

Chapitre V

Une méthode
de
quantification

§ 18 QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE

VARIÉTÉS QUANTIQUES

(18.1) Nous appellerons *tore*, et nous noterons T , le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 ; T peut être considéré comme groupe de Lie, compact, de dimension 1, dont l'algèbre de Lie est constituée par les nombres imaginaires purs ; si $z \in T$, il existe un nombre réel s tel que

$$z = \exp(is)$$

s est défini modulo l'addition d'un multiple entier de 2π . ■

— Soit Y une variété séparée ; $\xi \mapsto \varpi$ un champ différentiable de 1-formes défini sur Y (Fig. 18.1) ; si les axiomes suivants sont vérifiés

(18.2)

| |
|--|
| $\diamond \quad \dim(\ker(\nabla\varpi)) \equiv 1$ $\heartsuit \quad \dim(\ker\varpi \cap \ker\nabla\varpi) \equiv 0$ |
|--|

on dit que le champ $\xi \mapsto \varpi$ donne à Y une *structure de contact*.
Posons

(18.3)

| |
|------------------------------|
| $\sigma \equiv \nabla\varpi$ |
|------------------------------|

P

(18.4)

σ est une 2-forme, dont on sait que le rang est pair (8.9) ; la condition (18.2 \diamond) indique donc que *la dimension de Y est impaire* (en tout point ξ).

(18.5)

Puisque $\dim(\ker(\sigma))$ est constante, Y est une variété *présymplectique* (9.8) ; ses *feuilles* sont des courbes (lignes de force).

— Supposons que ces courbes soient fermées ⁽¹⁾ ; en utilisant les règles du calcul des variations, appliquées au lagrangien $\varpi \dot{\xi}$, on peut montrer que l'intégrale d'action

(18.6)

$$a = \oint \varpi \frac{d\xi}{ds} ds,$$

⁽¹⁾ Au sens usuel du terme (homéomorphes à T).

prise sur la feuille passant par un point ξ_0 , vérifie $\partial a / \partial \xi_0 = 0$; elle est donc constante sur chaque composante connexe de Y (15.71, 72); nous dirons que Y est une variété quantique si $a \equiv 2\pi$.

Nous allons formuler cette définition d'une façon plus précise et plus adéquate en introduisant le vecteur $i_Y(\xi)$ défini (grâce aux conditions (18.2)) par les deux équations linéaires

$$(18.7) \quad \begin{cases} \sigma(i_Y(\xi)) \equiv 0 \\ \varpi(i_Y(\xi)) \equiv 1 \end{cases}$$

La première condition montre que $i_Y(\xi)$ est tangent à la ligne de force qui passe par ξ ; la seconde précise sa grandeur.

En utilisant une carte canonique (10.9), on vérifie que i_Y est un champ différentiable de vecteurs; si on choisit un point ξ_0 de V , et si on considère le point $\xi \equiv \exp(s i_Y)(\xi_0)$ (notation (3.1)) l'application $s \mapsto \xi$ vérifie $\partial \xi / \partial s \equiv i_Y(\xi)$; on en déduit que ξ varie sur la ligne de force passant par ξ_0 ; en utilisant ce paramètre s pour calculer l'intégrale d'action (18.6), on constate qu'on a fait un « tour complet » pour $s = 2\pi$; c'est-à-dire que $s \mapsto \xi$ est périodique, de période 2π ; d'où l'énoncé récapitulatif :

(18.8) Nous appellerons *variété quantique* une variété séparée Y telle que :
 a) Il existe sur Y un champ différentiable de 1-formes $\xi \mapsto \varpi$ qui lui donne une structure de contact (18.2) :

$$\begin{cases} \diamond \dim(\ker \sigma) \equiv 1 & [\sigma \equiv \nabla \varpi] \\ \heartsuit \dim(\ker(\varpi) \cap \ker(\sigma)) \equiv 0. \end{cases}$$

b) Le tore T (18.1) opère sur Y (6.4); on a ⁽¹⁾

$$(18.9) \quad \begin{cases} \text{C} \quad \underline{z}_Y(\xi) = \xi \iff z = 1 & [z \in T] \\ \clubsuit \quad \sigma(i_Y(\xi)) \equiv 0 \\ \spadesuit \quad \varpi(i_Y(\xi)) \equiv 1 \end{cases}$$

Notons aussi la formule

$$(18.9) \quad z = e^{is} \in T \implies \underline{z}_Y = \exp(s i_Y)$$

⁽¹⁾ Notations \underline{z}_Y, i_Y : voir (6.4), (6.11).

et le fait que la structure de variété quantique est entièrement définie par la structure de variété et par la forme ϖ ; puisque la façon dont T opère s'en déduit par les formules (18.8 \clubsuit), (18.8 \spadesuit), (18.9).

En utilisant le fait que les lignes de force — qui sont les orbites de T — sont compactes, on peut montrer que le feuilletage de Y est séparable; par conséquent l'ensemble U des lignes de force possède une structure de variété symplectique (Théorème (9.10)) dont la forme de Lagrange σ est définie par

$$(18.10) \quad \sigma(dx)(\delta x) \equiv \sigma(d\xi)(\delta \xi)$$

$\xi \mapsto x$ désignant la projection de Y sur U (Fig. 18.1).

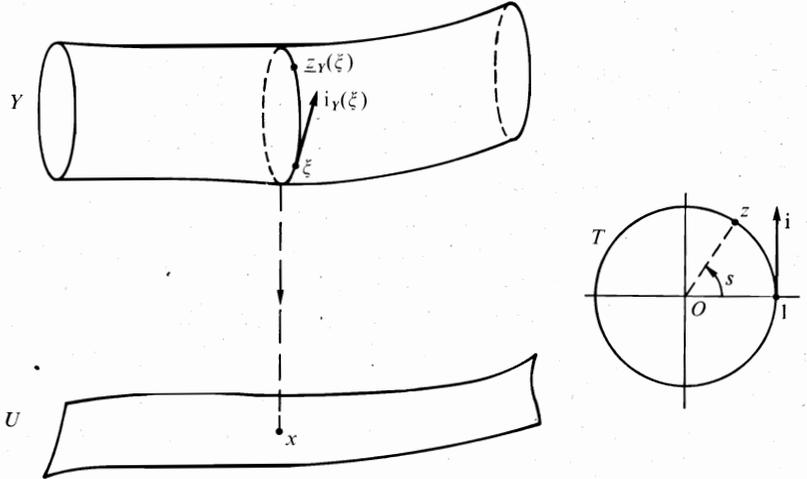


Fig. 18.1.

(18.11) Nous dirons que U est la base de la variété quantique Y ⁽¹⁾; la dimension de U est inférieure d'une unité à celle de Y .

(18.12) On peut montrer que la variété U est séparée, et que l'application $\xi \mapsto x$ est étalée (16.26); et, plus précisément, que l'image réciproque par $\xi \mapsto x$ d'un compact de U est un compact de Y ⁽²⁾.

QUANTIFICATION D'UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE

(18.13) Soit inversement U une variété symplectique séparée; nous appellerons quantification de U la construction d'une variété quantique Y , et d'un

⁽¹⁾ On dit que Y est un espace fibré principal, de base U , de groupe structural T ; mais nous n'utiliserons pas ici la théorie générale des espaces fibrés.
⁽²⁾ On dit que cette application est propre (voir Bourbaki, Topologie générale).

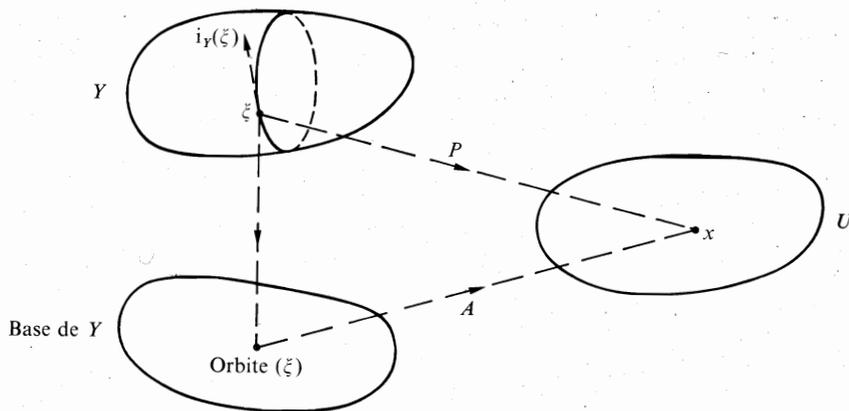


Fig. 18.II.

symplectomorphisme A de la base de Y avec U (Fig. 18.II); si l'on pose $x \equiv A(\text{orbite}(\xi))$, $P = [\xi \mapsto x]$, on a :

| |
|---|
| Y est une variété quantique |
| P est une application différentiable de Y dans U |
| $\ker(D(P)(\xi))$ est engendré par $i_Y(\xi) \quad \forall \xi \in Y$ |
| $x \in U \Rightarrow P^{-1}(x)$ est une orbite de T (opérant sur Y) |
| $\sigma_Y(d\xi)(\delta\xi) \equiv \sigma_U(dx)(\delta x) \quad [x \equiv P(\xi)]$ |

(18.14)

(18.15)

Réciproquement, si on construit une variété quantique Y et une application P vérifiant (18.14), on constate qu'il existe un symplectomorphisme A entre la base de Y et U , tel que $P(\xi) \equiv A(\text{orbite}(\xi))$; quantifier une variété symplectique séparée U , c'est donc construire un couple (Y, P) vérifiant les axiomes (18.14).

(18.16)

Lorsque ce problème admet une solution, nous dirons que U est quantifiable; notons que toute variété symplectomorphe à une variété quantifiable est quantifiable. ■

(18.17)

Il est évident que tout ouvert U_0 d'une variété quantifiable U est quantifiable : en effet Y_0 (image réciproque de U_0 par P) et l'application P_0 (restriction de P à Y_0) donnent une quantification de U . ■

(18.18)

— Si une variété U est une somme d'ouverts disjoints, on quantifie donc U en quantifiant séparément ces ouverts; en particulier, si U est

composée (16.8), on quantifiera séparément les ouverts où U a une dimension donnée (16.9).

