)$$

Ainsi,

- Pour la métrique extérieure, il était nécessaire que le rayon de l'étoile soit inférieur à \hat{r} .
- Quant à la métrique intérieure, le rayon de l'étoile devait être inférieur à R_{cr_ϕ} , car un rayon plus grand entraîne une augmentation de la pression jusqu'à l'infini au centre de l'étoile.

Ensuite, pour les étoiles massives, une sphère de fer en implosion peut présenter un scénario complexe. En supposant que la masse de la sphère M soit conservée pendant l'implosion, nous devons considérer deux rayons critiques importants :

- Dans la partie centrale, le rayon critique géométrique est donné par le *Rayon de Schwarzschild*, qui est :

$$R_{\text{cr}_\gamma} = R_s = 2\frac{GM}{c^2} \quad (6.1.4)$$

- En dehors de cette masse, le rayon critique physique est donné par 6.1.2

En considérant la conservation de la masse exprimée par $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o$, nous pouvons explorer comment la densité variable ρ_o pendant l'implosion impacte ces rayons critiques.

En effet, si la criticité physique est atteinte pendant l'implosion, nous avons $R = R_{\text{cr}_\phi}$.

Ensuite, en substituant l'équation de conservation de la masse dans 6.1.2, nous obtenons :

$$R = R_{\text{cr}_\phi} = 2,25\frac{GM}{c^2} > R_{\text{cr}_\gamma} \quad (6.1.5)$$

Nous pouvons en déduire que si la criticité physique est atteinte pour une masse M , elle se produit avant l'apparition de la criticité géométrique.

K. Schwarzschild a également souligné que les mesures portaient sur des conditions dépassant largement ce qui était compris dans le cadre de la réalité astrophysique de son époque.

Il est également important de noter que la topologie de cette solution géométrique est construite en reliant deux variétés bornées le long de leur frontière commune, une sphère S^2 avec une aire de $4\pi R_o^2$.¹

En 1916, Ludwig Flamm a considéré la solution extérieure comme décrivant potentiellement un objet géométrique. La préoccupation était alors de tenter de décrire les masses comme une région de l'espace non contractile ([34]).

En 1934, Richard Tolman a été le premier à envisager une possible manipulation de la solution métrique la plus générale en introduisant un terme croisé $drdt$. Cependant, dans un souci de simplification, il l'a immédiatement éliminé en utilisant un simple changement de variable ([99]).

En 1935, Einstein et Rosen ont proposé, dans le cadre d'une modélisation géométrique des particules, une structure géométrique non contractile, grâce au changement de coordonnées suivant ([31]) :

$$u^2 = r - 2m \quad (6.1.6)$$

La solution métrique devient alors :

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4u^2(u^2 + 2m) du^2 - (u^2 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1.7)$$

1. R_o is the radius of the star.

Les auteurs obtiennent ainsi une structure géométrique non contractile, appelée "*pont spatial*", où une surface fermée d'aire $4\pi\alpha^2$, correspondant à la valeur $u = 0$, relie deux "*feuilletts*" : l'un correspondant aux valeurs de u de 0 à $+\infty$ et l'autre de $-\infty$ à 0. Il est à noter que cette métrique n'est pas lorentzienne à l'infini². Bien que cette métrique, exprimée dans ce nouveau système de coordonnées, soit régulière, les auteurs soulignent qu'à la surface de gorge, son déterminant devient nul. Dans cette structure géométrique, deux feuilletts semi-riemanniens bornés sont distingués, le premier correspondant à $u > 0$ et le second à $u < 0$. Il correspond à leur jonction le long de leur frontière commune. L'espace-temps global ne s'inscrit pas dans le cadre standard de la géométrie semi-riemannienne car il ne remplit pas la condition $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ à la gorge. Comme indiqué dans [97], il s'inscrit dans le cadre plus général de la géométrie semi-riemannienne singulière, qui permet des tenseurs métriques dégénérés.

Le pont d'Einstein-Rosen (6.1.7) satisfait les équations de champ d'Einstein dans le vide sur les deux feuilletts $u > 0$ et $u < 0$. Cependant, il y a un problème avec les équations de champ à la gorge $u = 0$ car $\det(g_{\mu\nu})$ s'annule à cet endroit, et ce déterminant apparaît au dénominateur des équations de champ. Ce problème a déjà été reconnu par Einstein et Rosen, et leur solution proposée était de travailler avec une forme des équations de champ sans dénominateur (voir les équations (3a) dans [31], et le paragraphe suivant (5a)). Ces équations de champ modifiées (appelées de nos jours la "forme polynomiale des équations de champ") sont satisfaites partout, y compris à la gorge.³ Il a été découvert beaucoup plus tard que l'on peut aussi travailler avec la forme originale des équations de champ si une fine coquille de "matière exotique" est ajoutée à la gorge [43, 44].

En tant qu'espace-temps, le pont d'Einstein-Rosen (6.1.7) souffre du problème que la coordonnée temporelle t devient infinie à la gorge (puisque le temps de chute vers la gorge est infini en coordonnées de Schwarzschild). Dans (6.1.7), les feuilletts à quatre dimensions $u > 0$ et $u < 0$ ne sont donc pas correctement raccordés à la gorge.⁴ En effet, étudier le passage d'une particule du feuillet $u > 0$ à $u < 0$ nécessiterait de passer par $t = \infty$, ce qui n'est pas une partie bien définie de la variété. Nous verrons comment résoudre ce problème dans la section 6.3.

En 1939, Oppenheimer et Snyder, capitalisant sur le découplage complet entre le temps propre et le temps vécu par un observateur distant, en l'absence d'un terme croisé en $drdt$, ont suggéré d'utiliser la solution métrique extérieure pour décrire le "*freeze frame*" de l'implosion d'une étoile massive à la fin de sa vie. En considérant que la variable t est identifiée au temps propre d'un observateur distant, cela crée

2. Pour cette raison, le changement de variables $r^2 = \rho^2 + 4m^2$ a été proposé par Chruściel ([23], page 77) comme une alternative à (6.1.6). Voir également l'annexe du présent article, où nous proposons une alternative au changement de variables de [23].

3. Nous rappelons dans l'annexe 6.10 comment les équations de champ modifiées sont obtenues et les comparons à la forme standard des équations de champ dans le contexte du pont d'Einstein-Rosen.

4. Raccorder les parties spatiales (à trois dimensions) des deux feuilletts ne pose cependant aucune difficulté particulière.

ce motif de "freeze frame" tel qu'un phénomène de contraction dont la durée, en temps propre, mesurée en jours, semble pour un observateur lointain se dérouler en un temps infini ([66]). Ce document a été considéré comme la base du modèle de trou noir (Voir section 2.3.9).

En 1960, Kruskal a étendu la solution géométrique pour englober un espace-temps contractile, organisé autour d'une singularité centrale correspondant à $r = 0$. Les géodésiques sont étendues pour $r < \alpha$. Le modèle de trou noir (à symétrie sphérique⁵) prend alors sa forme définitive en tant qu'implosion d'une masse, en un bref instant, perçue comme un "freeze-frame" par un observateur lointain ([55]). La sphère de Schwarzschild est alors appelée l'"horizon des événements".

En 1988, M. Morris et K. S. Thorne ont revisité cette interprétation géométrique en abandonnant la contractibilité, non pas pour tenter d'obtenir une modélisation géométrique de la solution, mais pour étudier la possibilité de voyages interstellaires, à travers des "trous de ver", en utilisant la métrique suivante ([62]) :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_o^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1.8)$$

En se concentrant sur l'étude de la faisabilité des voyages interstellaires, les auteurs mettent en évidence les énormes contraintes associées à une telle géométrie ainsi que sa nature instable et transitoire.

6.2 Distinction entre l'Extension de Kruskal-Szekeres et le Pont d'Einstein-Rosen

L'extension de Kruskal-Szekeres et le pont d'Einstein-Rosen sont deux constructions majeures dans l'étude de la géométrie de l'espace-temps autour d'un trou de ver. Cependant, leurs natures géométriques diffèrent de manière significative.

L'espace-temps de Kruskal-Szekeres est défini par une *variété semi-riemannienne* traditionnelle, caractérisée par une métrique non dégénérée en chaque point. Cela le rend cohérent avec le cadre général de la relativité générale, où la signature de la métrique est homogène et ne varie pas.

En revanche, l'espace-temps d'Einstein-Rosen a une métrique dégénérée à certains points, notamment au niveau de la gorge du pont. Cette caractéristique le place dans la classe des *variétés semi-riemanniennes singulières* telles que définies par Ovidiu Stoica [97].⁶ Cette distinction fondamentale montre que l'espace-temps

5. En 1963, Roy Kerr a construit la solution stationnaire axisymétrique de l'équation d'Einstein dans le vide. Cependant, dans cette étude, nous nous limitons aux interprétations de la solution stationnaire avec symétrie sphérique (2.3.10).

6. Il a été récemment proposé dans [41] de régulariser de tels espaces-temps par une complexification fondée sur une extension holomorphe de la théorie de la gravitation [40]. Nous n'adopterons pas cette approche dans le présent article, car le modèle principal que nous étudions (à savoir, le "pont modifié" de la Section 6.3) n'est pas dégénéré au niveau de la gorge.

de Kruskal-Szekeres n'est pas simplement une extension d'Einstein-Rosen mais une construction fondamentalement différente.

Cette différence géométrique entre les deux espaces-temps est également responsable d'une différence physique. En effet, comme mentionné dans la section 6.1, pour que les équations de champ soient satisfaites à la gorge du pont d'Einstein-Rosen, il est nécessaire d'ajouter une fine couche de matière exotique à la gorge [43, 44] (ou l'on peut travailler avec la forme polynomiale des équations de champ comme dans [31]). En revanche, l'extension de Kruskal-Szekeres satisfait la forme ordinaire des équations de champ dans le vide, y compris à l'horizon des événements.

Ainsi, ces deux espaces-temps ne peuvent pas être considérés comme des versions l'un de l'autre mais plutôt comme deux interprétations distinctes de la géométrie autour d'un trou de ver. Cela a déjà été souligné dans plusieurs articles de Guendelman et al. Considérons en particulier [39], où ils écrivent :

[29] La nomenclature de « pont d'Einstein-Rosen » dans plusieurs manuels standards (par exemple [15]) utilise la variété de Kruskal-Szekeres. Cette dernière notion de « pont d'Einstein-Rosen » n'est pas équivalente à la construction originale dans [14]. En effet, les deux régions dans l'espace-temps de Kruskal-Szekeres correspondant à la région extérieure de l'espace-temps de Schwarzschild ($r > 2m$) et étiquetées (I) et (III) dans [15] sont généralement *déconnectées* et partagent seulement une deux-sphère (la partie angulaire) comme frontière commune ($U = 0, V = 0$ en coordonnées de Kruskal-Szekeres), tandis que dans la construction originale du « pont » d'Einstein-Rosen, la frontière entre les deux copies identiques de la région extérieure de l'espace-temps de Schwarzschild ($r > 2m$) est une hypersurface tridimensionnelle ($r = 2m$).

Nous pouvons également citer deux autres articles dont les auteurs font la même observation concernant l'inadéquation de l'extension de Kruskal-Szekeres pour analyser correctement les ponts d'Einstein-Rosen : celui de Guendelman et al. [38] et celui de Poplawski [83]. En effet, pour distinguer ces espaces-temps, Poplawski utilise les termes « *pont de Schwarzschild* » et « *pont d'Einstein-Rosen* ».

Pour toutes ces raisons, nous ne travaillerons *pas* avec l'extension de Kruskal-Szekeres dans cette étude. Nous notons en particulier que l'affirmation courante [36, 98] selon laquelle le pont d'Einstein-Rosen n'est pas traversable est en fait basée sur une analyse de l'extension de Kruskal-Szekeres ; mais, comme souligné dans [39, 53], le pont d'Einstein-Rosen original [31] est en réalité traversable.

6.3 Construction du Pont Modifié et ses Symétries

Dans cette section, nous étudions les symétries d'une version modifiée du pont d'Einstein-Rosen original [31].

Comme rappelé dans la section 6.2, Einstein et Rosen ont défini leur pont à partir du changement de variables $r = \alpha + u^2$ dans (6.1.1). La définition du pont modifié repose sur l'idée de [43, 44] de travailler plutôt avec le changement de variables $r = \alpha + |\eta|$ où $\eta \in \mathbb{R}$ est un nouveau paramètre radial. Comme montré dans [43, 44], l'espace-temps résultant satisfait la forme originale des équations de champ, y compris à la gorge $\eta = 0$, si une certaine "*matière exotique*" (une membrane de type lumière) est ajoutée à la gorge. En revanche, comme rappelé dans la section 6.2, Einstein et Rosen devaient travailler avec la forme polynomiale des équations de champ.

Comme nous l'expliquons à présent, le pont modifié étudié dans cette section est obtenu en combinant le changement de variables $r = \alpha + |\eta|$ avec le changement de variables d'Eddington pour le paramètre temporel.

6.3.1 Symétrie PT

Dans le but d'éliminer la singularité de coordonnées à la surface de Schwarzschild en $r = \alpha$, A. Eddington a introduit le changement de variable suivant ([30]) :

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right| \quad (6.3.1)$$

La métrique devient alors :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.3.2)$$

Nous savons que dans ces conditions, du point de vue d'un observateur distant, le temps de chute libre est fini, c'est-à-dire qu'une particule massive en chute atteindra la surface $r = \alpha$ pour une valeur finie de t_E^+ [53]. En revanche, le temps d'évasion reste infini. La métrique pour laquelle le temps d'évasion est fini sera obtenue en effectuant ce changement de variable :

$$t_E^- = -t - \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right| \quad (6.3.3)$$

Ainsi, la métrique devient :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.3.4)$$

Le pont modifié étudié dans [53] combine le changement de variables $r = \alpha + |\eta|$ avec (6.3.1). Nous travaillons donc avec le nouveau paramètre temporel $t' = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} \right|$.

Ainsi, la métrique devient :

$$ds^2 = \frac{|\eta|}{\alpha + |\eta|} c^2 dt'^2 - \frac{2\alpha + |\eta|}{\alpha + |\eta|} d\eta^2 - \frac{2\alpha c}{\alpha + |\eta|} d\eta dt' - (\alpha + |\eta|)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.3.5)$$

Cet élément de ligne apparaît déjà dans l'annexe de [43] sous une notation légèrement différente. Il décrit un espace-temps constitué de deux feuillets reliés à la gorge $\eta = 0$. Le feuillet $\eta > 0$ est équipé de la métrique d'Eddington entrante (6.3.2) et le feuillet $\eta < 0$ est équipé de la métrique sortante (6.3.4). Comme souligné dans [53], une particule en chute libre commençant sa trajectoire dans la région $\eta > 0$ atteindra la gorge $\eta = 0$ pour une valeur finie t'_1 du paramètre de temps d'Eddington t' , et continuera ensuite dans la région $\eta < 0$ pour $t' > t'_1$. Cela résout le problème de collage qui avait été mentionné dans la section 1 pour la version originale du pont d'Einstein-Rosen (rappelons que la gorge est atteinte pour $t = \infty$ avec le pont tel que défini dans [31]). Notez également que contrairement à la métrique d'Einstein-Rosen (6.1.7), la métrique (6.3.5) n'est pas dégénérée à la gorge.

L'élément de ligne (6.3.5) est invariant sous les transformations conjointes $\eta \mapsto -\eta, t' \mapsto -t'$. La signification physique de cette symétrie sera discutée dans la section 6.3.3. Notez que l'élément de ligne (6.1.7) possède une symétrie similaire, et en fait, il est *plus* symétrique puisqu'il est invariant sous chacune des deux transformations $u \mapsto -u$ et $t \mapsto -t$. Cette symétrie supplémentaire est due à l'absence dans (6.1.7) d'un terme croisé tel que le terme $d\eta dt'$ dans (6.3.5).

6.3.2 Changement d'Orientation

En général, nous nous attendons à ce qu'une *symétrie P* ou *symétrie PT* soit associée à un changement d'orientation. Dans cette section, nous confirmons que c'est effectivement le cas en examinant de plus près la géométrie du pont modifié (6.3.5) à proximité de la gorge $\eta = 0$. Dans cette représentation, les géodésiques radiales du premier feuillet sont orthogonales au plan tangent du "*pont spatial*" lorsqu'elles l'atteignent. Ces mêmes géodésiques, en émergeant dans le deuxième feuillet, sont également orthogonales à ce même plan tangent. Considérons maintenant quatre points formant un tétraèdre, qui convergent vers le "*pont spatial*" le long de trajectoires radiales. Nous pouvons définir une orientation 3D en définissant une direction de traversée des points sur chacun des triangles équilatéraux formant le tétraèdre. Par rapport à la coordonnée r , il semble que ces points rebondissent sur une surface rigide, entraînant une inversion de l'orientation du tétraèdre. Les tétraèdres amont et aval deviennent alors *énantiomorphes* (Figure 6.1).

Le changement d'orientation est déjà visible dans la représentation 2D simplifiée d'un trou de ver dans la Figure 6.2 (version vectorisée de l'image d'origine pour une raison de qualité). Observons cette figure vue de dessus et imaginons un triangle glissant à la surface du feuillet supérieur vers la gorge. Après avoir traversé la gorge, le triangle commence à glisser sur le feuillet inférieur et nous le voyons maintenant à l'envers depuis notre position au-dessus du feuillet supérieur. De notre point de vue, son orientation a donc changé. La signification physique de ce changement

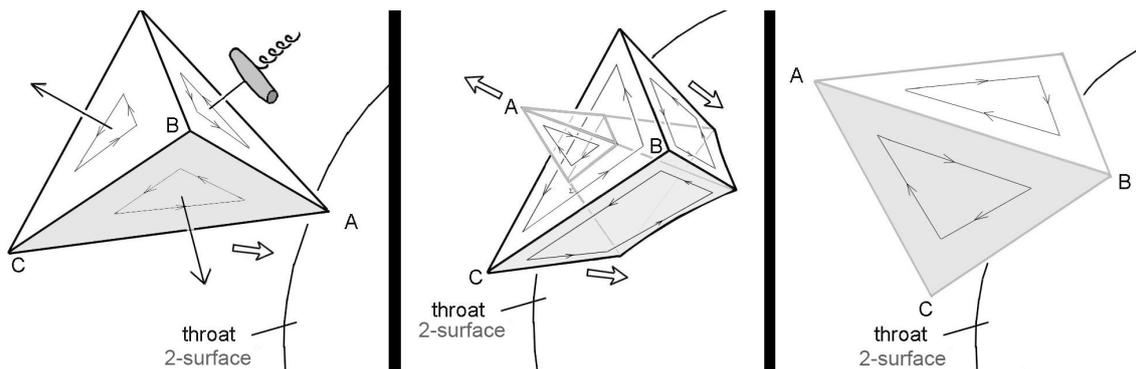


FIGURE 6.1 – Inversion de l'espace lors de la traversée du "pont spatial"

d'orientation sera discutée dans la section 6.3.3.

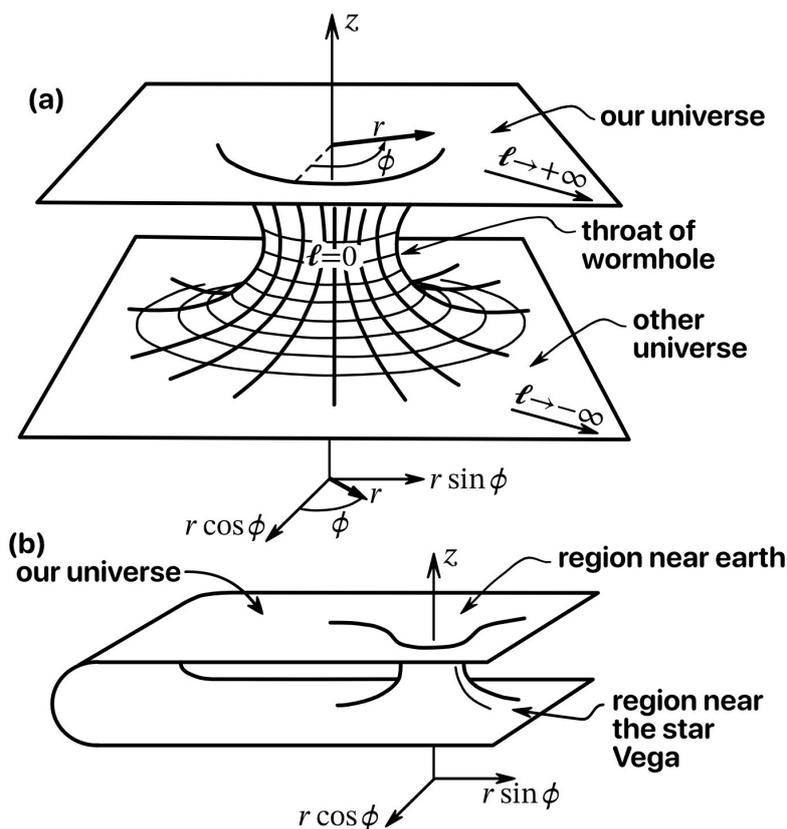


FIGURE 6.2 – Page 396 de l'article de M. Morris et K.S. Thorne (1988)

En tant que structure géométrique, la métrique 6.3.5 représente un "pont" reliant deux espaces semi-riemanniens *PT-symétriques*.

L'élément de cette surface 2D est alors donné par :

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} = \alpha^2 \sin(\theta) \quad (6.3.6)$$

Comme cette métrique décrit une surface 2D sphérique (comme une sphère de rayon constant dans un espace-temps 4D), l'élément de surface différentielle est donné par :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (6.3.7)$$

Pour trouver la surface minimale de ce "*pont spatial*", nous devons intégrer cet élément de surface sur tous les angles possibles :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2 \quad (6.3.8)$$

Il est donc non-contractile avec une surface minimale de $4\pi\alpha^2$.

6.3.3 Identification des Deux Feuilles

Dans la section 6.3.2, nous avons décrit le changement d'orientation d'un tétraèdre traversant la gorge du trou de ver dans la Figure 6.1, et d'un triangle traversant la gorge dans la Figure 6.2. Le changement d'orientation du triangle n'est visible que pour une personne regardant la Figure 6.2 dans son ensemble. Par conséquent, il ne correspond à aucun phénomène physiquement observable, car tout observateur physique doit être situé sur l'un des deux feuillets et ne peut pas voir directement l'autre feuillet. La situation est la même dans la Figure 6.1 : La photo du milieu représente la situation d'un point de vue où l'on pourrait regarder simultanément les deux côtés du trou de ver (B et C n'ont pas encore atteint la gorge, tandis que A l'a déjà traversée et émerge de l'autre côté). Cela est à nouveau impossible pour un observateur physique : il semble que la *symétrie P* telle qu'elle a été décrite jusqu'à présent ne corresponde à aucun phénomène physiquement observable. Cependant, nous pouvons lui donner une signification physique réelle avec un ingrédient supplémentaire introduit par Einstein et Rosen [31].

Rappelons que leur motivation n'était pas d'étudier les voyages interstellaires comme dans la Figure 6.2, mais de décrire les particules élémentaires par des solutions aux équations de la relativité générale. Citons l'abstract de leur article : "*Ces solutions impliquent la représentation mathématique de l'espace physique par un espace à deux feuillets identiques, une particule étant représentée par un "pont" connectant ces feuillets.*" Einstein et Rosen suggèrent également que le problème à plusieurs particules pourrait être étudié par des méthodes similaires, mais ce travail n'est pas mené à bien dans leur article.

Citons à nouveau [31] : "*Si plusieurs particules sont présentes, ce cas correspond à la recherche d'une solution sans singularités des équations modifiées (3a), la solution représentant un espace à deux feuillets congruents reliés par plusieurs "ponts" discrets.*" De leur point de vue, deux points dans la représentation mathématique (6.1.7) ayant des valeurs identiques de θ, ϕ mais des valeurs opposées de u

correspondent donc à deux points dans l'espace physique ayant la même valeur de r ($r = u^2 + 2m$). Si nous faisons la même identification des points avec des valeurs opposées de u , la situation représentée dans l'image du milieu de la Figure 6.1 peut être vue par un observateur physique. Le changement d'orientation décrit dans la section 6.3.2 a maintenant une signification physique réelle. Nous approfondirons l'interprétation de la *symétrie PT* combinée dans la section 6.4. Dans la section 6.6, nous présentons un modèle mathématique précis de l'identification des deux feuillets pour le pont modifié décrit dans la section 6.3.1. Il s'avère être un modèle bimétrique.

6.4 Interprétation de la *symétrie PT*

La *symétrie PT* peut être considérée comme une *symétrie P* suivie d'une *symétrie T*.

Dans la littérature, l'inversion de la coordonnée temporelle a été analysée de diverses manières. En particulier :

- Par la théorie des groupes dynamiques de J-M Souriau ([93],[95]), où elle a été démontrée comme induisant une inversion de l'énergie. Par conséquent, la symétrie par inversion du temps transforme tout mouvement d'une particule de masse m en un mouvement d'une particule de masse $-m$ ([65], page 191). À la page 192 du même livre, l'auteur offre une analyse alternative qui évite les masses négatives. Souriau souligne que ces alternatives doivent être évaluées en fonction de leur capacité à se confirmer par les expériences.
- Feynman a proposé une interprétation de l'antimatière comme de la matière ordinaire se déplaçant *à rebours* dans le temps.
- Dans le cadre de la théorie des cordes, une proposition similaire à celle de Feynman peut être trouvée dans [42]. En effet, citant [42] : "*Les anticordes se réalisent lorsqu'un temps scalaire, qui définit la mesure modifiée, s'écoule dans la direction opposée au temps du feuillet d'univers. Pour les cordes à tension positive, les deux temps s'écoulent dans la même direction. La situation rappelle celle de la Mécanique Quantique Relativiste avec des énergies positives et négatives, le temps propre des particules s'écoulant dans le sens de la coordonnée de temps, tandis que pour les antiparticules, le temps propre s'écoule en sens inverse de la coordonnée de temps.*"
- Il est connu, à partir d'analyses théoriques (le théorème *CPT*) et d'expériences, que les particules élémentaires obéissent à des lois physiques invariantes sous la *symétrie CPT*.

La *symétrie PT* découverte dans la section 6.3 peut être considérée comme une *symétrie CPT* suivie d'une *symétrie C* (inversion de la charge électrique). Nous obtiendrions donc de l'antimatière sur le deuxième feuillet. Si le deuxième feuillet contient déjà de la matière ordinaire, elle pourrait interagir avec l'antimatière prove-

nant du premier feuillet, constituant ainsi une source d'énergie dont les applications peuvent être multiples aussi bien sur le plan écologique par le recyclage des déchets radioactifs par exemple, que dans le secteur énergétique par la production d'énergie en convertissant 100% de la masse des particules et antiparticules en interaction.

6.5 Une Autre Représentation de cette Géométrie

En appliquant le changement de variable suivant aux équations 6.3.2 et 6.3.4 :

$$r = \alpha (1 + \log \cosh(\rho)) \quad (6.5.1)$$

Nous obtenons les deux métriques suivantes :

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(\frac{\log \cosh(\rho)}{1 + \log \cosh(\rho)} \right) c^2 dt_E^{+2} - \left(\frac{2 + \log \cosh(\rho)}{1 + \log \cosh(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ & - 2c\alpha \left(\frac{\tanh(\rho)}{1 + \log \cosh(\rho)} \right) d\rho dt_E^+ - \alpha^2 (1 + \log \cosh(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(\frac{\log \cosh(\rho)}{1 + \log \cosh(\rho)} \right) c^2 dt_E^{-2} - \left(\frac{2 + \log \cosh(\rho)}{1 + \log \cosh(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ & + 2c\alpha \left(\frac{\tanh(\rho)}{1 + \log \cosh(\rho)} \right) d\rho dt_E^- - \alpha^2 (1 + \log \cosh(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

Pour obtenir la métrique qui structure le deuxième feuillet pour $\rho < 0$ afin de garantir la continuité des géodésiques traduisant le passage de la matière à travers le "pont" avec un temps d'évasion fini sur ce feuillet, nous devons appliquer la *symétrie T* où la coordonnée temporelle est inversée lors de la traversée⁷.