— On peut démontrer le théorème :

(18.19)

Soit U une variété symplectique séparée; soit U_j un recouvrement de U par des ouverts tels que ⁽¹⁾

$$\begin{cases} U_j \text{ est simplement connexe;} \\ \text{la forme de Lagrange } \sigma \text{ de } U \text{ possède un potentiel } \varpi_j \text{ dans } U_j. \end{cases}$$

Si U est quantifiable, il existe des applications différentiables

$$x \mapsto z_{jk}$$

de chacun des $U_j \cap U_k$ (non vides) dans le tore T , telles que

◇

$$\varpi_k(dx) - \varpi_j(dx) \equiv \frac{dz_{jk}}{iz_{jk}} \quad \forall dx$$

♡

| | |
|-------------------------------|--|
| $x \in U_j$ | $\Rightarrow z_{jj} = 1$ |
| $x \in U_j \cap U_k$ | $\Rightarrow z_{jk} z_{kj} = 1$ |
| $x \in U_j \cap U_k \cap U_l$ | $\Rightarrow z_{jk} z_{kl} z_{lj} = 1$ |

(18.20)

Indiquons seulement comment on construit z_{jk} : dans l'ouvert Y_j , image réciproque de U_j par la projection $\xi \mapsto x$, on vérifie que la 1-forme ϖ'_j

$$\varpi'_j(d\xi) \equiv \varpi_j(dx) - \varpi(d\xi)$$

a une dérivée extérieure nulle, et que la dimension de son noyau est celle de U_j ; du fait que U_j est simplement connexe, on peut déduire que les feuilles du feuilletage caractéristique de ϖ'_j sont des sections transversales de Y_j ; soit Φ_j l'une d'elles. Si $x \in U_j \cap U_k$, on peut définir z_{jk} par la formule

(18.21)

$$z_{jk}(\xi_j) \equiv \xi_k$$

ξ_j et ξ_k étant les points de Φ_j et Φ_k qui se projettent en x .

⁽¹⁾ Il suffit de prendre un recouvrement par des morceaux (voir (1.47), (1.54), (4.37)).

Réciproquement, ces conditions sont *suffisantes* pour que U soit quantifiable; plus généralement ⁽¹⁾ :

Soit U une variété symplectique séparée; U_j un recouvrement de U ; supposons qu'il existe :

- (18.22) — des potentiels ϖ_j pour la forme σ , définis dans chacun des U_j ;
— des applications différentiables $x \mapsto z_{jk}$ de $U_j \cap U_k$ dans T , vérifiant (18.19 \diamond et \heartsuit).

Alors U est quantifiable.

On vérifie, sur l'ensemble des triplets

(18.23)
$$\begin{pmatrix} x \\ j \\ z \end{pmatrix} \quad x \in U_j, \quad z \in T$$

que la relation \sim :

(18.24)
$$\begin{pmatrix} x \\ j \\ z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x' \\ j' \\ z' \end{pmatrix} \iff \dot{x}' = x', \quad \frac{z'}{z} = z_{j'j}$$

est une équivalence (grâce à \heartsuit); si l'on appelle $A_j \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ la classe de $\begin{pmatrix} x \\ j \\ z \end{pmatrix}$ selon \sim ,

on vérifie que l'ensemble Y des classes possède une structure de variété séparée telle que les A_j soient des difféomorphismes de $U_j \times T$ à Y ; grâce à \diamond , on définit sur Y un champ $\xi \mapsto \varpi$ de 1-formes par

(18.25)
$$\varpi(d\xi) \equiv \frac{dz}{iz} + \varpi_j(dx) \quad \left[\xi \equiv A_j \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right]$$

On fait opérer le tore sur Y en posant

(18.26)
$$z'_Y \left(A_j \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right) \equiv A_j \begin{pmatrix} x \\ z'z \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾ On ne suppose plus les U_j simplement connexes.

on peut vérifier, sur ces définitions, les axiomes (18.8) : Y est bien une variété quantique; on constate enfin que l'application P définie par

(18.27)
$$P \left(A_j \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right) \equiv x$$

et Y vérifient les axiomes (18.14).

On dispose donc d'un algorithme pour reconnaître si une variété est quantifiable, et pour effectuer la quantification; nous allons traiter des exemples.

- (18.28) — Notons auparavant que les conditions de quantifiabilité (18.19) ne sont pas invariantes si l'on multiplie la forme σ par un scalaire quelconque (voir plus loin le cas de la sphère (18.35)); dans les exemples empruntés à la dynamique, les formules (13.13) d'analyse dimensionnelle montrent donc que la quantification dépend de l'unité de mesure choisie pour les actions; nous conviendrons de choisir la valeur (notée \hbar) :

(18.29)
$$1,0544 \cdot 10^{-27} \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

quotient par 2π de la constante de Planck ⁽¹⁾; l'interprétation physique de ce choix sera faite ultérieurement. ■

Quantification d'une variété potentielle

Si U est une variété symplectique *potentielle*, c'est-à-dire (9.14) s'il existe une 1-forme ϖ_U de U telle que

$$\sigma_U \equiv \nabla \varpi_U$$

on peut appliquer la règle (18.22), le recouvrement U_j étant réduit à un seul élément; ce qui donne immédiatement l'énoncé suivant :

Toute variété symplectique séparée *potentielle* U est *quantifiable*; on peut prendre comme variété quantifiante Y le produit direct $U \times T$, et poser

(18.30)
$$\left\{ \begin{array}{l} \varpi \left(\delta \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right) \equiv \frac{\delta z}{iz} + \varpi_U(\delta x) \quad (2) \\ z'_Y \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ z'z \end{pmatrix} \\ P \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \equiv x \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Il revient au même de dire que l'intégrale a (18.6) est égale à la constante de Planck.

⁽²⁾ Noter que ϖ n'est pas l'image réciproque de ϖ_U par la projection P .

(18.31) Ceci s'applique en particulier au cas où U est un *espace vectoriel symplectique* (9.4) ⁽¹⁾, [en particulier l'espace des mouvements d'un *point matériel non relativiste* (voir (13.22)), d'un *oscillateur harmonique* (12.150)]; ainsi qu'au *problème de Képler*, et, plus généralement, au *problème des n corps*, puisque nous connaissons pour ces problèmes, une forme potentielle (12.156).

Quantification d'une sphère S_2

Nous avons vu (11.40) que la sphère S_2 est munie d'une structure symplectique si l'on pose (λ étant une constante positive) :

$$(18.32) \quad \sigma(\mathbf{dx})(\delta\mathbf{x}) = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{dx} \times \delta\mathbf{x} \rangle \quad [\mathbf{x} \in R^3, \|\mathbf{x}\| = 1].$$

Les deux cartes F_+ , F_- définies en (1.11) ont pour ensembles de valeurs des ouverts U_+ U_- (S_2 privée de son pôle nord ou de son pôle sud) qui sont des morceaux (puisque F_+ et F_- sont définies sur R^2); on peut y définir des potentiels ϖ_+ , ϖ_- de σ par la formule

$$(18.33) \quad \boxed{\varpi_{\pm}(\mathbf{dx}) = \pm 2\lambda \frac{\alpha d\beta - \beta d\alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2}} \quad \left[\mathbf{x} \equiv F_{\pm} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right].$$

On peut appliquer la règle (18.19 \diamond); si la sphère est quantifiable, il existe une application $x \mapsto z$ (z) de $U_+ \cap U_-$ dans T telle que

$$(18.34) \quad \varpi_+(\mathbf{dx}) - \varpi_-(\mathbf{dx}) = \frac{dz}{iz}.$$

Sur l'équateur $\alpha \equiv \cos \varphi$, $\beta \equiv \sin \varphi$, F_+ et F_- coïncident; il résulte de (18.33) et de (18.34) la formule

$$2\lambda d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

d'où $z = z_0 e^{2i\lambda\varphi}$; puisque z prend la même valeur pour $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$, on voit que

(18.35) $\boxed{\text{La sphère } S_2 \text{ n'est pas quantifiable si } 2\lambda \text{ n'est pas entier (notation (18.32)).}$

(18.36) — Ce résultat montre en passant que *la sphère n'est pas une variété potentielle*: sinon, grâce à (18.30), elle serait quantifiable pour toute valeur de λ .

⁽¹⁾ Si x parcourt un espace vectoriel symplectique, $\varpi = \frac{1}{2}\sigma(x)$ est en effet un potentiel de σ .

⁽²⁾ z est écrit pour z_{-+} .

(18.37) — Nous allons voir que S_2 est bien quantifiable si 2λ est entier, non par la règle (18.22), mais par une méthode directe (nous verrons plus loin pourquoi ces procédés sont équivalents).

Désignons par Y la sphère à 3 dimensions, plongée dans l'espace C^2 , d'équation (notation (6.53m))

$$(18.38) \quad \boxed{\bar{\xi}\xi \equiv 1} \quad \left[\xi \equiv \begin{bmatrix} 1z \\ 2z \end{bmatrix}, \bar{\xi} \equiv [1\bar{z} \quad 2\bar{z}]; \quad 1z, 2z \in C \right]$$

munie de la 1-forme réelle ϖ :

$$(18.39) \quad \boxed{\varpi(\delta\xi) \equiv \frac{\bar{\xi}\delta\xi}{i}}.$$

On vérifie facilement les axiomes (18.8) des variétés quantiques, avec

$$(18.40) \quad \sigma(d\xi)(\delta\xi) \equiv 2 \operatorname{Re} \left(\frac{d\bar{\xi}\delta\xi}{i} \right) \quad \operatorname{Re} = \text{partie réelle.}$$

$$(18.41) \quad z_Y(\xi) \equiv \xi z \quad z \in T$$

$$(18.42) \quad i_Y(\xi) \equiv \xi i.$$

Introduisons les *matrices de Pauli* :

$$(18.43) \quad \boxed{\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

et posons

$$(18.44) \quad {}^j[P(\xi)] \equiv \bar{\xi} \cdot \sigma_j \cdot \xi \quad [j = 1, 2, 3].$$

On définit ainsi une application P de Y sur la sphère S_2 ⁽¹⁾; on peut vérifier les axiomes (18.14) si l'on a défini la structure symplectique de S_2 par la formule (18.32), avec $\lambda = 1/2$. ■

(18.45) Nous avons donc quantifié la sphère dans le cas $\lambda = 1/2$; la quantification pour [$2\lambda =$ entier quelconque] va résulter de la suite (18.47). ■

⁽¹⁾ En posant $\xi = \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix}$, on trouve $P(\xi) = \begin{pmatrix} 2(ac + bd) \\ 2(ad - bc) \\ a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \end{pmatrix}$, ce qui permet

de faire une vérification directe: pour une vérification moins artisanale, se reporter à la théorie générale des spineurs (par exemple, J.-M. Souriau, *Géométrie et relativité*, § 44).