Ces métriques, qui sont lorentziennes à l'infini, structurent donc deux feuillets correspondant à des valeurs de ρ variant respectivement de 0 à $+\infty$ et de $-\infty$ à 0. Sur le "pont spatial" pour $\rho = 0$, les composantes g_{tt} et $g_{\rho\rho}$ du tenseur métrique disparaissent, ne laissant que les deux dernières composantes spatiales $g_{\theta\theta}$ et $g_{\phi\phi}$, qui sont :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (6.5.4)$$

Dans ce système de coordonnées particulier, nous pouvons en déduire que son déterminant est nul. La *symétrie P* découle du fait que les points adjacents, cette fois explicitement différenciés, sont inférés par $\rho \rightarrow -\rho$. Cette transformation joue le même rôle que $u \rightarrow -u$ dans 6.1.7.

En associant ces solutions métriques sous ces deux conditions, nous obtenons un modèle de *Trou de Ver* reliant deux espaces semi-riemanniens à travers un "pont" qui ne peut être franchi que dans un seul sens. Supposons en outre que le trou de ver ne

7. $t_E^+ = -t_E^-$

mène pas à un autre univers comme dans la Figure 6.2.a, ou à un point distant dans le même univers comme dans la Figure 6.2.b ; mais que les deux feuilletts congruents correspondent aux mêmes points dans l'univers physique par la transformation $u \rightarrow -u$ (ou $\rho \rightarrow -\rho$), comme suggéré dans [31] et dans la section 6.3.3. Nous pouvons alors conclure que les deux feuilletts sont *PT-symétriques*.

6.6 Modèle Bimétrique du Pont Modifié

Dans la section 6.3.3, nous avons expliqué que selon [31], deux points dans la représentation mathématique (6.1.7) ayant des valeurs identiques de θ, ϕ mais des valeurs opposées de u correspondent à deux points dans l'espace physique avec la même valeur de r ($r = u^2 + 2m$). Si nous identifions dans (6.1.7) deux points avec des valeurs opposées de u , il en résulte un unique feuillet qui, suite à un changement de variables, reproduit la solution de Schwarzschild pour $r > \alpha$. Ainsi, la "gorge" située à $u = 0$ ⁸ se présente davantage comme une frontière spatiale plutôt qu'un passage vers un second feuillet.

Pour le pont modifié étudié dans la section 6.3.1, la situation est plus intéressante car les deux feuilletts portent différentes métriques (les métriques entrantes et sortantes d'Eddington). Après identification de deux points avec des valeurs opposées de η dans (6.3.5), nous nous retrouvons à nouveau avec un seul feuillet mais structuré par deux métriques 6.6.1 et 6.6.2 :

$$ds_+^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.6.1)$$

$$ds_-^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.6.2)$$

Nous obtenons donc un modèle bimétrique. Une particule qui tombe selon la première métrique atteindra la gorge en $r = \alpha$ pour une valeur finie de t (disons, $t = t_0$). Pour $t > t_0$, la seconde métrique (sortante) prend le relais. La particule semblera effectivement revenir à rebours dans le temps puisque (6.6.2) est obtenue à partir de (6.6.1) par la transformation $t \mapsto -t$. Ceci est cohérent avec la *symétrie PT* découverte dans la section 6.3.1. De plus, le changement d'orientation souligné dans la section 6.3.2 reste observable dans ce modèle bimétrique. En effet, alors qu'il rebondit sur la gorge, le tétraèdre représenté dans la Figure 6.1 subit une réflexion par rapport au plan tangent à la gorge, entraînant un changement d'orientation.

Comparaison avec la Théorie Bimétrique de S. Hossenfelder

Une "théorie bimétrique avec symétrie d'échange" a été proposée par Hossenfelder dans [48]. Il y a deux types de matière dans cette théorie, qui peuvent être vus comme de la matière de "masse positive" et "masse négative". Chaque type de matière suit les géodésiques de sa propre métrique. Dans la théorie de Hossenfelder,

8. ou $r = \alpha$, en coordonnées de Schwarzschild

la métrique (6.6.1) décrit le mouvement des masses positives dans un champ créé par un point de masse positive puisque sa théorie se réduit à la Relativité Générale dans ce cas. Nous obtenons donc la métrique ordinaire de Schwarzschild (voir l'équation (36) dans [48]), ou (6.6.1) en coordonnées d'Eddington entrantes. Il est donc naturel de se demander si (6.6.2) pourrait décrire le mouvement d'une particule de *masse négative* dans le champ créé par la même *masse positive* que dans (6.6.1). La réponse à cette question est négative car dans la théorie de Hossenfelder, la métrique correspondante est obtenue à partir de la métrique ordinaire de Schwarzschild (6.1.1) par la transformation $\alpha \mapsto -\alpha$ (équation (37) dans [48]). Si nous appliquons le changement de variables d'Eddington à la métrique résultante, nous n'obtenons rien de semblable à (6.6.2).⁹

6.7 Conclusion

Dans notre étude, nous avons poursuivi la première analyse du pont d'Einstein-Rosen modifié mentionné dans [53]. Nous avons rappelé que ce pont modifié est traversable. Il agit comme une membrane unidirectionnelle et résout un "*problème de collage*" auquel était confrontée la version originale du pont [31]. De plus, la métrique de ce pont modifié n'est pas dégénérée à la gorge. La principale contribution de ce travail réside dans l'étude des symétries du pont modifié. Nous avons souligné que cette structure est constituée de deux espaces semi-riemanniens énantiomorphes *PT-symétriques* (les deux "*feuillet*s"), avec une métrique lorentzienne à l'infini, reliées par la gorge du trou de ver. La *PT-symétrie* peut paraître comme un artefact du choix des coordonnées, dénué de toute signification physique. Cependant, nous avons démontré que cette *PT-symétrie* conduit à des effets observables grâce à un ingrédient supplémentaire introduit par Einstein et Rosen. Dans [31], ils ont suggéré de représenter un point dans l'espace physique par une paire de points congruents, un sur chaque feuillet. Pour la version originale du pont, cette identification semble nous laisser uniquement avec l'un des deux feuillets¹⁰. La situation est différente pour le pont modifié puisque chaque feuillet est équipé d'une métrique différente. Par conséquent, après identification, nous obtenons un modèle bimétrique. Enfin, nous avons démontré que ce modèle bimétrique n'est pas compatible avec la théorie bimétrique de Hossenfelder [48].

9. Comme mentionné dans la section V de [48], "adopter l'un des systèmes de coordonnées mieux adaptés, tels que les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes ou sortantes, constitue une transformation élégante pour la métrique standard \mathbf{g} , mais cela perturbe considérablement l'autre métrique \mathbf{h} ."

10. i.e., avec la solution de Schwarzschild pour $r > \alpha$.

6.8 Applications Civiles

Énergie

L'application de la conversion de matière en antimatière représente une avancée significative dans le domaine énergétique. Cette technologie novatrice offre la possibilité de transformer les déchets radioactifs, une source de préoccupation environnementale majeure, en une source d'énergie propre et renouvelable. Par l'application de la *symétrie PT*, il devient envisageable de convertir les particules de matière radioactive à masse positive en antiparticules à masse négative. Ce processus révolutionnaire non seulement neutralise les dangers inhérents aux déchets radioactifs mais permet également de les transformer en une source d'énergie propre et abondante. L'énergie générée par l'annihilation matière-antimatière est exempte d'émissions de neutrons, éliminant ainsi les risques de pollution radioactive supplémentaire. Cette double fonctionnalité ouvre des perspectives prometteuses pour une transition énergétique vers des sources plus durables et écologiques, en accord avec les principes de développement durable.

Écologie

Dans le contexte écologique, la conversion de matière en antimatière par l'application de la *symétrie PT* suggère une méthode innovante pour le recyclage des déchets radioactifs.

Nathalie Debergh, à travers ses recherches en mécanique quantique relativiste, a mis en lumière la possibilité de transformer des anti-fermions d'énergie et de masse positives en équivalents négatifs, ouvrant ainsi la voie à de multiples applications scientifiques telles que l'élimination efficace des déchets radioactifs sans compromettre l'environnement. Sa publication [28] explore l'émergence d'états d'énergie négative en montrant que les anti-fermions¹¹ d'énergie et de masse positives peuvent être transformés en anti-fermions d'énergie et de masse négatives en appliquant l'opérateur d'inversion T de manière unitaire et l'opérateur d'inversion P de manière antiunitaire à l'équation de Dirac. Par ailleurs, cette application préserve la norme de l'état quantique, ce qui est une propriété essentielle pour les transformations physiques. Cette approche unitaire a donc permis d'explorer des solutions

11. Les fermions sont des particules subatomiques, c'est-à-dire des constituants fondamentaux de la matière, plus petits que les atomes. Ils suivent un principe particulier nommé le principe d'exclusion de Pauli, qui stipule que deux fermions ne peuvent pas occuper le même état quantique simultanément. En d'autres termes, chaque fermion dans un système doit être unique en termes de ses propriétés quantiques, comme sa position, son élan, et son orientation spinale. Cette règle est ce qui permet aux atomes de se former et de se structurer de manière complexe, donnant lieu à toute la diversité de la matière dans l'univers. Les fermions sont également décrits par une règle statistique connue sous le nom de statistique de Fermi-Dirac, qui prédit comment ils se comportent en groupe à différentes températures. Cette statistique aide à comprendre pourquoi la matière se comporte différemment à l'échelle quantique par rapport à notre expérience quotidienne macroscopique. Parmi les fermions, on trouve les quarks et les leptons. Les quarks s'assemblent pour former des protons et des neutrons, qui constituent les noyaux des atomes. Les leptons incluent les électrons, qui orbitent autour du noyau atomique, ainsi que les neutrinos, des particules élémentaires très légères et faiblement interactives. Ensemble, quarks et leptons forment la matière ordinaire.

à l'équation de Dirac qui incluent des énergies et des masses négatives d'une manière cohérente avec les principes fondamentaux de la théorie quantique des champs.

Cette avancée théorique n'est pas seulement un pas en avant dans la compréhension de la physique fondamentale mais représente également une application pratique potentiellement révolutionnaire pour la gestion écologique des déchets. En convertissant les déchets radioactifs en antiparticules à masse négative, nous pourrions non seulement réduire significativement la pollution radioactive mais aussi contribuer à la production d'énergie propre, soulignant ainsi l'interconnexion profonde entre énergie et écologie dans la recherche de solutions durables.

Considérations Éthiques et Sécuritaires

L'avènement de technologies permettant la conversion de matière en antimatière, en particulier pour des applications telles que le recyclage écologique des déchets radioactifs, soulève des questions éthiques et des défis de sécurité considérables. D'un côté, la promesse d'une source d'énergie propre et abondante, capable de réduire significativement les déchets dangereux, représente une avancée majeure vers un avenir durable. D'un autre côté, les risques associés à la manipulation et au stockage de l'antimatière nécessitent l'établissement de normes de sécurité extrêmement strictes pour prévenir tout incident pouvant avoir des répercussions désastreuses. La mise en place de protocoles rigoureux et la surveillance continue des installations de conversion sont impératives pour assurer une utilisation sûre de cette technologie révolutionnaire.

Par ailleurs, les implications morales de l'exploitation de l'antimatière interpellent notre responsabilité collective envers les générations actuelles et futures. Il est essentiel d'adopter une approche prudente et réfléchie, en évaluant soigneusement les bénéfices à long terme face aux risques potentiels. Cela implique une régulation internationale forte, garantissant que le développement et l'application de la conversion de matière en antimatière soient guidés par des principes éthiques, le respect de l'environnement et le bien-être de l'humanité. La collaboration entre pays, chercheurs et citoyens sera primordiale pour établir un consensus sur les meilleures pratiques à adopter, assurant ainsi que les avancées dans ce domaine servent l'intérêt commun tout en minimisant les dangers inhérents.

6.9 Annexe A

Maintenant, examinons le cas du transfert de matière vers une seconde couche de l'univers, où nous sommes libres de définir la métrique sortante vers le deuxième feuillet. En appliquant le nouveau changement de variable 6.9.1 à la métrique de Schwarzschild 6.1.1, en inversant le signe de la constante d'intégration $\alpha \rightarrow -\alpha$, nous pouvons ainsi construire une métrique "*répulsive*" sur le deuxième feuillet :

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} + 1 \right| \quad (6.9.1)$$

Elle assure la continuité des géodésiques du premier feuillet au deuxième avec un temps de chute libre fini sur le premier et un temps d'évasion fini sur le deuxième.

La métrique entrante structurant le premier feuillet devient :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.9.2)$$

Et la métrique sortante structurant le deuxième feuillet devient :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.9.3)$$

En prenant la forme générale :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \delta \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.9.4)$$

où $\delta = -1$ pour la métrique structurant le premier feuillet et $\delta = +1$ pour la métrique sortante structurant le deuxième feuillet. Ainsi, comme les deux métriques sont symétriques par inversion du temps $t \rightarrow -t$, la continuité des géodésiques est assurée d'un feuillet à l'autre avec un temps de chute libre fini sur le premier et un temps d'évasion fini sur le deuxième.

Cela implique que la matière ordinaire pourrait potentiellement être convertie en antimatière de masse négative, qui serait ensuite transférée vers une couche distincte de l'univers. Ce processus implique essentiellement la transformation de la matière en antimatière à masse négative. En combinant cette solution géométrique avec la solution précédemment développée dans la Section 6.3, nous pouvons explorer la faisabilité des voyages interstellaires en exploitant les propriétés métriques de cette deuxième couche.

6.10 Annexe B : Forme Polynomiale des Équations de Champ d'Einstein

La forme standard des équations de champ est donnée par :

$$G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} \quad (6.10.1)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion. Nous utilisons ici et tout au long de l'article la même convention de signe que dans [31], et nous avons fixé la constante gravitationnelle d'Einstein à 1, également comme dans [31]. Le déterminant du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ apparaît au dénominateur du membre de gauche. Comme indiqué dans [31], on peut se débarrasser des dénominateurs en multipliant les équations de champ par une puissance appropriée de $\det(g)$. Les nouvelles équations

$$G_{\mu\nu}^* = -T_{\mu\nu}^* \quad (6.10.2)$$

sont des équations polynomiales en fonction du tenseur métrique et de ses dérivées de premier et deuxième ordre. La forme polynomiale (6.10.2) est bien entendu équivalente à (6.10.1), sauf peut-être lorsque $\det(g)$ s'annule, soulevant ainsi la question d'une division par 0 dans (6.10.1). C'est le problème auquel Einstein et Rosen ont dû faire face dans l'étude de leur "pont", et ils ont choisi de travailler avec la forme polynomiale des équations pour éviter une division par 0 au niveau du pont.