Quantification par « fusion » ⁽¹⁾

(18.46) Soit (Y, P) une quantification d'une variété symplectique U (notation (18.15)); soit n un entier positif ou négatif (Fig. 18.III).

L'ensemble G des $e^{2\pi ip/n}$ ($p = 1, 2, \dots, |n|$) est un *groupe discret* de difféomorphismes de Y (1.44); si $\xi' \equiv \Phi(\xi)$ est la classe de ξ suivant G ⁽²⁾, on sait donc que le quotient $Y' = Y/G$ possède une structure de variété, et que le triplet (Y, G, Φ) définit un *revêtement* de Y' (1.45).

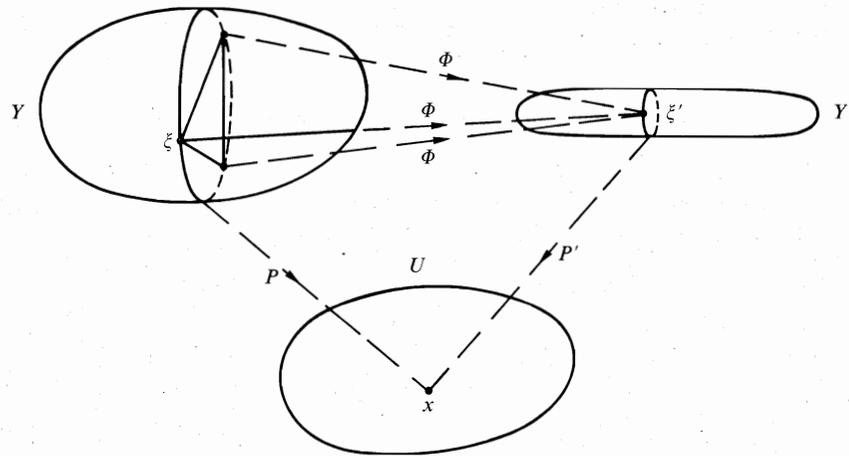


Fig. 18.III.

On vérifie que la forme $n\varpi$ est l'image réciproque, par Φ , d'une forme ϖ' de Y' , que ϖ' donne à Y' une structure de variété quantique, que l'application P peut se factoriser sous la forme $P' \circ \Phi$, et que le couple (Y', P') est une quantification de la variété U pour la structure symplectique obtenue en remplaçant σ_U par $n\sigma_U$; donc :

(18.47) Si une variété U est quantifiable, elle reste encore quantifiable quand on multiplie sa forme de Lagrange par un entier non nul.

(18.48) Par exemple, la sphère S_2 — dans le cas $\lambda = 1$ — se quantifie en identifiant deux points opposés $\xi, -\xi$ de la variété Y (18.38); la variété Y' ainsi obtenue s'appelle *espace projectif réel de dimension 3*.

⁽¹⁾ Nous empruntons ce terme à Louis de Broglie (voir par exemple, A. Visconti, *Théorie quantique des champs* (Gauthier-Villars, 1961)); il existe effectivement une analogie entre la construction de de Broglie et (18.46), bien qu'elle ne soit pas évidente.

⁽²⁾ $\Phi(\xi)$ peut être considéré comme l'ensemble des sommets d'un « polygone régulier » à $|n|$ côtés; ces points sont donc *identifiés* quand on passe au quotient.

Quantification d'un produit direct (Fig. 18.IV)

Soient U_j des variétés symplectiques, quantifiées respectivement par (Y_j, P_j) ($j = 1, 2, \dots, n$); désignons par ϖ_j les 1-formes quantiques des Y_j . On définit sur le produit direct Y des Y_j une 1-forme ϖ par

(18.49)
$$\varpi(\delta\xi) \equiv \sum_j \varpi_j(\delta\xi_j) \quad \xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

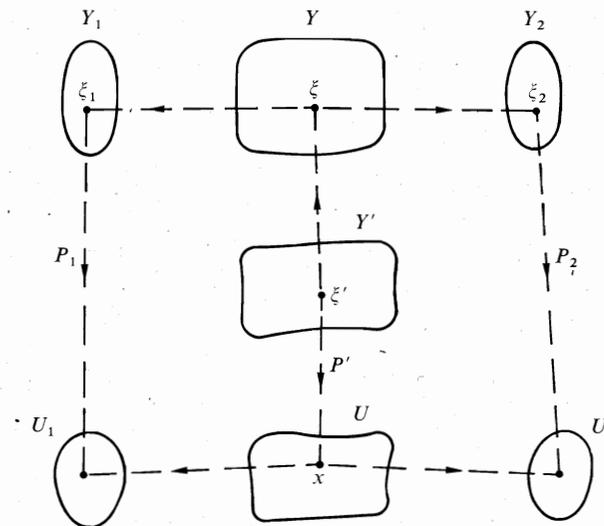
on vérifie que le *feuilletage caractéristique* de cette forme ϖ associe à chaque ξ l'espace vectoriel de dimension $n - 1$ des

(18.50)
$$\delta\xi_j = \lambda_j i_{Y_j}(\xi_j) \text{ (ne pas sommer)} \quad \left[\lambda_j \in \mathbb{R}, \sum_j \lambda_j = 0 \right]$$

donc qu'on décrit la feuille correspondante en faisant opérer le groupe

(18.51)
$$\xi_j \mapsto z_j i_{Y_j}(\xi_j) \quad [z_j \in T, z_1 z_2 \dots z_n = 1]$$

18.IV.



il en résulte que ce feuilletage est sécable, l'orbite ξ' de ξ selon (18.51) parcourant la variété quotient Y' ; on sait que ϖ est l'image réciproque d'une forme ϖ' de Y' (5.25); si on appelle P' l'application $\xi' \mapsto x \equiv \begin{pmatrix} P_1(\xi_1) \\ \dots \\ P_n(\xi_n) \end{pmatrix}$, on vérifie que

(18.52) (Y', P') quantifie le produit direct $U = U_1 \times \dots \times U_n$ (muni de sa structure symplectique produit (9.7)).

(18.53) Réciproquement, si un produit direct de variétés symplectiques est quantifiable, chacune l'est ; c'est un cas particulier du théorème suivant :

Soit U une variété quantifiable ; soit U_0 une variété plongée dans U , telle que :

(18.54) U_0 est définie par une équation (hypothèses (1.40)) ;

U_0 est symplectique pour la structure induite (9.29) .

Alors U_0 est quantifiable.

Soit $A(x) = y_0$ l'équation de U_0 (notation (1.40)) ; soit (Y, P) une quantification de U ; on vérifie que $A(P(\xi)) = y_0$ est l'équation d'une variété Y_0 plongée dans Y ; l'image réciproque ϖ_0 de ϖ par le plongement de Y_0 dans Y est une 1-forme ; on vérifie que ϖ_0 donne à Y_0 une structure de variété quantique (les orbites de T dans Y_0 sont d'ailleurs des orbites de T dans Y), et que (Y_0, P_0) est une quantification de U_0 , si l'on pose $P_0 = P \cdot 1_{Y_0}$.

(18.55) **Exemple:** Il résulte de la formule (14.48) que l'espace des mouvements d'une particule à spin non relativiste est le produit direct symplectique de l'espace des mouvements d'un point matériel (quantifiable selon (18.31)) par une sphère S_2 (avec la structure symplectique (18.32), λ étant égal à $-s$) ; le résultat (18.37) et la construction précédente (18.52) montrent que :

Une particule à spin non relativiste est quantifiable si (et seulement si) son spin est de la forme

(18.56) $\diamond \quad s = \frac{n}{2} \quad n \text{ entier } ^{(1)} .$

A cause de la convention (18.29), comme l'équation aux dimensions du spin est A (13.13), (14.50), cette formule (18.56) peut aussi s'écrire

(18.57) $s = n \frac{\hbar}{2} \quad n \text{ entier} .$

Nous allons étendre les résultats ci-dessus au cas de particules relativistes :

(18.58) Une particule relativiste sans spin est quantifiable (quelle que soit sa masse).

En effet, on voit selon (14.24a), (14.24e) que la forme de Lagrange de l'espace des mouvements U possède le potentiel ϖ_U :

$$\varpi_U(dx) = m\bar{X} dI$$

il suffit d'appliquer (18.30).

⁽¹⁾ Comme dans le cas de la sphère (18.36), il en résulte que la variété des mouvements n'est pas potentielle.

Quantification de la particule relativiste de spin 1/2

Nous allons utiliser les spineurs de Dirac ; on peut les définir comme les éléments ψ d'un espace euclidien complexe \mathcal{E} (Définition (6.51)), de dimension 4, possédant une base \mathcal{S} telle que

(18.59)
$$\bar{\mathcal{S}} \cdot \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Il sera commode de poser

(18.60)
$$\psi \equiv \mathcal{S} \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi'' \end{pmatrix}$$

ψ' et ψ'' sont des éléments de C^2 (appelés demi-spineurs, ou encore spineurs à deux composantes) ; la formule (18.59) pourra s'écrire

(18.61)
$$\bar{\psi}\psi \equiv \text{Re}(\bar{\psi}' \cdot \psi'') .$$

Introduisons les cinq opérateurs

(18.62)
$$\begin{aligned} \gamma_j &= \mathcal{S} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{bmatrix} \mathcal{S}^{-1} \quad (j=1, 2, 3; \sigma_j = \text{matrices de Pauli (18.43)}) . \\ \gamma_4 &= \mathcal{S} \begin{bmatrix} 0 & \underline{1} \\ \underline{1} & 0 \end{bmatrix} \mathcal{S}^{-1} \\ \gamma_5 &= \mathcal{S} \begin{bmatrix} -\underline{i} & 0 \\ 0 & +\underline{i} \end{bmatrix} \mathcal{S}^{-1} \end{aligned}$$

Choisissons un référentiel de Lorentz \mathcal{R} (13.41) pour l'espace de Minkowski E , et posons