Plus précisément, comme ils cherchaient uniquement des solutions en vide, ils ont travaillé avec les équations

$$G_{\mu\nu}^* = 0. \quad (6.10.3)$$

Ensuite, ils ont soutenu que ces équations sont satisfaites par leur solution métrique (6.1.7) partout, y compris au niveau du col. Cela découle du fait que (6.10.3) est satisfait en dehors du col (où les formes standard et polynomiale des équations de champ sont équivalentes) et d'un argument de continuité : le tenseur métrique (6.1.7) est indéfiniment différentiable (pour cet argument, il suffit qu'il soit deux fois différentiable, avec des dérivées continues).

Bien que l'argument ci-dessus de [31] soit mathématiquement correct, on peut soutenir pour des raisons physiques qu'il est préférable de travailler avec la forme standard des équations de champ comme dans [43, 44]. On est alors naturellement conduit au concept de membrane de genre lumière située au niveau du col. Cette possibilité n'est pas du tout apparente avec la forme polynomiale des équations. En effet, le membre de droite de (6.10.2) s'annule là où $\det(g) = 0$ puisque celui-ci est obtenu à partir de $T_{\mu\nu}$ en multipliant par une puissance de $\det(g)$. Cette multiplication "cache" effectivement la présence de la membrane de genre lumière.

Enfin, nous notons que (comme déjà mentionné dans la Section 6.1), la présence d'une membrane de genre lumière est particulièrement évidente dans le pont modifié de la Section 6.3, qui n'est pas dégénéré au niveau du col (et dont le tenseur métrique n'est pas différentiable au niveau du col). Puisque la membrane de genre lumière est présente dans le pont modifié (6.3.5), elle devrait également être présente dans

la forme originale (6.1.7) du pont (une version du pont étant effectivement obtenue à partir de l'autre par un changement de variable).

Chapitre 7

Nature Topologique du Modèle

7.1 Définition

En cosmologie, la topologie se réfère à l'étude des propriétés spatiales fondamentales de l'univers qui restent invariantes sous des transformations continues. Contrairement à la géométrie, qui se concentre sur les distances et les angles précis, la topologie s'intéresse davantage à la manière dont l'espace est connecté et structuré à grande échelle. Elle examine des aspects tels que la connectivité, la continuité et les frontières de l'espace cosmique, indépendamment de sa forme et de sa taille exactes.

Dans un contexte cosmologique, la topologie aide à comprendre la structure globale de l'univers, y compris des questions telles que si l'univers est fini ou infini, s'il a des "bords" ou s'il est illimité, et s'il pourrait être connecté de manière non triviale (comme dans les modèles d'univers multi-connectés). Cela inclut l'examen de la forme et de la structure à grande échelle de l'univers, déterminé par la distribution des galaxies, les fonds de radiation cosmique et d'autres observations astrophysiques.

La topologie est particulièrement pertinente pour les modèles cosmologiques avancés, tels que le modèle cosmologique Janus, car elle fournit un cadre pour explorer des concepts tels que l'univers multicouche, la connectivité entre différentes régions de l'espace-temps et d'autres propriétés non intuitives qui peuvent découler de la physique théorique avancée.

En résumé, la topologie en cosmologie est un outil puissant pour explorer et comprendre la structure fondamentale et la nature de notre univers, au-delà des contraintes de la géométrie classique.

Avant de poursuivre ce chapitre, il est important de lire et de bien comprendre la bande dessinée *Topologicon* [71], écrite par le Dr. Jean-Pierre Petit¹. Ce travail vulgarise les concepts de topologie en relation avec la cosmologie et la relativité générale. En effet, ce chapitre traite principalement d'outils conceptuels qui sont assez contre-intuitifs. Par conséquent, il est fortement recommandé de lire cette

1. Librement accessible sur ce site web <http://www.savoir-sans-frontieres.com/>

bande dessinée au préalable pour une meilleure compréhension.

7.2 Modèle du Trou de Ver

En développant la nouvelle interprétation du modèle de trou de ver discutée dans le chapitre précédent 6, nous proposons une perspective topologique plus profonde en relation avec la relativité générale. Par exemple, considérons la sphère de gorge S^2 qui relie deux couches de l'espace-temps à travers la *symétrie PT*. Cette configuration pourrait-elle être analogue à un plan projectif? En topologie, un plan projectif est une surface non orientable avec des propriétés uniques, telles que des lignes qui divergent en un point mais se rejoignent de l'autre côté. Cela suggère que la connexion entre les couches de l'espace-temps à travers la gorge du trou de ver pourrait défier l'orientation traditionnelle de l'espace, évoquant ainsi le plan projectif.

Notre conjecture est fondée sur la nullité du déterminant de la métrique sur cette surface qui pourrait indiquer une nature non orientable en 2D. Si cette sphère de gorge est fermée et a une surface limitée, elle pourrait être identifiée avec un plan projectif P^2 . Bien que cette idée puisse sembler contre-intuitive, elle découle directement de la topologie de l'objet telle que décrite par la solution extérieure de Schwarzschild 2.3.121.

Dans le contexte de la relativité générale, le concept de volume élémentaire dans l'espace-temps courbé est primordial. Le volume élémentaire en dimensions n , défini par une métrique riemannienne, est donné par $dV = \sqrt{|\det(g)|} d^n x$, où g est le tenseur métrique et $\det(g)$ son déterminant. Ce volume élémentaire n'est pas simplement le produit des différentielles de coordonnées, comme dans l'espace euclidien, mais il est modifié par la structure courbée de l'espace-temps. Le facteur $\sqrt{|\det(g)|}$ reflète comment l'espace-temps est déformé par la présence de masse et d'énergie, selon les équations d'Einstein. Ainsi, dans les régions à forte courbure, ce volume élémentaire peut se comporter de manière contre-intuitive, révélant des caractéristiques topologiques fascinantes et parfois surprenantes de l'espace-temps.

Rappelons que la sphère S^2 possède une métrique définie par l'expression :

$$ds^2 = \alpha^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (7.2.1)$$

La métrique d'une sphère est une fonction mathématique qui décrit les distances entre les points sur la surface de la sphère. Comme cette métrique décrit une sphère 2D (comme une sphère de rayon constant dans un espace-temps 4D), l'élément de surface différentiel est donné par :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (7.2.2)$$

Et c'est en fait un élément de surface car une sphère est une surface bidimensionnelle dans l'espace tridimensionnel. Lorsque nous intégrons cet élément de surface,

nous obtenons la surface décrite par l'expression :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2 \quad (7.2.3)$$

Ce qui correspond à la surface d'une sphère de rayon α . Nous pouvons également remarquer que cette surface est analogue à celle d'un plan projectif P^2 , un concept rarement abordé en géométrie standard.

7.3 Modèle de l'Univers

En géométrie, une sphère S^2 peut être facilement visualisée car nous pouvons la *plonger* dans notre espace de représentation tridimensionnel \mathbb{R}^3 . Cependant, un plan projectif, tel que P^2 , ne peut pas être *plongé* de la même manière. Le plan projectif est un type de surface non orientable, ce qui signifie qu'il ne peut pas être étalé à plat dans l'espace tridimensionnel sans auto-intersection. Pour visualiser un plan projectif, nous devons utiliser "*l'immersion*", une méthode où la surface *se recoupe elle-même* selon un ensemble *d'auto-intersections*. Ce concept remet en question notre compréhension traditionnelle des formes et des espaces.

Pour comprendre les plans projectifs de dimensions supérieures, comme P^3 ou P^n , nous devons abandonner les représentations visuelles et adopter une pensée abstraite. Ce changement mental est nécessaire pour explorer des structures topologiques complexes qui vont au-delà de nos dimensions.

Par exemple, le retournement d'une sphère est possible si nous considérons chaque bande formant les méridiens qui la recouvrent comme étant capable de se traverser par "*immersion*" pour former un revêtement à deux feuillets d'une bande de Möbius à trois demi-torsions ([61]). Cet effet d'*auto-intersection*" est uniquement lié à l'immersion de ce revêtement dans notre espace de représentation tridimensionnel \mathbb{R}^3 .

Nous pouvons alors faire coïncider le pôle M d'un feuillet de cette sphère S^2 avec le pôle opposé M' de l'autre feuillet du même revêtement. Ceci est appelé "*la conjonction des points antipodaux*". Cette transformation permet aux flèches du temps, portées par les méridiens de cette sphère, de se rejoindre mais en opposition sur chaque feuillet du même revêtement comme sur la Figure 7.1.

NB : La bande de Möbius, ou ruban de Möbius, est une surface avec un seul côté et un seul bord. C'est un objet mathématique classique en topologie, une branche des mathématiques qui étudie les propriétés des espaces qui restent invariantes sous les transformations continues. La bande de Möbius peut être créée en prenant une bande de papier, en lui donnant un demi-torsion, puis en joignant les deux extrémités de la bande. Cette configuration donne une surface qui, si vous commencez à tracer une ligne le long de celle-ci, retournera à son point de départ après avoir traversé les deux "*côtés*" de la bande sans jamais lever votre stylo.

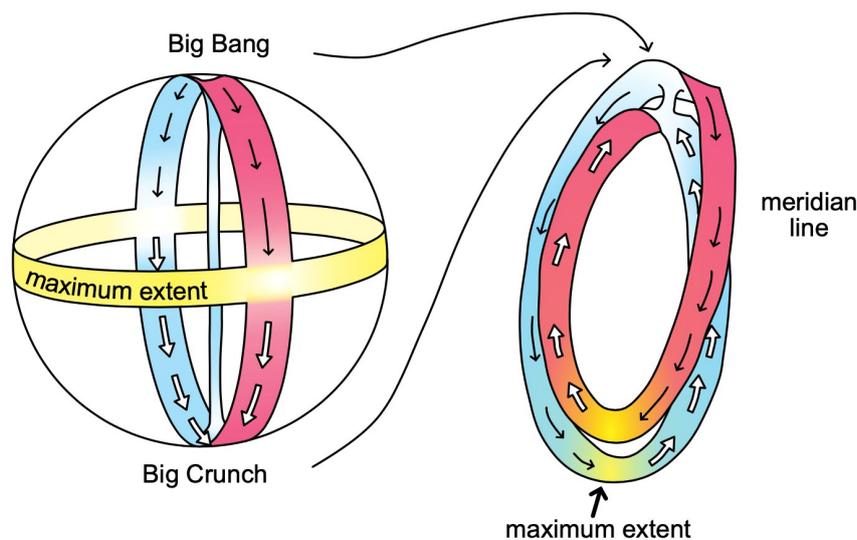


FIGURE 7.1 – Retournement d'une Sphère en Conjoignant les Points Antipodaux

Ce qui rend la bande de Möbius fascinante, c'est sa nature non orientable. Dans un espace normal, comme une feuille de papier, il existe une distinction claire entre le "*dessus*" et le "*dessous*". Cependant, sur une bande de Möbius, cette distinction n'existe pas : en parcourant la surface, vous passez de manière transparente du haut en bas et vice versa.

La bande de Möbius est souvent utilisée pour illustrer des concepts importants en topologie et en géométrie, tels que l'idée d'une surface à un seul côté et les limites de notre intuition spatiale. En physique théorique et en cosmologie, la bande de Möbius peut également servir de modèle pour explorer des structures spatiales complexes et des phénomènes tels que la torsion de l'espace-temps ou la connexion entre différentes dimensions.

Ainsi, la symétrie PT peut être interprétée comme le parcours à travers un plan projectif d'un feuillet du revêtement à l'autre (Figure 7.2).

Pour qu'un objet géométrique soit équipé d'un système de coordonnées fonctionnel, la non-nullité du déterminant de sa métrique est alors essentielle. En particulier, dans le contexte des "*coordonnées gaussiennes*", ce principe est primordial. Dans un espace à quatre dimensions, cette exigence permet la foliation de l'espace par un ensemble d'hypersurfaces tridimensionnelles. Ces hypersurfaces sont "*orthogonales*" aux géodésiques, signifiant perpendiculaires aux chemins qu'un objet en mouvement libre suivrait, et sont caractérisées uniquement par la coordonnée temporelle. La distinction entre la "*flèche du temps*" et le "*temps propre*" est importante ici : la flèche du temps fait référence à une dimension temporelle unidirectionnelle, tandis que le temps propre est une mesure du temps spécifique à l'observateur.

Dans le contexte de l'espace-temps bidimensionnel que nous examinons, la folia-

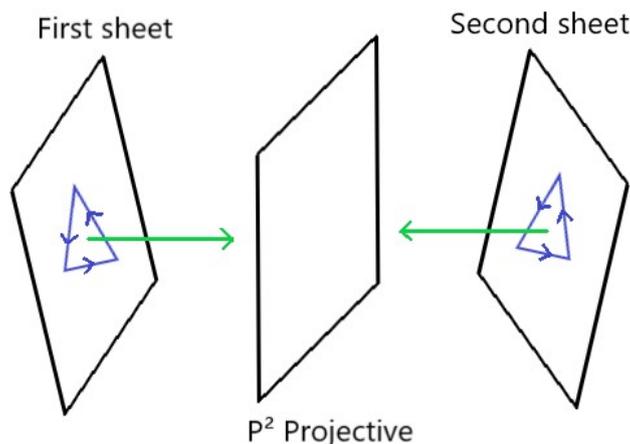


FIGURE 7.2 – Projectif P^2

tion est effectuée à l'aide d'une série de cercles. Chaque point sur ces cercles peut être associé à un "vecteur temps", qui est orthogonal aux cercles. L'orthogonalité signifie dans ce cas que le vecteur temps est positionné pour être perpendiculaire à la surface de chaque cercle, formant ainsi une composante temporelle distincte de l'espace-temps (Figure 7.3).

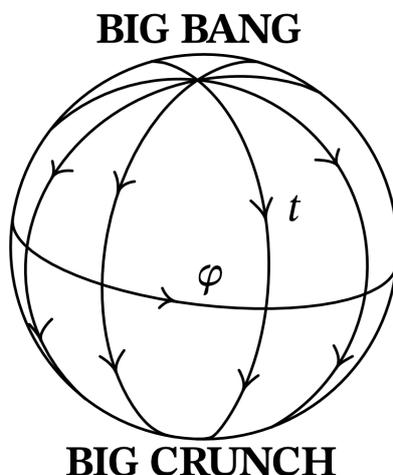


FIGURE 7.3 – Illustration du "Vecteur Temps" Orthogonal à un Cercle dans une Famille de Cercles Foliant une Sphère S^2

Même dans ce cas, cet "objet" possède deux points singuliers à savoir ses pôles, où l'azimut est indéfini. Ces pôles représentent des "singularités de maillage" inévitables. Il y en a deux parce que la caractéristique d'Euler-Poincaré de cet objet est égale à 2. Par exemple, si nous considérons un polyèdre simple comme un tétraèdre pour représenter une approximation de la sphère, qui est une pyramide à base triangulaire, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est de 4 (sommets) - 6 (arêtes) + 4 (faces) = 2. La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une sphère S^n est égale à 2 si n

est pair et zéro si n est impair (Section 6.3.3).

De notre point de vue, l'univers serait une sphère S^4 avec deux singularités, le Big Bang et le Big Crunch. Une sphère à quatre dimensions S^4 est analogue à une sphère régulière, étendant le concept à des dimensions supérieures. En considérant cette sphère avec ses deux pôles, le Big Bang et le Big Crunch, elle peut être foliée par des "*parallèles*" (similaires aux cercles parallèles sur une surface 2D S^2). Ce processus de foliation implique la création de couches, ou "*tranches*", à travers la sphère, qui sont analogues aux lignes représentant les latitudes sur Terre. L'orientation passé-futur devient alors uniforme partout. Dans ce contexte, l'orientation passé-futur fait référence à la direction du temps du Big Bang au Big Crunch, qui devient cohérente dans toute cette structure foliée. Par rapport à cette normale aux surfaces parallèles, l'espace-temps est orientable, ce qui signifie qu'il existe une notion bien définie de "*haut*" et "*bas*" dans la structure de l'espace-temps.

Cependant, en "*pliant*" cette surface (que ce soit S^2 ou S^4), nous créons une situation où deux parallèles se superposent. Plier, dans ce sens, signifie manipuler la structure de la sphère de telle manière que différentes parties de la surface entrent en contact. Leurs vecteurs temps deviennent alors antiparallèles ou opposés, comme mentionné précédemment. Le vecteur temps est une manière de représenter la direction du temps à chaque point de l'espace-temps. Lorsque ces vecteurs deviennent antiparallèles, cela signifie que la direction du temps est inversée aux points de contact. Cela conduit à ce que nous pourrions appeler une "*orientation induite*". L'orientation induite ici fait référence à la nouvelle orientation des vecteurs temps résultant du processus de pliage. À chaque point de cet espace-temps, structuré comme un revêtement à deux feuillets d'une bande de Möbius à trois demi-torsions (*couverture à deux plis*), la "*matière antipodale*" (à la fois spatiale et temporelle) apparaît "*rétrochronale*". Une bande de Möbius à trois demi-torsions est une surface à un seul côté qui peut être visualisée en tordant une bande de papier trois fois avant de joindre les extrémités.

Dans l'article de Jean-Pierre Petit [72], il considère l'interaction de l'univers avec le champ gravitationnel créé par son antipode, en supposant que les lois d'interaction sont les suivantes :

1. Les masses ordinaires s'attirent mutuellement selon Newton.
2. Les masses "*antipodales*" s'attirent mutuellement selon Newton.
3. Les masses ordinaires et les masses "*antipodales*" se repoussent mutuellement selon une loi "*anti-Newton*".

Cette hypothèse l'a conduit à "*plier*" l'univers en lui donnant la topologie d'un "*revêtement à deux feuillets*" d'une surface 2D.

Ainsi "*pliée*", la sphère S^2 (surface fermée) devient le revêtement d'une autre surface fermée, la surface de Boy, qui a un seul pôle puisque sa caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à 1 (Figure 7.4). La surface de Boy² est une surface non

2. La surface de Boy est un exemple de surface non orientable en 3D avec une seule face et un

orientable unique en 3D avec une seule face et un seul bord, présentant un point singulier où tous les points antipodaux convergent.

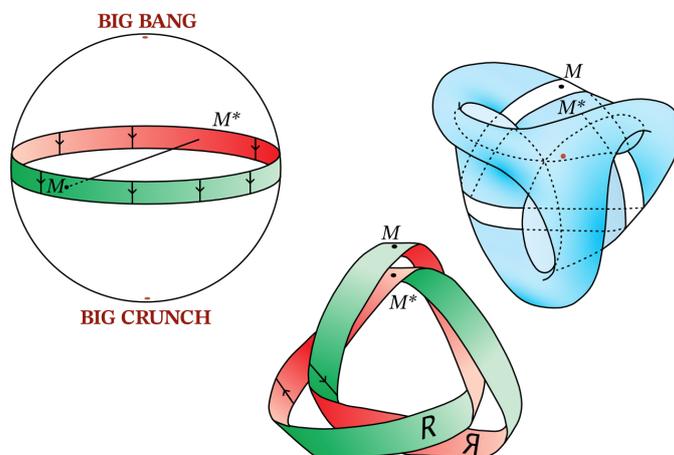


FIGURE 7.4 – Le voisinage de l'équateur d'une 2-Sphère et son emplacement sur une surface de Boy

À ce stade, le Big Bang et le Big Crunch "*coïncident*".

Un "*tube*" pourrait alors être envisagé à la place de cette singularité polaire pour relier ces deux singularités de maillage :

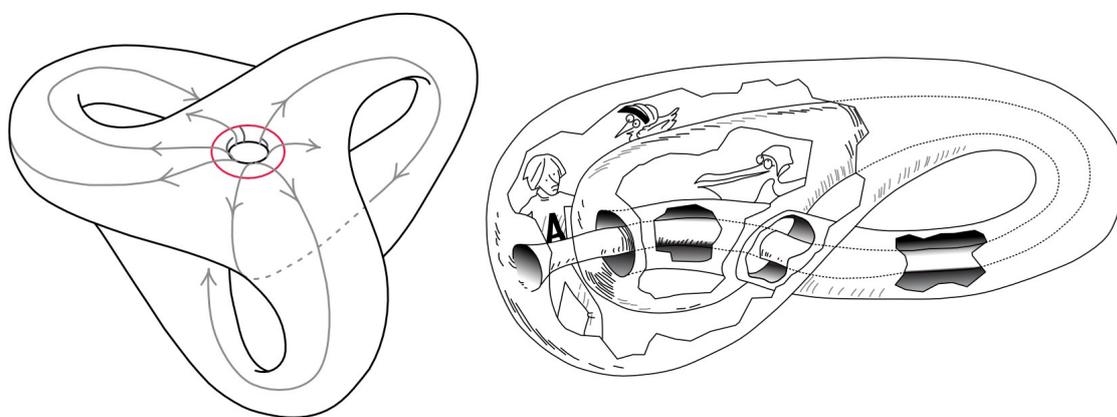


FIGURE 7.5 – Surface de Boy après foliation de la sphère S^2 et la bouteille de Klein K^2 à droite

La nature singulière disparaît, et l'objet devient alors le revêtement d'une bouteille de Klein K^2 , une surface non orientable sans limites ni intérieur distincts, seul bord. Elle est intrigante car, contrairement à la sphère classique, elle a un point singulier où tous les points antipodaux convergent. Cela signifie que si vous commencez à tracer une ligne sur la surface de Boy, vous reviendrez éventuellement à votre point de départ sans jamais avoir franchi un bord ou utilisé l'autre côté, car il n'y en a pas.

dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est zéro, comme illustré dans la Figure 7.5. La bouteille de Klein est une autre surface non orientable qui n'a ni limite ni intérieur distincts. Imaginez une bande de Möbius dont les bords sont également joints. Contrairement à la surface de Boy, la bouteille de Klein ne peut pas être représentée dans notre espace tridimensionnel sans auto-intersection. Son intérêt réside dans son comportement topologique, où les concepts d'"intérieur" et d'"extérieur" ne sont pas séparés, offrant ainsi une représentation utile pour certaines idées en topologie et en cosmologie théorique.

Je crois que les limitations en physique théorique et en cosmologie pendant les années 1950 peuvent être attribuées au retard du domaine à épouser la topologie. La topologie, l'étude des propriétés préservées à travers les déformations continues, aurait pu offrir de nouvelles façons de comprendre le tissu de l'univers et ses structures complexes.

Chapitre 8

Interprétation Alternative des Objets Subcritiques Supermassifs M87* & Sagittarius A*

Les premières images d'objets supermassifs situés au centre des galaxies, publiées dans *Astrophysical Journal*, ont été principalement interprétées comme des trous noirs géants. Cette interprétation repose sur l'absence d'explications alternatives largement acceptées. Cette étude réexamine ces images, en particulier celles des objets au centre de la galaxie M87 et de la Voie Lactée. Elle met en lumière la possibilité d'entités supermassives subcritiques, dont le rayon est seulement 5,72% plus court que le rayon de Schwarzschild calculé à partir de leur masse. Nous verrons également que les parties centrales de ces entités sont assombries par l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel (Redshift gravitationnel), représenté par $z + 1$. Ce décalage est calculé comme le rapport de la longueur d'onde de la lumière reçue par un observateur éloigné à celle émise depuis la surface, correspondant au rapport des températures observées maximales et minimales du centre à la couronne de ces objets, une valeur remarquablement proche de 3. Nous explorerons l'idée que leur stabilité pourrait résulter d'un équilibre entre l'effondrement gravitationnel, dû à une criticité physique se manifestant bien avant la criticité géométrique, et une pression radiative extrêmement élevée à densité constante émanant de leurs centres, proportionnelle au carré de la vitesse de la lumière - un phénomène initialement considéré par Karl Schwarzschild dans son second article publié en février 1916. Notre analyse vise à enrichir la compréhension des objets supermassifs au centre des galaxies en proposant une interprétation alternative.

8.1 Introduction

Les images des deux objets supermassifs situés au centre des galaxies M87 et de la Voie Lactée ont suscité un grand intérêt médiatique, étant immédiatement qualifiées de "*premières images de trous noirs géants*". Ces images ont été publiées dans le prestigieux *Astrophysical Journal* (M87* [2] et Sagittarius A* au centre de la Voie Lactée [3]). Ci-dessous, une barre relie la nuance de couleur à ce qui est appelé la "*température de luminosité*" :

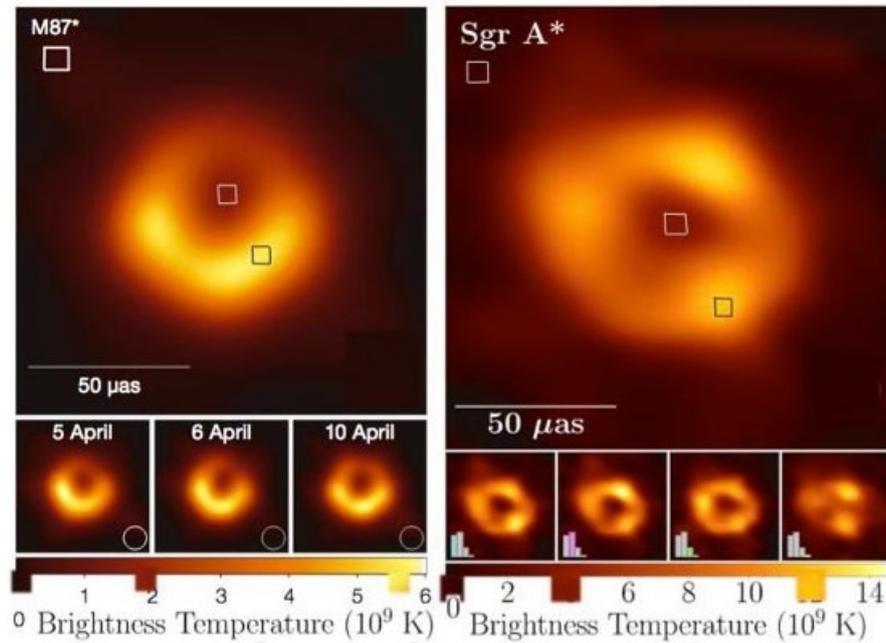


FIGURE 8.1 – Images des objets M87* et Sagittarius A*

Sur la Figure 8.1, à gauche, la première image de l'objet au centre de la galaxie M87 a été publiée en 2019, montrant des températures de luminosité minimales de 1,8 milliard de degrés et maximales de 5,7 milliards de degrés, avec un rapport proche de 3. Trois ans plus tard, en 2022, une seconde image à droite a été publiée, montrant des températures minimales de 4 milliards de degrés et maximales de 12 milliards de degrés, avec un rapport également proche de 3. Ces deux objets ont des masses très différentes, le premier étant 1625 fois plus massif que le second. Il semble curieux que, dans ces circonstances, pour les deux objets, un nuage de gaz chaud au premier plan présente des caractéristiques telles que le rapport des températures maximales et minimales soit si proche de 3 dans les deux cas.

Deux nouvelles images de l'objet au centre de la galaxie M87 ont été publiées dans la revue *Astronomy & Astrophysics* le 18 janvier 2024 ([4]), et nous pouvons constater sur la figure 8.2 une différence dans le rapport des températures de brillance maximales et minimales. Sur la nouvelle image du 11 avril 2017, le rapport entre la température de brillance maximale et minimale donne une valeur approximative de 3,4 ($5,8 \times 10^9$ K divisé par $1,7 \times 10^9$ K). En revanche, l'image de droite, prise pratiquement un an plus tard, montre un rapport de température approximatif de 4,8 (8×10^9 K divisé par $1,7 \times 10^9$ K).