(18.63)
$$\gamma(\mathcal{R}(x)) = \sum_{j=1}^4 \gamma_j \cdot x \quad \forall x \in R^4$$

ce qui associe à tout vecteur $X = \mathcal{A}x$ de E un opérateur linéaire $\gamma(X)$ de \mathcal{E} ; on vérifie que

(18.64)

$$\begin{aligned} \gamma(X)^2 &= \bar{X} \cdot X \cdot 1_{\mathcal{E}} \\ \gamma(X) \cdot \gamma_5 + \gamma_5 \cdot \gamma(X) &= 0 \\ \overline{\gamma(X)} &= \gamma(X) \\ \gamma_5^2 &= -1_{\mathcal{E}} \\ \overline{\gamma_5} &= \gamma_5 \end{aligned} \quad \forall X \in E$$

que les relations

(18.65)

$$\overline{\psi} \psi \equiv 1 \quad \overline{\psi} \gamma_5 \psi \equiv 0$$

équivalent à

(18.66)

$$\overline{\psi}' \psi'' = 1$$

et sont les équations (au sens (1.40)) d'une variété Σ , de dimension 6, plongée dans \mathcal{E} ; que les vecteurs I et J définis dans E par ⁽¹⁾

(18.67)

$$\begin{aligned} \bar{I} \cdot dX &= \overline{\psi} \cdot \gamma(dX) \cdot \psi \\ \bar{J} \cdot dX &= i \overline{\psi} \cdot \gamma(dX) \cdot \gamma_5 \cdot \psi \end{aligned} \quad \forall dX \in E$$

sont solutions des équations

(18.68)

$$\begin{aligned} \bar{I} \cdot I &= 1 & I \text{ vecteur de futur } ^{(2)} \\ \bar{I} \cdot J &= 0 \\ \bar{J} \cdot J &= -1 \end{aligned}$$

si $\psi \in \Sigma$;

(18.69)

Réciproquement, si I et J vérifient (18.68), qu'il existe des spineurs ψ dans Σ tels que (18.67); et, plus précisément, que ces spineurs forment une orbite du tore opérant sur Σ selon

(18.70)

$$\underline{z}_\Sigma(\psi) \equiv \psi z \quad z \in T.$$

⁽¹⁾ Les opérateurs $\gamma(dX)$ et $i\gamma(dX) \gamma_5$ sont hermitiens; de sorte que les seconds membres de ces formules (11.67) sont réels.

⁽²⁾ Le sens du futur étant celui du quatrième vecteur de \mathcal{A} .

On vérifie aussi, si ψ parcourt Σ , l'identité

(18.71)

$$\text{Re}(i d\overline{\psi} \cdot \delta\psi) = \frac{1}{4} \text{Tr}(d\Omega \cdot \Omega \cdot \delta\Omega)$$

en posant, comme en (14.4) \heartsuit

(18.72)

$$\Omega \equiv j(I)(J)$$

Ainsi, si l'on pose

(18.73)

$$y \equiv \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix} \quad \eta \equiv \begin{pmatrix} X \\ \psi \end{pmatrix}$$

on voit — par comparaison avec (14.4c) — que (18.67) définit une application différentiable

$$\eta \mapsto y$$

du produit direct $W = E \times \Sigma$ sur l'espace d'évolution V d'une particule à spin [(14.4c), (14.19), (Fig. 18.V)]; si l'on définit une 1-forme ϖ_W de W par

(18.74)

$$\varpi_W(\delta\eta) \equiv -i\overline{\psi} \delta\psi - m\bar{I} \delta X$$

m étant un nombre non nul, on constate donc que la dérivée $\sigma_W = \nabla\varpi_W$ est donnée par

(18.75)

$$\sigma_W(d\eta)(\delta\eta) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(d\Omega \Omega \delta\Omega) + m[\overline{dX} \delta I - \overline{\delta X} dI]$$

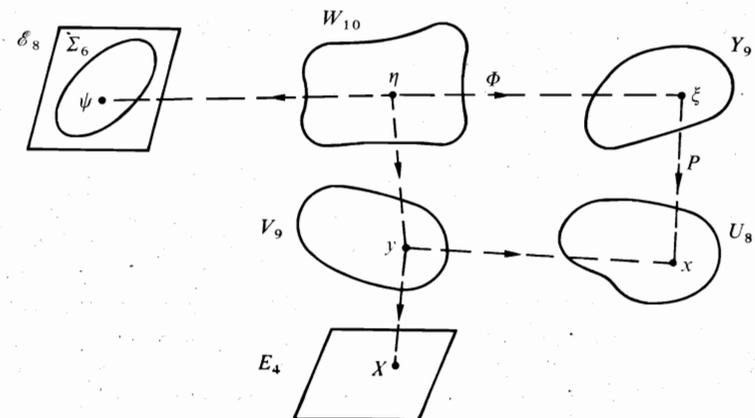


Fig. 18.V.

on reconnaît, au second membre, la forme de Lagrange (14.4 ⊕) d'une particule à spin, de masse m , de spin $s = 1/2$; on a donc

$$(18.76) \quad \sigma_W(d\eta) (\delta\eta) = \sigma(dx) (\delta x)$$

x étant le mouvement de la particule défini par la condition initiale y . On déduit de ce qui précède les feuilles du feuilletage caractéristique de ϖ_W ; ce sont les orbites du groupe additif R , opérant sur W selon

$$(18.77) \quad \underline{\lambda}_W \begin{pmatrix} X \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + I\lambda \\ \psi e^{im\lambda} \end{pmatrix}$$

ce feuilletage est sécable; si on pose

$$(18.78) \quad \xi \equiv \Phi(\eta) \equiv \text{orbite de } \eta \text{ suivant (18.77)}$$

ξ décrit donc une variété Y , telle que Φ soit une application différentiable de W sur Y ; ϖ_Y qui est un invariant intégral, passe au quotient, définissant une 1-forme ϖ de Y :

$$(18.79) \quad \varpi(d\xi) \equiv \varpi_W(d\eta) \quad ;$$

on vérifie enfin que :

$$(18.80) \quad \left[\begin{array}{l} \varpi \text{ donne à } Y \text{ une structure de variété quantique; } (Y, P) [P = (\xi \mapsto x)] \\ \text{est une quantification de } U. \end{array} \right.$$

Il va en résulter que

$$(18.81) \quad \left[\begin{array}{l} \text{La particule relativiste à spin (modèle (14.4)) est quantifiable si et} \\ \text{seulement si son spin est} \end{array} \right.$$

$$\diamond \quad s = n \frac{\hbar}{2}, \quad n \text{ entier.}$$

En effet :

- a) Si \diamond est vérifiée, la particule est quantifiable grâce à (18.80) et (18.47).
 b) Si la particule est quantifiable, on constate que l'ensemble U_0 des mouvements ayant une trajectoire donnée (14.4e) vérifie les conditions (18.54), et doit donc être quantifiable; et par ailleurs que U_0 est symplectomorphe à la sphère S_2 , munie de la structure (18.32), avec $\lambda = s$; la condition \diamond résulte alors de (18.35).

Quantification de la particule de masse nulle

Pour trouver une condition de quantificabilité, on peut utiliser les paramètres \mathbf{p} , \mathbf{r} définis en mécanique statistique (17.140); on trouve une variété U_0 , quantifiable si la particule l'est, et symplectomorphe à une sphère, en faisant

$$\|\mathbf{p}\| \equiv 1 \quad \mathbf{r} \equiv 0$$

dans (17.145); comme plus haut, on en déduit la condition nécessaire

$$(18.82) \quad s = n \frac{\hbar}{2} \quad n \text{ entier}$$

s désignant cette fois-ci le spin au sens (14.29 ⊙).

Masse nulle, spin 1/2

On utilisera encore un spineur ψ , parcourant la variété Σ (18.65)

$$(18.83) \quad \bar{\psi}\psi \equiv 1 \quad \bar{\psi}\gamma_5\psi \equiv 0$$

mais on posera cette fois-ci

$$(18.84) \quad \begin{array}{l} \bar{I}.dX \equiv \bar{\psi}\gamma(dX) \frac{1 + i\gamma_5}{\sqrt{2}} \psi \\ \bar{J}.dX \equiv -\bar{\psi}\gamma(dX) \frac{1 - i\gamma_5}{\sqrt{2}} \psi \end{array}$$

on vérifie les formules ⁽¹⁾

$$(18.85) \quad \begin{array}{l} \bar{I}.I \equiv 0 \quad I \text{ vecteur de futur} \\ \bar{I}.J \equiv -1 \\ \bar{J}.J \equiv 0 \end{array}$$

$$(18.86) \quad \text{Re}(i d\bar{\psi} \delta\psi) \equiv \frac{1}{4} \text{Tr}(d\Omega \cdot \Omega \cdot \delta\Omega)$$

⁽¹⁾ Faire la substitution $I \rightarrow \frac{I-J}{\sqrt{2}}$, $J \rightarrow \frac{I+J}{\sqrt{2}}$ dans les formules avec masse non nulle.

avec

$$(18.87) \quad \Omega \equiv j(I) (J) ;$$

en posant

$$(18.88) \quad y \equiv \begin{pmatrix} X \\ I \\ J \end{pmatrix} \quad \eta \equiv \begin{pmatrix} X \\ \psi \end{pmatrix}$$

et

$$(18.89) \quad \varpi_W(\delta\eta) \equiv -\chi i\bar{\psi} \delta\psi - \theta\bar{I} \delta X \quad (\chi = \pm 1, \theta = \pm 1)$$

on constate que $\eta \mapsto y$ est une application de $W = E \times \Sigma$ sur la variété V définie en (14.29c), et que la dérivée extérieure $\sigma_W \equiv \nabla\varpi_W$ vérifie

$$(18.90) \quad \sigma_W(d\eta) (\delta\eta) \equiv \sigma(dx) (\delta x)$$

x désignant le mouvement (caractérisé par y) d'une *particule de masse nulle, de spin* $s = 1/2$, d'*hélicité* χ , ayant θ comme *signe de l'énergie* (14.29). En utilisant les

notations $X \equiv \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix}$, $\psi \equiv \mathcal{S} \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi'' \end{pmatrix}$ [(13.40), 18.60)], (18.89) s'écrit aussi

$$(18.91) \quad \varpi_W(\delta\eta) \equiv \chi \operatorname{Re} (-i\bar{\psi}'' \delta\psi') - \frac{\theta}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}' \psi' \delta t - \bar{\psi}' \sigma_j \psi' \delta \mathbf{r}^j]$$