Malgré le fait que la plus récente observation de M87* donne un rapport de température très différent de celui calculé pour le même objet observé un an plus tôt, déterminer laquelle des deux observations est la plus fiable nécessite une analyse approfondie. Cet écart peut être attribué à plusieurs paramètres, allant de la collecte des données interférométriques à leur traitement ultérieur. En effet, ces mesures dépendent de la combinaison de signaux provenant de plusieurs radiotélescopes ré-

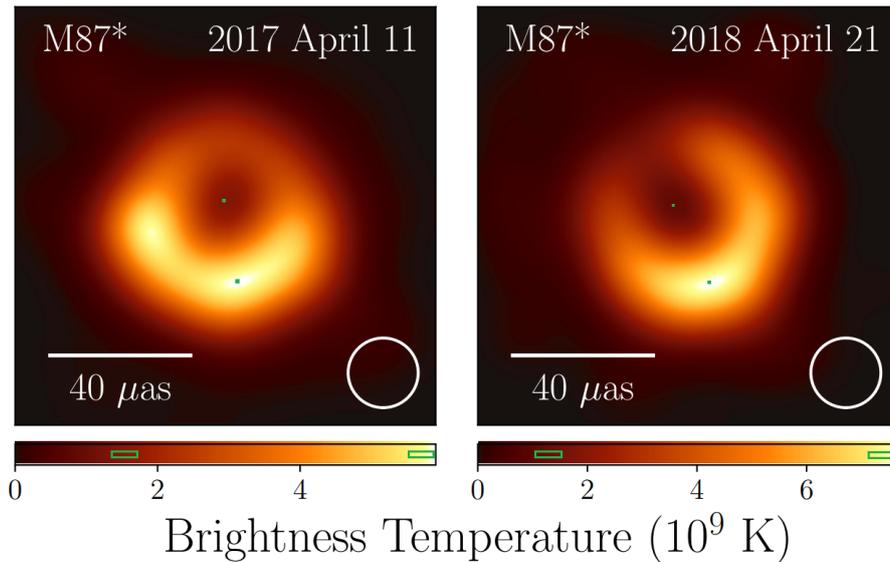


FIGURE 8.2 – Nouvelles images de M87* publiées le 18 janvier 2024.

partis sur de grandes distances. Les erreurs de mesure, les variations atmosphériques, les différences dans l'étalonnage des instruments et les techniques de reconstruction d'image peuvent toutes contribuer aux différences observées. Néanmoins, le seul point commun entre toutes ces observations est que la partie centrale de cet objet céleste présente une température toujours supérieure à 1 milliard de degrés Kelvin.

Si l'image d'un troisième objet au centre d'une nouvelle galaxie conduisait à un rapport de température proche de 3, il serait prudent de remettre en question la véritable nature de ces objets.

Ces premières images d'objets supermassifs situés au centre des galaxies ont néanmoins été associées à des trous noirs géants, et la partie centrale non parfaitement noire semble être due à la lumière émanant d'un disque de gaz chaud en orbite autour du trou noir. Cependant, comme nous le verrons plus tard dans cette étude, une étoile à neutrons peut atteindre la criticité selon deux scénarios :

- De manière abrupte, impliquant l'effondrement soudain d'une étoile supermassive sur son noyau de fer avant de se transformer en supernova.
- Plus progressivement, dans les systèmes binaires, une étoile à neutrons subcritique accumule lentement de la masse en absorbant le gaz émis par une étoile compagne à travers un "*vent stellaire*". La masse critique pour laquelle elle pourrait potentiellement subir une transformation supplémentaire dépend de l'équation d'état de la matière à l'intérieur de l'étoile à neutrons et peut varier. Typiquement, les modèles actuels estiment que la masse critique nécessaire pour une transformation supplémentaire se situe approximativement dans la fourchette de 2 à 3 fois la masse solaire, proche de la limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

La particularité d'un tel modèle est que l'objet massif doit présenter un rapport de température de luminosité de 3 entre sa couronne et son centre (températures maximales et minimales). Comme nous le démontrerons plus tard, une interprétation alternative plus cohérente serait d'attribuer l'assombrissement de la partie centrale de ces objets à un effet de Redshift gravitationnel (Décalage vers le rouge gravitationnel), qui dilate ou ralentit le temps près de leur horizon.

En effet, un objet massif courbe l'espace-temps autour de lui, affectant la trajectoire non seulement des objets massifs mais aussi de la lumière. Lorsqu'un photon passe près d'un tel objet, son chemin est courbé en raison de cette courbure de l'espace-temps, un phénomène connu sous le nom de lentille gravitationnelle (Voir la figure 3.3). Cependant, ce n'est pas seulement le chemin du photon qui change : en s'éloignant de l'objet massif, le photon perd de l'énergie pour échapper au champ gravitationnel fort. Cette perte d'énergie se traduit par une diminution de sa fréquence, qui étend sa longueur d'onde vers l'extrémité rouge du spectre lumineux, un phénomène connu sous le nom de décalage vers le rouge (Redshift gravitationnel).

Pour calculer l'énergie perdue par un photon en raison du décalage vers le rouge gravitationnel, il est essentiel de comprendre que l'énergie d'un photon est directement liée à sa fréquence f à travers l'équation $E = hf$, où h est la constante de Planck.

Si nous considérons un photon émis avec une fréquence f_e et observé avec une fréquence réduite f_r en raison du décalage vers le rouge gravitationnel, l'énergie perdue par le photon peut être exprimée comme la différence entre les énergies initiale et finale :

$$\Delta E = h(f_e - f_r) \quad (8.1.1)$$

En utilisant la relation entre fréquence et longueur d'onde ($f = \frac{c}{\lambda}$), où c est la vitesse de la lumière, cette équation peut être réécrite en termes de longueurs d'onde :

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_r} - \frac{1}{\lambda_e} \right) \quad (8.1.2)$$

Et en utilisant la définition du Redshift gravitationnel (Décalage vers le rouge) $z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e}$, nous pouvons réarranger pour obtenir une expression en termes de z :

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_e(1+z)} - \frac{1}{\lambda_e} \right) \quad (8.1.3)$$

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda_e} \left(\frac{z}{1+z} \right) \quad (8.1.4)$$

Cette équation montre que l'énergie perdue par un photon en raison du décalage vers le rouge gravitationnel dépend de la longueur d'onde à laquelle il a été émis et de la valeur du Redshift gravitationnel z , le signe négatif indiquant une perte d'énergie.

Cette perte d'énergie n'est pas simplement apparente. Par exemple, le fond diffus cosmologique est le rayonnement qui a subi le plus grand Redshift gravitationnel, avec un facteur z d'environ 1 100, correspondant à une température et une énergie très basses d'environ 3 Kelvin (-270°C), bien inférieures à l'énergie originale (Voir la

figure 3.9).

Il est également important de noter que les jets très fins et collimatés observés à proximité d'objets supermassifs indiquent la présence d'un champ magnétique puissant qui s'oppose à l'effondrement de l'objet sous l'effet de la gravité, en exerçant une intense pression magnétique opposée. Ces objets, comme les étoiles à neutrons à leur masse maximale, sont subcritiques, entraînant un effet de décalage vers le rouge gravitationnel limité à 3. Cela suggère que ces objets pourraient être des objets massifs subcritiques.

En science, lorsqu'une observation ne correspond pas à la théorie, c'est généralement la théorie qui est remise en question. Cependant, dans cet article très récent publié dans *Astrophysical Journal* [58], les chercheurs ont modifié les observations pour les aligner avec le modèle du trou noir. Ils ont généré des images synthétiques de trous noirs en manipulant divers paramètres tels que la masse, le moment angulaire, etc., et en sélectionnant celui qui correspondait le mieux aux données observées à l'aide du logiciel PRIMO comme sur la Figure 8.3.

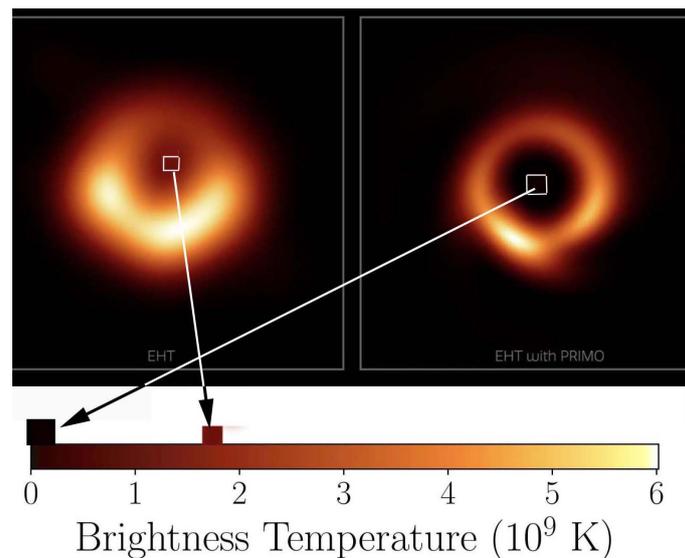


FIGURE 8.3 – Image synthétique du trou noir M87* traitée par PRIMO à droite comparée à l'image originale à gauche

Le résultat fut une confirmation de la théorie, mais il soulève des questions sur la rigueur scientifique et l'objectivité de la recherche.

8.2 Interprétation Alternative du Phénomène

Il existe une interprétation alternative qui consiste à attribuer cette variation de couleur du centre vers le bord à un décalage vers le rouge gravitationnel, avec $z = 2$,

conduisant à un allongement de la longueur d'onde par un facteur de $1 + z = 3$. Que pouvons-nous dire au sujet de ces objets ?

8.2.1 Comparaison des Criticités Physique & Géométrique

Dans la section 6.1, nous avons examiné les solutions de Schwarzschild aux équations d'Einstein, mettant en évidence la métrique extérieure de Schwarzschild et la métrique intérieure correspondante pour un fluide de densité constante ρ_o . Ces solutions ont été confirmées par des phénomènes tels que l'avance du périhélie de Mercure et le phénomène de lentille gravitationnelle (Figure 3.3). Karl Schwarzschild s'est efforcé de s'assurer que les conditions régissant ces deux métriques étaient conformes à la réalité physique.

Dans un scénario où la densité de l'étoile, ρ_o , reste constante, un rayon caractéristique \hat{r} peut être défini. En effet, si nous considérons la métrique intérieure publiée par Schwarzschild dans son deuxième article de février 1916 [90] :

$$ds^2 = \left(\frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right) dt^2 - \frac{3}{\kappa \rho_o} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \Theta d\Phi^2) \quad (8.2.1)$$

Schwarzschild considérait la vitesse de la lumière c comme égale à un. Ainsi, l'expression $\frac{3}{\kappa \rho_o}$ devrait être écrite comme $\frac{3c^2}{\kappa \rho_o}$. Ensuite, K. Schwarzschild a défini une constante κ comme étant égale à $8\pi k^2$ "où k^2 est la constante gravitationnelle de Gauss", ce qui lui permet ensuite d'introduire le rayon caractéristique \hat{r}^2 égal à $\frac{3}{\kappa \rho_o}$ et, qui est aussi le rayon du cercle faisant partie du méridien de la surface de Flamm ([66]). Ainsi, l'équation 8.2.1 nous amène à :

$$ds^2 = \left(\frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right) dt^2 - \hat{r}^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \Theta d\Phi^2) \quad (8.2.2)$$

Puis, comme K. Schwarzschild utilise l'angle χ pour localiser les points à l'intérieur de la sphère, il passe à la variable r par l'application du changement de variable $r = \hat{r} \sin \chi$, ce qui nous permet d'arriver à la forme moderne de la métrique. Tolman fournit une déclaration précise en 1934 en donnant la métrique suivante ([99]) :

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} \right]^2 c^2 dt^2 \quad (8.2.3)$$

Où r_n est le rayon de l'étoile et \hat{r} est une constante stellaire en fonction de sa densité ρ_o . Notez qu'il formule l'ordre des termes, dans la métrique, selon la signature $(- - - +)$ mais conserve les signes des termes respectifs.

Considérons un observateur stationnaire ($dr = d\theta = d\phi = 0$) situé à l'intérieur d'une étoile. La métrique devient :

$$ds = cd\tau = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} \right] c dt = f(r) dt \quad (8.2.4)$$

où τ est le temps propre tel qu'observé par l'observateur stationnaire à l'intérieur de l'étoile et $f(r)$ est le facteur temps.

Puis, comme vu dans la section 6.1, lorsque le facteur temps est nul au centre de l'étoile, une criticité physique est atteinte avant l'apparition de la criticité géométrique, lorsque le rayon de l'étoile n'est que 5,72% inférieur au rayon critique \hat{r} déduit de sa densité :

$$r_n = R_{\text{cr}_\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_0}} \quad (8.2.5)$$

8.2.2 Redshift Gravitationnel Proche de la Criticité Physique

Ensuite, la solution de Schwarzschild a été reprise, sous une forme différente, par Tolman ([99]), Oppenheimer ([66]) et d'autres ([1]), menant à l'équation d'état, connue sous le nom d'équation de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV), présentée sous sa forme différentielle :

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho c^2 + p}{r^2} \left(\frac{4\pi G}{c^4} p r^3 + \frac{Gm(r)}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \quad (8.2.6)$$

Dont la valeur intégrée a été donnée par Karl Schwarzschild un siècle plus tôt (voir la Figure 8.4), où dans son deuxième article [90] publié en février 1916, il décrit la géométrie à l'intérieur d'une sphère remplie d'un fluide incompressible de densité constante ρ_0 :

$$f_2 = \frac{3}{\alpha \rho_0} \sin^2 \chi, \quad f_4 = \left(\frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right)^2, \quad f_1 f_2 f_4 = 1. \quad (29)$$

$$\longrightarrow \rho_0 + p = \rho_0 \frac{2 \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \quad (30)$$

$$3x = r^3 = \left(\frac{\alpha \rho_0}{3} \right)^{-3/2} \left[\frac{9}{4} \cos \chi_a \left(\chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi \right) - \frac{1}{2} \sin^3 \chi \right]. \quad (31)$$

FIGURE 8.4 – La loi de pression obtenue en 1916 par Karl Schwarzschild

Dans cette formule, la vitesse de la lumière est toujours ajustée à une valeur unitaire. Par conséquent, cette formule est équivalente à :

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{\cos \chi - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \right) \quad (8.2.7)$$

Ensuite, comme vu dans la Section 8.2.1, K. Schwarzschild est passé à la variable r par le changement de variable simple suivant :

$$r = \hat{r} \sin \chi \quad (8.2.8)$$

La pression devient nulle à la surface de l'étoile pour $\chi = \chi_a$ avec un rayon donné par :

$$r_a = \hat{r} \sin \chi_a \quad (8.2.9)$$

Le centre de l'étoile correspond à $\chi = 0$, donc la pression devient :

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{1 - \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - 1} \right) \quad (8.2.10)$$

Cela impose une limite maximale sur ce rayon pour $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$, signifiant :

$$r_a = R_{\text{cr}_\phi} = \hat{r} \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,9428 \hat{r} \quad (8.2.11)$$

Cependant, si nous considérons la masse correspondant à une criticité physique :

$$M_{\text{cr}_\phi} = \frac{4}{3} \pi \hat{r}^3 \rho_0 \quad (8.2.12)$$

et celle correspondant à une criticité géométrique :

$$M_{\text{cr}_\gamma} = \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0 \quad (8.2.13)$$

nous obtenons la relation suivante :

$$M_{\text{cr}_\phi} = \left(\frac{8}{9} \right)^{\frac{3}{2}} M_{\text{cr}_\gamma} = 0,838 M_{\text{cr}_\gamma} = 2,5 M_{\text{solar}} \quad (8.2.14)$$

Une valeur compatible avec les masses de quelques étoiles à neutrons que nous avons pu déduire directement des observations disponibles et pour lesquelles, Thorne, Wheeler et Misner ont estimé dans leur livre (page 611 de [98]) comme la masse critique au-delà de laquelle la pression s'envole à l'infini comme sur la Figure 8.5.