On en déduit facilement que le feuilletage caractéristique de ϖ_W est constitué de *variétés affines de dimension 3*, plongées dans $E \times \mathcal{E}$, sur lesquelles ψ' est constant (elles sont donc plus simples à décrire que leurs projections sur V , qui sont données en (14.29e)); elles ont une section transversale commune Y , définie (cf. (17.140)) par les équations

$$(18.92) \quad \begin{cases} t = 0 \\ \mathbf{g}_X = 0 \end{cases} \quad (X \text{ appartient à la trajectoire relative à } \mathcal{R}, \text{ au sens (14.33)})$$

on constate que Y est une variété de dimension 7, que l'on peut décrire par la variable

$$(18.93) \quad \xi \equiv \begin{pmatrix} \psi' \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad \psi' \neq 0$$

on a alors

$$(18.94) \quad \begin{array}{l} \psi'' \equiv \frac{\psi'}{\|\psi'\|^2} \\ j\mathbf{p} = \frac{\theta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}' \sigma_j \psi' \quad (\mathbf{p} = \text{impulsion}) \\ E = \frac{\theta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}' \psi' \quad (E = \text{énergie}) \end{array}$$

la forme ϖ induite par ϖ_W sur Y est

$$(18.95) \quad \varpi(\delta\xi) \equiv \chi \operatorname{Re} (-i\bar{\psi}'' \delta\psi') + \langle \mathbf{p}, \delta\mathbf{r} \rangle$$

(18.96) [En comparant avec (17.145), on vérifie que Y *quantifie* la particule; il revient évidemment au même de définir Y comme *quotient* de W par le feuilletage caractéristique de ϖ_W .

Masse nulle, spin 1

(18.97) On peut passer au cas du spin 1, et plus généralement du spin $n/2$ (n entier) par la méthode de fusion (18.46); en raison de son importance (cas des photons), nous allons quantifier directement le cas $s = 1$.

On choisira la variable

$$(18.98) \quad \eta \equiv \begin{pmatrix} S \\ P \\ X \end{pmatrix}$$

où S désigne une base orthonormale d'un sous-espace négatif de dimension 2 :

$$(18.99) \quad S \equiv [S_1 \quad S_2] \quad \bar{S} \cdot S \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

telle que (voir (14.17))

$$(18.100) \quad \Omega \equiv S \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{S}$$

l'impulsion-énergie P vérifie (θ étant le signe de l'énergie) :

$$8.101) \quad \boxed{\bar{P} \cdot P = 0 \quad \theta P = \text{vecteur de futur}}$$

et

$$8.102) \quad \boxed{\bar{P} \cdot S_1 = 0 \quad \bar{P} \cdot S_2 = 0}$$

Ces équations (18.99) à (18.102) font décrire à η une variété W de dimension 10, sur laquelle on définit une 1-forme ϖ_W par

$$8.103) \quad \boxed{\varpi_W(\delta\eta) \equiv \chi \bar{S}_2 \delta S_1 - \bar{P} \delta X}$$

On vérifie facilement que le groupe de Lie de dimension 3 des matrices

$$8.104) \quad a \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ \beta & -\alpha & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

(appelé parfois *groupe de Heisenberg*), opère sur W selon

$$8.105) \quad a_W \begin{pmatrix} S \\ P \\ X \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} S + P[\beta & -\alpha] \\ P \\ X + S \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + P\gamma \end{pmatrix}$$

et que ses orbites (de dimension 3) sont les feuilles du feuilletage caractéristique de la forme ϖ_W ; on vérifie que ce feuilletage est sécable (les équations (18.92) donnent une section transversale pour toutes les feuilles).

$$8.106) \quad \left[\begin{array}{l} \text{La forme } \varpi_W \text{ induit sur le quotient } Y \text{ (de dimension 7) une forme } \varpi \text{ qui} \\ \text{fait de } Y \text{ une variété quantique.} \\ Y \text{ quantifie la particule de masse nulle, de spin 1, d'hélicité } \chi, \text{ ayant } \theta \\ \text{comme signe de l'énergie.} \end{array} \right.$$

VARIÉTÉS DE PLANCK

$$(18.107) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Soit } Y \text{ une variété quantique. Nous appellerons } \textit{variété de Planck} \text{ toute} \\ \text{variété } \Phi \text{ plongée dans } Y, \text{ sur laquelle la forme } \varpi \text{ s'annule :} \end{array} \right.$$

$$[\delta\xi \text{ tangent à } \Phi \text{ en } \xi] \Rightarrow [\varpi(\delta\xi) = 0].$$

Il revient au même de dire que l'*image réciproque* de ϖ par le *plongement* de Φ dans Y est nulle; en appliquant le théorème (4.36), il en résulte que l'*image réciproque* de $\sigma \equiv \nabla\varpi$ par le plongement est aussi nulle :

$$(18.108) \quad [d\xi, \delta\xi \text{ tangents à } \Phi \text{ en } \xi] \Rightarrow [\sigma(d\xi)(\delta\xi) = 0]$$

c'est-à-dire que

$$(18.109) \quad \left[\text{toute variété de Planck est } \textit{isotrope} \text{ (Définition (9.33)).} \right.$$

$$(18.110) \quad \left[\begin{array}{l} \text{— Supposons que } (Y, P) \text{ soit une quantification d'une variété symplectique } U, \\ \text{et que } \Phi \text{ soit une variété de Planck plongée dans } Y. \end{array} \right.$$

On vérifie immédiatement que l'application linéaire tangente à la restriction de P à Φ :

$$D(P \cdot 1_\Phi)(\xi)$$

est régulière; localement (c'est-à-dire dans chaque ouvert d'un certain recouvrement de Φ) $P \cdot 1_\Phi$ est régulier (Théorème (1.35)).

$$(18.111) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Si } P \cdot 1_\Phi \text{ est globalement régulier, } P \cdot 1_\Phi \text{ est un } \textit{plongement} \text{ (1.36) de } \Phi \text{ dans } U; \\ \text{son ensemble de valeurs } F \text{ possède une structure de variété plongée dans } U \text{ (Théo-} \\ \text{rème (1.38)), difféomorphe à } \Phi; \text{ la comparaison de (18.108) et de (18.14) montre} \\ \text{que } F \text{ est } \textit{isotrope}; \text{ nous dirons que } \Phi \text{ est un } \textit{relèvement de Planck de la variété} \\ \textit{isotrope } F. \blacksquare \end{array} \right.$$

Réciproquement, si F est une variété isotrope de U , pour en rechercher un relèvement de Planck, il suffit de remarquer que l'on obtient un *feuilletage de l'image réciproque de F par P* au moyen des équations

$$(18.112) \quad dx \text{ tangent à } F, \quad \varpi(d\xi) = 0$$

et que la variété de Planck cherchée doit être une variété intégrale de ce feuilletage; il suffit donc de chercher si P est régulier sur les feuilles. ■

De même, si l'on connaît un *feuilletage isotrope*

$$x \mapsto H$$

de U , les équations

$$(18.113) \quad [d\xi \in \mathcal{H}] \Leftrightarrow [dx \in H, \varpi(d\xi) = 0]$$

définissent un feuilletage $\xi \mapsto \mathcal{H}$ de Y ; les feuilles de \mathcal{H} sont — au moins localement — les relèvements de Planck de feuilles de H . ■

QUANTOMORPHISMES

Soient Y et Y' deux variétés, rendues quantiques par les 1-formes ϖ et ϖ' ; α un difféomorphisme de Y sur Y' (Fig. 18. VI); nous dirons que α est un *quantomorphisme* si l'image par α de ϖ est la forme ϖ' :

18.114)

$$[\xi' \equiv \alpha(\xi)] \Rightarrow [\varpi'(\delta\xi') \equiv \varpi(\delta\xi)].$$

Comme leur nom l'indique, les *quantomorphisms* sont les isomorphismes de la structure de variété quantique; grâce à (18.8, 9), on constate que (18.114) entraîne

(18.115)

$$\alpha(z_Y(\xi)) \equiv z_{Y'}(\alpha(\xi)) \quad [z \in T].$$

— Si Y et Y' quantifient des variétés symplectiques U et U' (par le moyen des projections P et P'), la formule (18.115) montre que α descend sur U et U' , c'est-à-dire qu'il existe une application $\hat{\alpha}$ définie par

18.116)

$$\hat{\alpha}(P(\xi)) \equiv P'(\alpha(\xi))$$

on vérifie que $\hat{\alpha}$ est un *symplectomorphisme* de U sur U' .

18.117)

— Supposons en particulier que $U = U'$, et qu'il existe un quantomorphisme α tel que $\hat{\alpha} = 1_U$: nous dirons dans ce cas que (Y, P) et (Y', P') sont des *quantifications équivalentes* de la variété symplectique U (il suffit en effet, dans ce cas, d'identifier ξ et $\alpha(\xi)$ pour que ces quantifications soient les mêmes).

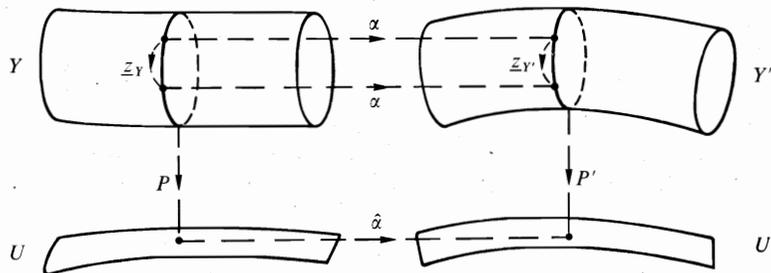


Fig. 18. VI.

(18.118) Nous dirons qu'une variété U est *monoquantifiable* si elle est quantifiable et si toutes ses quantifications sont équivalentes ⁽¹⁾. ■

(18.119) Soit (Y, P) une quantification d'une variété symplectique U ; désignons par $\text{Quant}(Y)$ l'ensemble des quantomorphisms de Y à Y (Fig. 18. VII), et par P^* l'application $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ (18.116) qui fait descendre sur U un élément α de $\text{Quant}(Y)$:

(18.120)

$$P^*(\alpha)(P(\xi)) = P(\alpha(\xi)) \quad [\forall \xi \in Y].$$

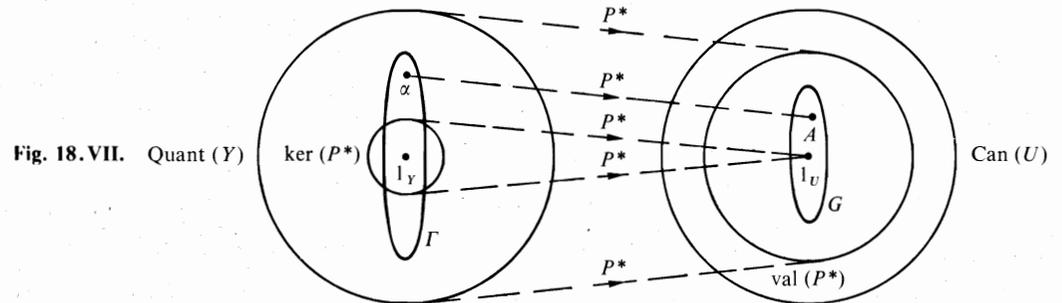


Fig. 18. VII.

(18.121) Il est clair que $\text{Quant}(Y)$ est un *groupe*, et que P^* est un *homomorphisme* de ce groupe dans le groupe $\text{Can}(U)$ des symplectomorphisms de U :

$$P^*(\alpha \circ \alpha') \equiv P^*(\alpha) \circ P^*(\alpha').$$

(18.122)

— Le *noyau* $\ker(P^*) = P^{*-1}(1_U)$ est un *sous-groupe invariant* de $\text{Quant}(Y)$; si U est *connexe*, on vérifie que $\ker(P^*)$ se réduit à l'ensemble des z_Y (z parcourant le tore).

(18.123)

— Si $A = P^*(\alpha)$, nous dirons que le quantomorphisme α est un *relèvement* de A , et que le symplectomorphisme A est *relevable* (à Y); l'ensemble $\text{val}(P^*)$ des symplectomorphisms relevables est un *sous-groupe* de $\text{Can}(U)$. ■

(18.124)

— Si Γ est un *groupe de quantomorphisms* de Y , son image G par P est un *groupe de symplectomorphisms* de U ; nous dirons alors que Γ est un *relèvement* de G , et que G est *relevable*; on dira que Γ est un *relèvement isomorphe* si P^* est injectif sur Γ , c'est-à-dire si $\Gamma \cap \ker(P^*)$ est réduit à 1_Y ; alors P^* induit un *isomorphisme* de Γ sur G .

(18.125)

— Pour qu'un groupe de symplectomorphisms de U soit *relevable*, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans $\text{val}(P^*)$; mais il ne possède pas nécessairement de *relèvement isomorphe*.

⁽¹⁾ Exemples : ci-dessous (18.130), (18.134), (18.135).

3.126) Soit Γ un relèvement isomorphe d'un groupe G .
On vérifie trivialement l'équivalence des propositions a) et b) :

- a) Γ est aussi un relèvement isomorphe de G .
b) Il existe un homomorphisme K de G dans $\ker(P^*)$ tel que
- $$[\gamma' \in \Gamma'] \Leftrightarrow [\exists \gamma \in \Gamma; \gamma' = K(P^*(\gamma)) \cdot \gamma]$$

si de plus U est connexe, on voit grâce à (18.122) que l'on peut mettre K sous la forme

$$3.127) \quad K(g) = \underline{\chi(g)}_Y \quad [\forall g \in G]$$

χ étant un homomorphisme de G dans le tore T , c'est-à-dire un caractère de G .

3.128) Alors les divers relèvements isomorphes de G sont mis en correspondance bijective avec les divers caractères de G .

3.129) — Si U est monoquantifiable, tout symplectomorphisme A de U est relevable : en effet, on vérifie que $(Y, A \cdot P)$ est une quantification de U , donc équivalente à (Y, P) , et que le quantomorphisme α qui fait passer d'une quantification à l'autre est un relèvement de A .

HOMOTOPIE ET QUANTIFICATION

THÉORÈME

3.130) Soit U une variété quantifiable et simplement connexe (1.53).
Alors U est monoquantifiable.

Le lecteur trouvera une démonstration de ce théorème dans la référence ci-dessous ⁽¹⁾; on peut aussi le déduire de la théorie générale de l'homologie des espaces fibrés.

THÉORÈME (Fig. 18.VIII) :

Soit (U, G, F) un revêtement (Définition (1.42)) d'une variété symplectique U' .

3.131) 1) Si U' possède une quantification (Y', P') , on obtient une quantification (Y, P) de U par les constructions suivantes :

⁽¹⁾ J.-M. Souriau, *Géométrie de l'espace de phases, calcul des variations et mécanique quantique*. Tirage ronéotypé, Faculté des Sciences de Marseille (1965).

$$(18.131) \quad \left[\begin{array}{l} Y = \text{variété plongée dans } Y' \times U, \text{ parcourue par la variable } \xi \equiv \begin{pmatrix} \xi' \\ x \end{pmatrix} \\ \text{vérifiant l'équation } P'(\xi') \equiv F(x) \quad [\xi' \in Y', x \in U]; \\ \diamond \quad \begin{array}{l} \varpi_Y(\delta\xi) \equiv \varpi_{Y'}(\delta\xi'); \\ P(\xi) \equiv x; \end{array} \end{array} \right.$$

De plus, le groupe G possède un relèvement isomorphe Γ (18.124), ensemble des γ

$$\heartsuit \quad \gamma \begin{pmatrix} \xi' \\ x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi' \\ g(x) \end{pmatrix} \quad [g \in G].$$

2) Supposons réciproquement que U possède une quantification (Y, P) , et que le groupe G possède un relèvement isomorphe Γ sur Y .

Alors Γ est un groupe discret de Y ; on obtient une quantification (Y', P') de U' par la construction suivante :

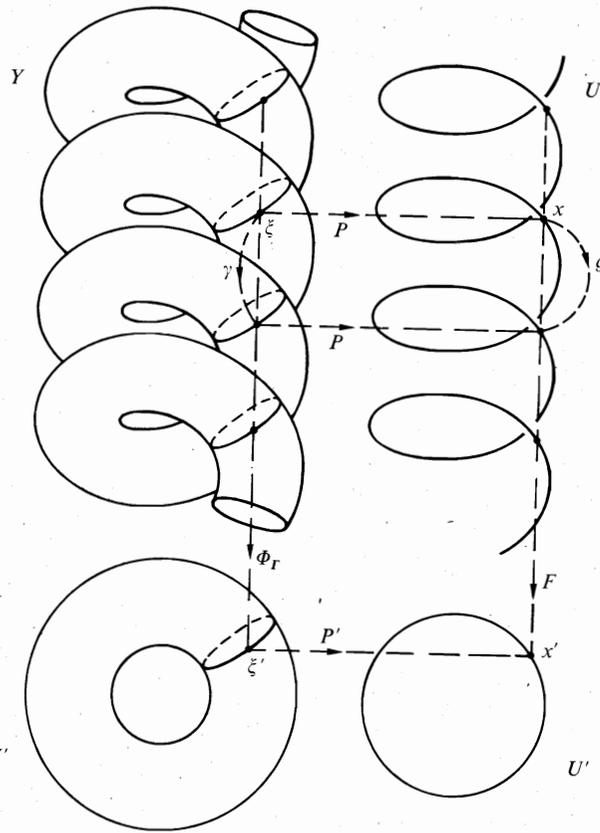
$$\clubsuit \quad \left[\begin{array}{l} Y' = \text{variété quotient de } Y \text{ par } \Gamma \text{ (Définition (1.45));} \\ \varpi_{Y'}(\delta\xi') \equiv \varpi_Y(\delta\xi) \quad [\xi' \equiv \text{orbite de } \xi \text{ selon } \Gamma] \\ P'(\xi') \equiv F(x). \end{array} \right.$$

La vérification est élémentaire.

(18.132) Les théorèmes (18.130) et (18.131) permettent de recenser les quantifications non isomorphes d'une variété quantifiable donnée U' : supposons U' connexe, cas auquel on se ramène immédiatement grâce à (18.18) ; soit (U, G, F) un revêtement universel de U' (1.55) ; à toute quantification (Y', P') de U' , le théorème (18.131, 1^o) permet d'associer une quantification (Y, P) de U , telle que G possède un relèvement isomorphe Γ . Comme U est simplement connexe (1.55), le théorème (18.130) montre que la quantification de U est unique, à une équivalence près ; on vérifie facilement que deux quantifications équivalentes de U' conduisent à un même relèvement Γ de G sur Y ; ainsi, les quantifications de U' obtenues par (18.131, 1^o) à l'aide des divers relèvements isomorphes de G sont deux à deux non équivalentes, et toute quantification de U' est équivalente à l'une d'elles.

En appliquant (18.128), on voit donc que :

(18.133) Une variété connexe quantifiable U' possède autant de quantifications non équivalentes qu'il existe de caractères distincts de son groupe d'homotopie G .



En particulier, on peut compléter (18.130) par l'énoncé :

34) Pour qu'une variété quantifiable soit monoquantifiable, il faut et il suffit que le groupe d'homotopie de chacune de ses composantes n'ait pas d'autre caractère que le caractère trivial ($\chi(g) \equiv 1$).

Exemples

35) On peut vérifier que la sphère S_2 , que tout espace vectoriel symplectique, que tout espace des mouvements d'une particule libre (avec ou sans spin, relativiste ou non, de masse nulle ou non) est simplement connexe; ces variétés sont donc monoquantifiables quand elles sont quantifiables; par conséquent, l'aspect disparate des moyens que nous avons mis en œuvre pour les quantifier n'a pas d'importance puisque toute autre méthode aurait conduit à une quantification équivalente ⁽¹⁾. ■

⁽¹⁾ Ainsi, si l'on avait quantifié la particule relativiste de spin 1/2 par l'algorithme (18.22), le résultat aurait été indépendant du recouvrement choisi, et équivalent à celui que l'on obtient en utilisant des spineurs (18.80).