Bien sûr, nous n'aurons jamais d'images d'étoiles à neutrons comparables à celles des objets situés au centre de M87 et de la Voie Lactée. Calculons donc l'effet de décalage vers le rouge gravitationnel $z + 1$ (Redshift gravitationnel) correspondant à des corps célestes massifs proches de cette criticité physique. Cet effet impacte la lumière émise depuis leur surface dans une direction radiale vers un observateur éloigné, qui la percevra avec une longueur d'onde λ_r étirée (*redshiftée*). Il est donné par :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_a}}} \quad (8.2.15)$$

Cependant, dans la partie centrale, le rayon de criticité géométrique est défini par le *Rayon de Schwarzschild* qui est :

$$R_s = \frac{2GM_{\text{cr}_\gamma}}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \left(\frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0 \right) = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r_a^3 = \frac{r_a^3}{\hat{r}^2} \quad (8.2.16)$$

Alors, le décalage vers le rouge gravitationnel donnera :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_a^2}{\hat{r}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_a c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3 \quad (8.2.17)$$

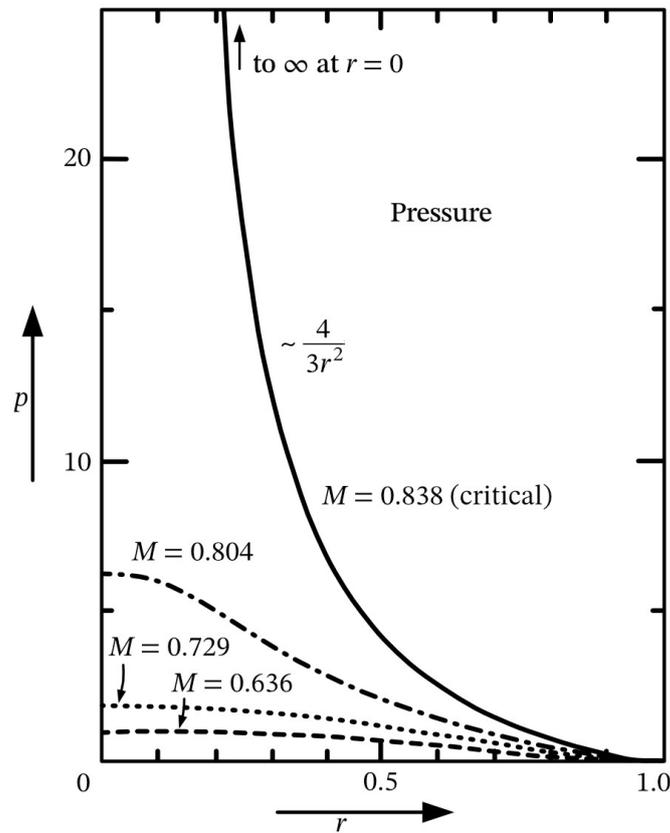


FIGURE 8.5 – Variation de la pression à l’intérieur d’une étoile à neutrons de densité constante

C’est précisément la valeur déduite du rapport entre les températures maximales et minimales des deux premières images de trous noirs situés au centre des galaxies M87 et de la Voie Lactée. Ainsi, les images de ces objets supermassifs pourraient également correspondre à des entités subcritiques, où la pression à leur centre ¹ serait infinie, ou du moins extrêmement élevée.

8.2.3 Variation de la Vitesse de la Lumière & de la Pression dans les Plasmas à Densité Constante

Considérons maintenant un fluide (plasma d’hydrogène) à densité constante supposée. À une température inférieure à 3000°C, la pression à l’intérieur est donnée par :

$$p = \frac{\rho_0 v^2}{3} \quad (8.2.18)$$

où v est la vitesse moyenne d’agitation thermique des particules composant le plasma ([20]). Ainsi, le raisonnement qui consiste à dire que "si la pression p tend vers l’infini, alors cette vitesse devrait également tendre vers l’infini, ce qui est en

1. définie comme une densité d’énergie par unité de volume

contradiction avec un principe central de la relativité restreinte, le "principe de causalité", selon lequel aucun effet physique ne peut se propager à une vitesse $v > c$ " ([98]), conduirait à une aberration physique.

Néanmoins, dans cette région de l'espace-temps, la pression au sein de ce plasma devient radiative :

$$p_r = \frac{\rho_0 c^2}{3} \quad (8.2.19)$$

Si nous envisageons d'augmenter cette pression radiative à densité constante, cela ne peut être réalisé qu'en considérant une variation de la vitesse de la lumière dans le milieu, ce que Karl Schwarzschild a été le premier à envisager [90] :

Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3 \cos \chi_a - \cos \chi_s}, \quad (44)$$

FIGURE 8.6 – Variation de la vitesse de la lumière dans une sphère à densité constante

Ainsi, comme il l'a souligné dans son article, l'augmentation de la vitesse de la lumière suit l'augmentation de la pression. Que se passe-t-il lorsque cette pression monte, tout comme la valeur de la vitesse de la lumière ? C'est simple, il est clair selon Karl Schwarzschild (page 433 de [90]) que ces deux quantités deviennent infinies pour $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$, correspondant à $r = R_{\text{cr}\phi}$ (8.2.11) comme vu dans la Section 8.2.2.

Nous pouvons déduire, selon l'étude de Karl Schwarzschild, que la stabilité de ces objets subcritiques supermassifs est due au fait que l'effondrement gravitationnel, dû à la criticité physique se produisant bien avant la criticité géométrique, est compensé par une pression radiative extrêmement élevée à densité constante provenant de leurs centres, proportionnelle au carré de la vitesse de la lumière.

8.3 Conclusion

Nous avons analysé les images d'objets supermassifs situés au centre des galaxies, qui ont été initialement présentées dans *Astrophysical Journal* comme les premières images de trous noirs géants. À travers notre étude approfondie, nous proposons une interprétation alternative de ces objets qui pourraient correspondre à des entités supermassives subcritiques, exhibant un rapport de température maximal à minimal proche de 3. En effet, leur rayon est seulement 5,72% plus court que les longueurs de Schwarzschild déduites de leur masse. Cette observation s'aligne bien avec l'effet de Redshift gravitationnel, potentiellement caractéristique d'étoiles à neutrons approchant d'une criticité physique, comme suggéré par la solution géométrique intérieure de Schwarzschild publiée dans son deuxième article en février 1916. Cette solution, largement méconnue de la plupart des cosmologistes d'après-guerre et non traduite en anglais avant 1999, offre une perspective unique pour observer ces phénomènes. En examinant des aspects tels que la pression, la vitesse de la lumière et le facteur temps au sein de ces objets, nous visons à enrichir le récit existant sur les phénomènes astrophysiques complexes au cœur des galaxies. Cela inclut une exploration de leur stabilité, qui pourrait être maintenue par un équilibre entre l'effondrement gravitationnel, résultant d'une criticité physique se manifestant bien avant la criticité géométrique, et la pression radiative extrêmement élevée à densité constante provenant de leurs centres, proportionnelle au carré de la vitesse de la lumière. Les travaux centenaires de Karl Schwarzschild nous rappellent qu'il reste encore des mystères à élucider au sein des théories bien établies. Les questions que nous soulevons, en particulier concernant l'évolution du facteur temps et ses implications profondes pour le concept de temps lui-même, sont importantes et invitent à de nouvelles recherches. Si de futures observations confirment nos hypothèses, en particulier si une image d'un troisième objet supermassif est découverte avec un rapport de température similaire, cela encouragerait une réévaluation de certains de nos modèles astrophysiques actuels. En fin de compte, l'univers, dans son immensité et sa complexité, continue de nous stimuler dans notre quête insatiable de connaissance.

Chapitre 10

Conclusion & Discussions

En considérant le principe du rasoir d'Occam, qui privilégie la théorie la plus simple et la plus cohérente avec les données observationnelles, il est raisonnable de conclure que le Modèle Janus de Jean-Pierre Petit surpasse le Modèle Standard Λ CDM. Le Modèle Cosmologique Janus fournit une approche cohérente pour expliquer plusieurs phénomènes astrophysiques tout en offrant une interprétation claire des données observationnelles disponibles. Alors que le modèle standard Λ CDM présente des incohérences avec les données observationnelles, nécessitant des constructions ad hoc pour les contourner.

En effet, le modèle Janus va au-delà de la simple proposition d'alternatives aux phénomènes habituellement attribués à la matière noire et à l'énergie noire, tels que l'accélération de l'expansion cosmique, le confinement des galaxies, les effets prononcés de lentille gravitationnelle négative, entre autres. Il fournit des clarifications détaillées sur la nature et l'identité des composants invisibles de l'univers. Le modèle résout le paradoxe du manque d'observation de l'antimatière primordiale et offre une explication pour le Répulseur du Dipôle, le considérant comme un conglomerat de masse négative. Cette perspective renforce la crédibilité du Modèle Cosmologique Janus dans l'établissement de la structure à grande échelle de l'univers, tout en expliquant les raisons de la difficulté de détecter la masse négative avec des instruments d'observation optiques. Il explique également la faible magnitude des objets astronomiques à fort redshift gravitationnel (supérieur à 7) et adhère au principe de réfutabilité en proposant des tests observationnels spécifiques, tels que la détection de conglomerats de masse négative, le Répulseur du Dipôle étant un exemple notable. En outre, il propose une cartographie alternative de l'univers basée sur une interprétation différente de l'effet de lentille gravitationnelle faible.

De plus, le modèle Janus de Jean-Pierre Petit se confirme par les données observationnelles les plus récentes, en particulier celles obtenues par le Télescope Spatial James Webb, en prédisant la formation des galaxies dans leurs formes actuelles au cours des 100 premiers millions d'années de l'âge de l'univers. En outre, la structure de son groupe symplectique confère une *symétrie CPT* à sa géométrie pour laquelle une prédiction spécifique faite en 2017 a été confirmée en septembre 2023. Cette prédiction concerne l'antimatière *C-symétrique* (symétrie de charge), synthétisée en

laboratoire et émettant des photons d'énergie positive, qui, selon les observations, répond à l'attraction gravitationnelle de la même manière que la matière ordinaire.

Il ouvre également des voies prometteuses de recherche en mécanique quantique, suggérant que l'intégration d'états d'énergie et de masse négatives pourrait être primordiale pour la quantification de la gravitation. Le modèle Janus se conjugue donc parfaitement avec la nature, ne présentant aucune contradiction majeure.

Tout au long de ce livre, nous avons plongé dans les complexités du modèle, démêlant ses nuances et son potentiel pour éclairer les mystères qui ont depuis longtemps déconcerté les cosmologistes et les physiciens.

Ce voyage à travers les domaines des mathématiques avancées, de la physique théorique et de la cosmologie démontre la capacité du modèle à remettre en question les perspectives conventionnelles et à offrir des explications alternatives aux phénomènes que les modèles actuels peinent à élucider pleinement. Les discussions et analyses présentées visent à enrichir la compréhension du lecteur et à susciter une curiosité pour explorer et questionner davantage les limites de nos connaissances scientifiques.

Je crois que les limitations en physique théorique et en cosmologie peuvent être attribuées au retard du domaine à épouser la topologie depuis les années 1950. La topologie, l'étude des propriétés préservées à travers les déformations continues, aurait pu offrir de nouvelles façons de comprendre le tissu de l'univers et ses structures complexes.

En conclusion, j'espère que ce livre servira non seulement de guide complet sur le modèle ancré dans une solide fondation théorique de la relativité générale, mais aussi d'inspiration et de motivation pour une nouvelle génération de penseurs qui oseront courageusement explorer les territoires inexplorés de la cosmologie. Puisse-t-il favoriser une appréciation plus profonde de la beauté complexe de notre univers et de la quête continue de compréhension qui nous anime en tant que scientifiques et êtres humains.

Ce modèle émerge comme une lumière directrice essentielle et indispensable en cosmologie, illuminant le chemin vers des territoires inexplorés et de nouvelles perspectives. Ce voyage est loin d'être terminé. Il encourage continuellement à approfondir la recherche, mais surtout à faire de nouvelles découvertes, ce qui peut être résumé par la célèbre phrase de Pierre Dac ([25]) souvent attribuée à Charles De Gaulle¹ : *“Des chercheurs qui cherchent, on en trouve. Des chercheurs qui trouvent, on en cherche”*.