Systèmes de particules élémentaires

Considérons un système de n particules sans interactions. ■

(18.136) Si ces particules sont différentes, on sait que l'espace des mouvements est le produit direct $U_1 \times \dots \times U_n$ des espaces des mouvements respectifs des particules (15.37); c'est un espace quantifiable (18.52) [si les doubles de tous les spins sont entiers] et simplement connexe (1.60), donc monoquantifiable. ■

Si les particules sont indiscernables, l'espace U' des mouvements du système possède un revêtement (U, S_n, F) , où U est un ouvert de

$$U_1 \times \dots \times U_n = [U_1]^n,$$

et S_n le groupe des permutations des n particules (voir (15.46)); U est quantifiable (18.17); on peut montrer que U est simplement connexe, donc que S_n est le groupe d'homotopie de U' . Sachant que le groupe S_n (dit « groupe symétrique ») possède exactement deux caractères χ_+ et χ_- :

$$(18.137) \quad \begin{cases} \chi_+(P) = 1 \text{ quelle que soit la permutation } P \in S_n \\ \chi_-(P) = \text{parité de } P \text{ }^{(1)} \end{cases}$$

on voit donc que :

(18.138) Un système de n particules indiscernables sans interactions ($n \geq 2$) possède exactement 2 quantifications non équivalentes ⁽²⁾, associées (par (18.132), (18.133)) aux caractères χ_+ , χ_- du groupe symétrique S_n ; nous les appellerons respectivement : quantification de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac. ■

QUANTOMORPHISMES INFINITÉSIMAUX

(18.139) Soit (Y, P) une quantification d'une variété symplectique U ; u une variable dynamique de U (9.15) : $x \mapsto u$ est un champ scalaire différentiable sur U .

⁽¹⁾ χ_- est défini par la propriété [$\chi_-(P) = -1$ si P est un échange de deux particules], puisque toute permutation est un produit d'échanges et que χ_- est un caractère.

⁽²⁾ Comme précédemment, la quantification n'est possible que si le double du spin est un entier; mais la géométrie ne fournit pas la relation entre le spin et le caractère χ que suggère l'expérience.

Nous associerons à u un champ de vecteurs de Y , $\xi \mapsto \delta \xi$, défini par les équations

$$\begin{cases} \varpi(\delta \xi) \equiv u \\ \sigma(\delta \xi) \equiv -\nabla u \end{cases}$$

les axiomes (18.2) montrent que ce système d'équations linéaires en $\delta \xi$ a bien une solution et une seule; en posant $x \equiv P(\xi)$, on vérifie que

$$\delta x = \text{grad } u$$

grad désignant le gradient symplectique sur U : la notation δ est compatible avec celle que nous avons déjà utilisée en (9.20).

Notons que

$$\delta_{u+u'} \xi \equiv \delta \xi + \delta \xi', \quad \delta_{su} \xi \equiv s \delta \xi \quad (s = \text{Cte}).$$

THÉORÈME

Soit $\xi \mapsto \delta \xi$ un champ de vecteurs différentiable sur la variété quantique Y (hypothèses (18.139)).

Pour que la dérivée de Lie $\delta_L \varpi$ soit nulle, il faut et il suffit qu'il existe une variable dynamique u de U telle que

$$\delta \xi \equiv \delta \xi.$$

En appliquant la formule de Cartan (4.39), on voit que $\delta_L \varpi \equiv 0$ s'écrit

$$\diamond \quad \sigma(\delta \xi) + \nabla[\varpi(\delta \xi)] \equiv 0$$

cette égalité est bien vérifiée si $\delta = \delta$ (18.140).

Réciproquement, si \diamond est vérifiée, et si on pose

$$u \equiv \varpi(\delta \xi)$$

on a $\sigma(\delta \xi) \equiv -\nabla u$; d'où (notation (18.7)) $[\nabla u](i_Y(\xi)) \equiv -\sigma(\delta \xi)(i_Y(\xi)) \equiv 0$; u est une intégrale première (5.22) du champ de vecteurs $\xi \mapsto i_Y(\xi)$; il existe donc un champ différentiable $x \mapsto u$ sur U ((5.21), (18.15)); comme les égalités (18.140) sont vérifiées, on a bien $\delta \xi \equiv \delta \xi$.

C.Q.F.D.

On déduit de ce résultat la formule

$$(18.144) \quad \boxed{[\delta, \delta] \xi \equiv \delta \xi} \quad \begin{cases} [u, v] = \text{crochet de Poisson} \\ [\delta, \delta] = \text{crochet de Lie} \end{cases}$$

qui étend (9.25) [exercice !].

DÉFINITION, THÉORÈME

Soit (Y, P) une quantification d'une variété symplectique U ; soit f un champ différentiable de vecteurs sur Y .

Nous dirons que f est un *quantomorphisme infinitésimal* si

$$\clubsuit \quad \exp(sf) \in \text{Quant}(Y) \quad [\forall s \in \mathbb{R}].$$

(18.145)

Pour que f soit un quantomorphisme infinitésimal, il faut et il suffit que

\diamond il existe une variable dynamique u , définie sur U , telle que f :

$$f(\xi) \equiv \delta \xi \quad (18.140);$$

\heartsuit il existe un nombre $\alpha \neq 0$ tel que $\exp(\alpha \hat{f})$ soit définie sur U toute entière, \hat{f} désignant le champ $x \mapsto \delta x$ de U .

Le théorème (3.7) qui sert à définir la dérivée de Lie montre que le champ de vecteur f est un quantomorphisme infinitésimal si — et seulement si —

$$\llcorner \begin{cases} \exp(sf) \text{ est définie sur } Y \text{ pour tout } s \\ \spadesuit \left\{ \begin{array}{l} \delta_L \varpi \equiv 0 \\ [\delta \xi \equiv f(\xi)] \end{array} \right. \end{cases}$$

le théorème (3.1c) montre que l'on peut remplacer \llcorner par :

$$\heartsuit \text{ il existe } \alpha \text{ tel que } \exp(\alpha f) \text{ soit définie sur } Y.$$

Le théorème (18.143) montre l'équivalence de \diamond et \spadesuit ; reste à montrer l'équivalence de \heartsuit et \heartsuit .

On a évidemment

$$\frac{d}{ds} [P(\exp(sf)(\xi))] \equiv \hat{f}(x) \quad \text{si } \exp(sf)(\xi) \text{ existe,}$$

ce qui montre que $\heartsuit \Rightarrow \heartsuit$.

Supposons réciproquement \heartsuit ; soit ξ_0 un point de Y , $x_0 = P(x_0)$; en utilisant les propriétés de compacité (16.16), (16.22), on peut partager l'intervalle $[0, \alpha]$ en un nombre fini d'intervalles dont les images par $s \mapsto \exp(sf)(x_0)$ sont contenues

chacune dans un seul des ouverts U_j simplement connexes, définis en (18.19), où σ_j possède un potentiel ϖ_j .

(18.130) montre l'existence d'un difféomorphisme A_j entre $T \times U_j$ et l'ouvert Y_j situé au-dessus de U_j , tel que

$$P\left(A_j\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}\right) \equiv x; \quad \varpi\left(\delta\left[A_j\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}\right]\right) \equiv \frac{\delta z}{iz} + \varpi_j(\delta x);$$

on constate que l'application

$$s \mapsto \xi \equiv A_j\begin{pmatrix} x \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \left[x \equiv \exp(sf)(x_0); \quad \varphi = \int \varpi_j \cdot \frac{dx}{ds} ds \right]$$

est une solution de l'équation différentielle $\frac{d\xi}{ds} \equiv f(\xi)$, quelle que soit la primitive φ choisie; en raccordant les solutions prises sur les intervalles partiels définis plus haut, on construit facilement une solution définie sur $[0, \alpha]$, prenant la valeur ξ_0 pour $s = 0$; le théorème (3.2) montre qu'elle est égale à $\exp(sf)(\xi_0)$; d'où ξ_0 , puisque ξ_0 est arbitraire.

C.Q.F.D

— On voit, si f est un quantomorphisme infinitésimal, que l'application

$$\underline{a}_Y(\xi) = \exp(sf)(\xi)$$

fait opérer, par quantomorphismes, le groupe de Lie additif R sur Y .

Exemple: Si on prend $u \equiv 1$, on a $\delta x \equiv 0$; la condition (18.145) est vérifiée, $\xi \mapsto \delta \xi$ est un quantomorphisme infinitésimal; la comparaison de (18.140) et (18.7) montre d'ailleurs que

$$\delta \xi \equiv i_Y(\xi)$$

QUANTIFICATION DES GROUPES DYNAMIQUES

Soit (Y, P) une quantification d'une variété symplectique U ; soit G un groupe de Lie qui opère sur Y par quantomorphismes.

Puisque les applications \underline{a}_Y ($a \in G$) respectent la forme ϖ , elles respectent aussi sa dérivée extérieure σ (4.36); G est donc un groupe dynamique de la variété présymplectique Y (11.1); si l'on pose (notation (18.119))

$$\underline{a}_U = P^*(\underline{a}_Y) \quad \forall a \in G$$

ce qui s'écrit aussi

$$(18.150) \quad \underline{a}_U(P(\xi)) \equiv P(\underline{a}_Y(\xi)),$$

il résulte de (11.5) que l'application

$$a \mapsto \underline{a}_U$$

fait de G un groupe dynamique de la variété symplectique U .

(18.151) [Nous dirons dans ce cas que G est un groupe dynamique quantifiable (pour la quantification (Y, P) de U), et que l'application $a \mapsto \underline{a}_Y$ est une quantification de G .

Z

Il est clair que l'ensemble des \underline{a}_Y est un relèvement de l'ensemble des \underline{a}_U — ensemble qui constitue donc un groupe relevable; nous allons voir qu'il ne suffit pas qu'un groupe dynamique soit relevable pour qu'il soit quantifiable.

Puisque G doit opérer sur Y en respectant la forme ϖ , on sait (11.10) que l'on obtient un moment μ de G en posant

$$(18.152) \quad \mu \cdot Z \equiv \varpi(Z_Y(\xi)) \quad \forall Z \in \mathcal{G}$$

\mathcal{G} étant l'algèbre de Lie de G , et que le cocycle symplectique θ associé est nul (11.21); en comparant avec (18.140), on notera que

$$(18.153) \quad \delta \xi \equiv Z_Y(\xi)_{\mu \cdot Z}$$

— Le théorème de Noether généralisé (11.12) montre que μ ne dépend de ξ que par l'intermédiaire de x , et que μ constitue aussi un moment de G considéré comme groupe dynamique de U ; il est immédiat que le cocycle associé à ce moment est nul lui aussi, c'est-à-dire que

$$(18.154) \quad \psi(\underline{a}_Y(x)) \equiv \underline{a}_{\mathcal{G}}(\psi(x)) \quad \psi = [x \mapsto \mu]; \quad a \in G;$$

en utilisant la terminologie du § 11, on voit donc que

(18.155) [Si un groupe dynamique d'une variété symplectique est quantifiable, sa cohomologie symplectique est nulle.