1. Citation exacte de Charles De Gaulle prononcée le 13 août 1968 : *“ Tout enseignant, tout chercheur bénéficie, après un certain délai, de la sécurité d'un emploi dans l'établissement où il exerce ses fonctions. Autrement dit, il pourra rester chercheur même s'il ne trouve rien et surtout à partir du moment où il ne sera plus d'âge à rien trouver.”*

Bibliographie

- [1] R. ADLER, M. BAZIN et M. SCHIFFER : *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill, 1975.
- [2] K. AKIYAMA *et al.* : First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal*, 2019.
- [3] K. AKIYAMA *et al.* : First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *The Astrophysical Journal*, 2022.
- [4] K. AKIYAMA *et al.* : The persistent shadow of the supermassive black hole of M 87. *Astronomy & Astrophysics*, 2024.
- [5] E. K. ANDERSON *et al.* : Observation of the effect of gravity on the motion of antimatter. *Nature*, 2023.
- [6] E. ATHANASSOULA : Bar-halo interaction and bar growth. *The Astrophysical Journal*, L83-L86, 2002. <https://doi.org/10.1086/340784>.
- [7] V. BARGMANN, P. G. BERGMANN et A. EINSTEIN : On The Five-Dimensional Representation Of Gravitation And Electricity. *Theodore von Karman Anniversary Volume*, page 212, 1941.
- [8] A. BENOIT-LÉVY et G. CHARDIN : Introducing the Dirac-Milne universe. *Astronomy and Astrophysics*, 537:A78, 2012.
- [9] P. BERGMANN : *An Introduction To The Theory Of Relativity*. Prentice-Hall, 1942.
- [10] P. BERGMANN et A. EINSTEIN : On A Generalization Of Kaluza's Theory Of Electricity. *Annals of Mathematics*, 39:683, 1938.
- [11] James BINNEY et Scott TREMAINE : *Galactic dynamics*. Princeton University Press, 2008.
- [12] W. D. BLOK et A. BOSMA : High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 385(3):816–846, 2002. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020080>.
- [13] H. BONDI : Negative Mass in General Relativity. *Reviews of Modern Physics*, 29(3), 1957.
- [14] A. BOSMA : Rotation curves and the dark matter problem. *arXiv :2309.06390v1*, 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.06390>.
- [15] A. BOSMA, Y.I. BYUN, K.C. FREEMAN et E. ATHANASSOULA : The opacity of spiral disks. *The Astrophysical Journal Letters*, 400(L21-L24):723, 1992. <https://doi.org/10.1086/186639>.

- [16] N. BOURBAKI : *Eléments de mathématique : Groupes et algèbres de Lie*. Springer, 2006.
- [17] C. E. BRENNEN : *Cavitation and Bubble Dynamics*. Oxford University Press, 1995.
- [18] S. CHANDRASEKHAR : *Principles of Stellar Dynamics*. Dover, 1942.
- [19] S. CHANDRASEKHAR : *The Mathematical Theory of Black Holes*. Clarendon Press, 1983.
- [20] S. CHAPMAN et T. G. COWLING : *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. Cambridge University Press, 1970.
- [21] Joël CHASKALOVIC : Gravitation theory for mathematical modelling in geomarketing. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 12(3):417, 2009.
- [22] R. CHIBA et R. SCHÖNRICH : Tree-ring structure of Galactic bar resonance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 505:2412, 2021.
- [23] Piotr T. CHRUSCIEL : Lectures on mathematical relativity. Lecture notes, revised and extended May 2008 following lectures on black holes in Marrakech, Beijing, July 2006, Mathematical Institute and Hertford College, Oxford, LMPT, Fédération Denis Poisson, Tours, 2008. Accessed online at <https://homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel/papers/BeijingAll.pdf>.
- [24] J. W. CRONIN : The Experimental Discovery of CP Violation. *American Physical Society*, 1964.
- [25] P. DAC : *Les pensées*. 1972.
- [26] T. DAMOUR et Ian I. KOGAN : Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity. *Phys. Rev. D*, 2002.
- [27] W. J. G. de BLOK, A. BOSMA et S. MCGAUGH : Simulating observations of dark matter dominated galaxies : Towards the optimal halo profile. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Soc*, 340(2):657–678, 2003. <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06330.x>.
- [28] N. DEBERGH *et al.* : On evidence for negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator. *Journal of Physics Communications*, 2018.
- [29] F. W. DYSON, A. S. EDDINGTON et C. DAVIDSON : A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, pages 291–333, 1920.
- [30] A. EDDINGTON : A Comparison with Whitehead’s and Einstein’s Formulæ. *Nature*, 1924.
- [31] A. EINSTEIN et N. ROSEN : The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Phys. Rev.*, 48:73, 1935.
- [32] H. EL-AD et T. PIRAN : Voids in the Large-Scale Structure. *The Astrophysical Journal*, 1997.

- [33] Leonardo FERREIRA *et al.* : Panic! at the Disks : First Rest-frame Optical Observations of Galaxy Structure at $z>3$ with JWST in the SMACS0723 Field. *The Astrophysical Journal Letters*, 2022.
- [34] L. FLAMM : Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 1916.
- [35] L. FLAMM : Republication of : Contributions to Einstein's theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, 47(72), 2015.
- [36] R. W. FULLER et J. A. WHEELER : Causality and multiply connected space-time. *Physical Review*, 1962.
- [37] O. GARRIDO, M. MARCELIN, P. AMRAM et J. BOULESTEIX : Ghasp : An $h\alpha$ kinematic survey of spiral and irregular galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 387:821–829, 2002. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020479>.
- [38] E. GUENDELMAN, A. KAGANOVICH, E. NISSIMOV et S. PACHEVA : Spherically symmetric and rotating wormholes produced by lightlike branes. *International Journal of Modern Physics A*, 25(07):1405–1428, 2010.
- [39] E. GUENDELMAN, E. NISSIMOV, S. PACHEVA et M. STOILOV : Einstein-Rosen "bridge" revisited and lightlike thin-shell wormholes. *Bulgarian Journal of Physics*, 44:84–97, 2017.
- [40] Eduardo GUENDELMAN : Holomorphic general coordinate invariant modified measure gravitational theory. *Annals of Physics*, 458:169466, 2023.
- [41] Eduardo GUENDELMAN : Holomorphic gravity and its regularization of locally signed coordinate invariance. 2024.
- [42] Eduardo GUENDELMAN : Inversion invariant volume element for strings, anistrings and braneworlds. *Bulgarian Journal of Physics*, 51:21–41, 2024.
- [43] Eduardo GUENDELMAN, Alexander KAGANOVICH, Emil NISSIMOV et Svetlana PACHEVA : Spherically symmetric and rotating wormholes produced by lightlike branes. *International Journal of Modern Physics A*, 25(07):1405–1428, 2010.
- [44] Eduardo GUENDELMAN, Emil NISSIMOV, Svetlana PACHEVA et Michail STOILOV : Einstein-rosen "bridge" revisited and lightlike thin-shell wormholes. *Bulgarian Journal of Physics*, 44:84–97, 2017.
- [45] G. HEALD : The Stronger Case for Gravitational Repulsion between Matter and Antimatter. *Research Gate publication*, (339339776), 2020.
- [46] Y. HOFFMAN *et al.* : The quasi-linear nearby Universe. *Nature Astronomy*, 2018. arXiv :1807.03724.
- [47] Y. HOFFMAN, D. POMARÈDE, R.B. TULLY et H. COURTOIS : The dipole repeller. *Nature Astronomy*, 1:0036, 2017.
- [48] S. HOSSENFELDER : Bimetric theory with exchange symmetry. *Phys. Rev. D*, 78:044015, Aug 2008.
- [49] James H JEANS : The stability of a spherical nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 199:1–53, 1902.

- [50] T. KALUZA : On the Unification Problem in Physics. *International Journal of Modern Physics D*, 27(14):1870001, 2018.
- [51] Roy P. KERR : Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Letters*, 11:237, 1963.
- [52] O. KLEIN : Quantum theory and five-dimensional relativity theory. In *The Oskar Klein Memorial Lectures*, pages 69–82. 2014.
- [53] P. KOIRAN : Infall time in the Eddington–Finkelstein metric, with application to Einstein–Rosen bridges. *Inter. Jr. of Mod. Phys. D*, 15(30), 2021.
- [54] Pascal KOIRAN, Hicham ZEJLI, J.-P. LEVY, Florent MARGNAT, M.-F. DUVAL et Hasnae ZEJLI : PT -symmetry in one-way wormholes. *Annals of Physics*, page 169765, 2024. Available on arXiv in the GR-QC category at <https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.02951> and published in *Annals of Physics* (AOP) at <https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169765>.
- [55] M. D. KRUSKAL : Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Physical Review*, 119(5), 1960.
- [56] James Clerk MAXWELL : Illustration of the dynamical theory of gases. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 19(124):19–32, 1860.
- [57] S. MCGAUGH, V.C. RUBIN et W.J.G. de BLOK : High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies. ii. mass models. *The Astrophysical Journal*, 122:2396–2427, 2001. <https://doi.org/10.1086/323450>.
- [58] L. MEDEIROS *et al.* : Principal-component Interferometric Modeling (PRIMO), an Algorithm for EHT Data. I. Reconstructing Images from Simulated EHT Observations. *The Astrophysical Journal*, 2023.
- [59] A. A. MICHELSON et E. W. MORLEY : On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. *American Journal of Science*, 34(203):333–345, 1887.
- [60] G. MONNET et J.P. PETIT : Axisymmetrical elliptical solution of the coupled Vlasov plus Poisson equations. 1974. <https://doi.org/10.5281/zenodo.13624862>.
- [61] B. MORIN et J.P. PETIT : Le Retournement de la Sphère. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Série A*, 287(13):791–794, 1978.
- [62] M. MORRIS et K.S. THORNE : Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel : A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56:395, 1988.
- [63] J.F. NAVARRO, C.S. FRENK et S.D. WHITE : A universal density profile from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, 490:493–508, 1997. <https://doi.org/10.1086/304888>.
- [64] T.F. NEISER : Fermi Degenerate Antineutrino Star Model of Dark Energy. *Advances in Astronomy*, 2020:Article ID 8654307, 2020.
- [65] J. R. OPPENHEIMER et G. M. VOLKOFF : On Massive Neutron Cores. *Physical Review*, 55(4):374–381, 1939.

- [66] J.R. OPPENHEIMER et H. SNYDER : On Continued Gravitational Contraction. *Phys. Rev.*, 56(5):455–459, 1939.
- [67] A. PALATINI : Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 43:203–212, 1919.
- [68] A. I. PAVLOVSKII : Magnetic Cumulation - A Memoir for Andrei Sakharov. In M. COWAN et R. B. SPIELMAN, éditeurs : *Megagauss Magnetic Field Generation and Pulsed Power Applications*, volume I, pages 9–22. Nova Science Publishers, New York, 1994.
- [69] S. PERLMUTTER *et al.* : Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophysical Journal*, 517(2):565–586, 1999.
- [70] J. P. PETIT, F. MARGNAT et H. ZEJLI : A bimetric cosmological model based on Andreï Sakharov’s twin universe approach. *European Physical Journal C*, 84:1226, 2024. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-13569-w>.
- [71] J.P. PETIT : *Le topologicon*. Edition Belin, 1985.
- [72] J.P. PETIT : The Missing-Mass Problem. *Il Nuovo Cimento*, 1994.
- [73] J.P. PETIT : Twin Universe Cosmology. *Astrophysics and Space Science*, 226:273–307, 1995.
- [74] J.P. PETIT : The Janus Cosmological Model and the fluctuations of the CMB. *Progress in Physics*, 2018.
- [75] J.P. PETIT et G. D’AGOSTINI : Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe. *Modern Physics Letters A*, 29(34), 2014a.
- [76] J.P. PETIT et G. D’AGOSTINI : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. *Astrophysics And Space Science*, 354:611–615, 2014b.
- [77] J.P. PETIT et G. D’AGOSTINI : Constraints on Janus Cosmological model from recent observations of supernovae type Ia. *Astrophysics and Space Science*, 2021. hal-03426721f.
- [78] J.P. PETIT et G. D’AGOSTINI : Bimetric models. When negative mass replaces both dark matter and dark energy. Excellent agreement with observational data. Solving the problem of the primeval antimatter. *Database of the French National Center*, 2021a.
- [79] J.P. PETIT, G. D’AGOSTINI et N. DEBERGH : Evidence of negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator. *J. Phys. Comm.*, 2(115012), 2018.
- [80] J.P. PETIT, G. D’AGOSTINI et N. DEBERGH : Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model (JCM). *Progress in Physics*, 15, 2019.
- [81] J.P. PETIT, P. MIDY et F. LANDSHEAT : Twin matter against dark matter. In *Where is the matter? (International Conference on Astrophysics and Cosmology)*, 2001.

- [82] Tsvi PIRAN : On Gravitational Repulsion. *arXiv*, 2018.
- [83] N. POPLAWSKI : Radial motion into an Einstein–Rosen bridge. *Physics Letters B*, 687:110–113, 2010.
- [84] A. RIESS *et al.* : Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope, Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. *Astrophysical Journal*, 607(2), 2004.
- [85] A. D. SAKHAROV : Violation of CP Invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe. *Pi'sma ZhÉTF*, 5(1):32–35, 1967.
- [86] A. D. SAKHAROV : Cosmological Models of the Universe with Reversal of Time's Arrow. *Pi'sma ZhÉTF*, 79(3):689–693, 1980.
- [87] A. D. SAKHAROV : Multisheet Models of the Universe. *Pi'sma ZhÉTF*, 82(3):1233–1240, 1982.
- [88] A.D. SAKHAROV : ZhETF Pis'ma. *JETP*, 49:594, 1979. 76 : 1172.
- [89] B.P. SCHMIDT *et al.* : The high- Z supernova search. Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae. *Astrophysical Journal*, 507(1), 1998.
- [90] K. SCHWARZSCHILD : Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916.
- [91] K. SCHWARZSCHILD : Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916.
- [92] Y. SOFUE, Y. TUTUI, M. HONMA, A. TOMITA, T. TAKAMIYA, J. KODA et Y. TAKEDA : Central rotation curves of spiral galaxies. *The Astrophysical Journal*, 523(1):136, sep 1999.
- [93] J. M. SOURIAU : *Géométrie et relativité*. Hermann, 1964.
- [94] J. M. SOURIAU : Prolongements du champ de Schwarzschild. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93:193–207, 1965.
- [95] J. M. SOURIAU : *Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics*. Birkhäuser Verlag, 1997.
- [96] A. J. M. SPENCER : *Continuum Mechanics*. Dover Publications, Mineola, 1992.
- [97] O. C. STOICA : On singular semi-Riemannian manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 11, 2014.
- [98] K.S. THORNE, J.A. WHEELER et C.W. MISNER : *Gravitation*. 1973.
- [99] R. TOLMAN : *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford at the Clarendon Press, 1934.
- [100] Michael TSAMPARLIS : On the Palatini method of variation. *Journal of Mathematical Physics*, 19(3):555–557, 1978.
- [101] R. WALD : *General relativity*. 1984.

- [102] R.H. WECHLER, J.S. BULLOCK, J.R. PRIMACK, A.V. KRAVTSOV et A. DEKEL : Concentrations of dark halos from their assembly histories. *The Astrophysical Journal*, 568:52–70, 2002. <https://doi.org/10.1086/338765>.
- [103] S. WEINBERG : *The Quantum Theory of Fields*, volume 1-3. Cambridge University Press, 2000.