Nous verrons que cette condition nécessaire n'est pas suffisante (18.167).

(18.156) — Dans le cas d'un groupe dynamique G relevable, mais non quantifiable, il peut arriver qu'on trouve un groupe de Lie G' , opérant sur Y par quan-

tomorphismes, et fournissant ainsi un relèvement de G ; si $a \in G$, il existera donc un élément a' de G' tel que

157)
$$\underline{a}_U = \underline{a}'_U \quad [\underline{a}'_U(P(\xi)) \equiv P(a'_Y(\xi))]$$

si de plus G opère *effectivement* (16.220), cette relation définira une application Φ

158)
$$a \equiv \Phi(a')$$

qui est un *homomorphisme de G' sur G* ; on dit par conséquent que G' est une *extension* de G ; on trouve ainsi une *extension quantifiable* G' du groupe dynamique G .

Exemples

Soit E un espace vectoriel symplectique.
 E , considéré comme *groupe additif*, opère sur lui-même par translations :

59)
$$\underline{a}_E(x) = a + x \quad \forall a, x \in E$$

d'où

60)
$$Z_E(x) = Z \quad \forall x, Z \in E;$$

on obtient ainsi un groupe dynamique de E , possédant le moment

61)
$$\mu \equiv \sigma(x)$$

le cocycle θ associé est égal à σ ; sa classe de cohomologie n'est pas nulle.

E possède la quantification (Y, P) :

62)
$$\left\{ \begin{array}{l} Y = E \times T \\ \varpi \delta \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \equiv \frac{\delta z}{iz} + \frac{1}{2} \sigma(x) (\delta x) \quad [z \in T, x \in E] \\ P \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \equiv x \end{array} \right.$$

(voir (18.30), (18.31)); E étant simplement connexe, est monoquantifiable (18.130); le groupe dynamique E est donc relevable (18.129); mais il n'est pas quantifiable, puisque sa cohomologie n'est pas nulle (18.155).

Il est facile de trouver tous les relèvements des translations de E ; on constate qu'on peut les obtenir comme translations (à gauche) de Y , si l'on donne à Y la *structure de groupe de Lie* définie par la loi de composition

(18.163)
$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x + x' \\ zz' e^{-i\sigma(x)(x')/2} \end{pmatrix};$$

ce groupe s'appelle *groupe de Weyl*.

Il est clair que P est un homomorphisme de Y sur E , faisant du groupe de Weyl une *extension quantifiable* de E ; on notera que c'est une extension *non abélienne* du groupe abélien E . ■

$SO(3)$ est groupe dynamique de la sphère S_2 , munie de la structure symplectique (caractérisée par un nombre positif λ)

(18.164)
$$\sigma(dx) (\delta x) = \lambda \langle x, dx \times \delta x \rangle \quad [x \in R^3, \|x\| \equiv 1]$$

(voir ci-dessus (11.40)).

S_2 est quantifiable si 2λ est un nombre entier (18.45); si $SO(3)$ est quantifiable, il possède un moment μ , défini par (18.152), et vérifiant donc (18.154); la formule (11.17 #) définit μ sur l'algèbre dérivée de celle de $SO(3)$, qui lui est égale; on trouve

(18.165)
$$\mu(j(Z)) \equiv -\lambda \langle x, Z \rangle \quad [\forall x \in S_2, \forall Z \in R^3]$$

la formule (18.152) donne ensuite les quantomorphismes infinitésimaux $[j(Z)]_Y$ du groupe; en appliquant (6.12c), on constate que l'on doit avoir

(18.166)
$$\exp(j(Z)_Y) = 1_Y \quad \text{si} \quad \|Z\| = 2\pi.$$

(18.167) — Si 2λ est impair, cette formule n'est pas vérifiée, le groupe $SO(3)$ n'est pas quantifiable, bien que sa cohomologie soit nulle; il est cependant relevable, puisque S_2 est simplement connexe.

Traitons le cas $\lambda = 1/2$, avec la quantification (18.38, 39, 44); le calcul ci-dessus donne

(18.168)
$$j(Z)_Y (\xi) = -\frac{i}{2} \gamma(Z) \xi \quad [\forall \xi \in Y]$$

en posant

(18.169)
$$\gamma(Z) = \sum_{j=1}^3 \sigma_j jZ \quad [\forall Z \in R^3]$$

les σ_j étant les matrices de Pauli (18.43); on en tire

$$8.170) \quad \exp(j(Z)_Y) = \cos\left(\frac{\|Z\|}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\|Z\|}{2}\right) \gamma\left(\frac{Z}{\|Z\|}\right)$$

quantité qui vaut -1 si $\|Z\| = 2\pi$; mais le résultat de ce calcul n'est pas seulement négatif: il montre que les champs de vecteurs $j(Z)_Y$ définis par (18.168) sont des quantomorphismes infinitésimaux, et que leurs exponentielles (18.170) constituent le groupe $SU(2)$, opérant par quantomorphismes sur Y (qui est, rappelons-le, la sphère $\|\xi\| \equiv 1$ de l'espace C^2) selon

$$8.171) \quad \underline{a}_Y(\xi) \equiv a\xi \quad [a \in SU(2), \xi \in Y]$$

$SU(2)$ est donc une *extension quantifiable* de $SO(3)$; on calcule facilement l'homomorphisme Φ défini en (18.158):

$$8.172) \quad \boxed{\gamma(\Phi(a) \cdot Z) \equiv a \cdot \gamma(Z) \cdot \bar{a}} \quad [\forall a \in SU(2), \forall Z \in R^3];$$

c'est celui qui a été découvert par Hamilton, permettant d'exprimer les rotations au moyen de *quaternions* ⁽¹⁾; son noyau est $a = \pm 1$. ■

8.173) Il se produit un phénomène analogue dans le cas du groupe de Poincaré restreint G , groupe dynamique — par construction — de l'espace des mouvements d'une particule relativiste; G n'est quantifiable que si le spin de la particule est nul ou entier; dans le cas $s = 1/2$, on trouve une extension quantifiable G' de G , définie comme suit: le groupe spécial linéaire complexe de C^2 (noté $SL(2)_C$) opère sur l'espace \mathcal{E} des spineurs de Dirac, et sur l'espace de Minkowski E , de sorte que (notations (18.59), (18.63)):

$$8.174) \quad \underline{a}_E \equiv \mathcal{S} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \cdot \mathcal{S}^{-1}$$

$$a \in SL(2)_C; \quad Y \in E;$$

$$8.175) \quad \boxed{\underline{a}_E \cdot \gamma(Y) \cdot \underline{a}^{-1}_E \equiv \gamma(\underline{a}_E(Y))}$$

On peut vérifier que $a \mapsto \underline{a}_E$ est un homomorphisme de $SL(2)_C$ sur le groupe de Lorentz connexe, dont le noyau se compose de 2 éléments ($a = \pm 1$).

⁽¹⁾ Les quaternions peuvent se définir comme les matrices complexes d'ordre 2, a , vérifiant $a + \bar{a} = \text{Tr}(a)$, normées par $\|a\|^2 = \det(a)$; $SU(2)$ est la sphère unité dans l'espace à 4 dimensions réelles des quaternions.

Le groupe de Lie G' est défini comme le produit $SL(2)_C \times E$, muni de la loi de composition

$$(18.176) \quad \begin{pmatrix} a \\ C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' \\ C' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} aa' \\ \underline{a}_E C' + C \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} a, a' \in SL(2)_C \\ C, C' \in E \end{array} \right]$$

l'application

$$(18.177) \quad \begin{pmatrix} a \\ C \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \underline{a}_E & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un homomorphisme de G' sur le groupe de Poincaré restreint G ; G' opère sur la variété W (18.73) si l'on pose

$$(18.178) \quad \begin{pmatrix} a \\ C \end{pmatrix}_W \begin{pmatrix} X \\ \psi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \underline{a}_E \cdot X + C \\ \underline{a}_E \cdot \psi \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} X \in E \\ \psi \in \Sigma(18.65) \end{array} \right]$$

ESPACE DE HILBERT D'UNE VARIÉTÉ QUANTIQUE

Soit Y une variété quantique. Nous noterons $\mathcal{H}(Y)$ l'ensemble des fonctions Ψ différentiables sur Y , à support compact, vérifiant la condition

$$(18.179) \quad \diamond \quad \boxed{\Psi(z_Y(\xi)) = z\Psi(\xi)} \quad \forall z \in T, \quad \forall \xi \in Y;$$

$\mathcal{H}(Y)$ est un espace vectoriel complexe.

(18.180) — Supposons que (Y, P) soit une quantification d'une variété symplectique U . Si $\Psi, \Psi' \in \mathcal{H}(Y)$, on vérifie immédiatement que le produit

$$\overline{\Psi(\xi)} \cdot \Psi'(\xi)$$

est constant sur les orbites du tore, donc qu'il existe une application F :

$$F(x) \equiv \overline{\Psi(\xi)} \cdot \Psi'(\xi) \quad [x \equiv P(\xi)]$$

définie sur U ; on vérifie facilement qu'elle est différentiable (donc continue) et que son support est compact; on peut donc lui appliquer la mesure de

Liouville μ de U ; on obtient un nombre complexe $(^1) \mu(F)$ que nous noterons $\langle \Psi, \Psi' \rangle$; soit, avec la notation (16.144, 145)

$$(18.181) \quad \langle \Psi, \Psi' \rangle = \int_U \overline{\Psi(\xi)} \cdot \Psi'(\xi) \varphi(dx) \quad \forall \Psi, \Psi' \in \mathcal{H}(Y)$$

φ désignant la densité symplectique (16.94) de U .

DÉFINITION

On appelle espace *préhilbertien* tout espace vectoriel complexe E tel que :

$$(18.182) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{On a défini une application } \Psi \mapsto \overline{\Psi} \text{ de } E \text{ dans son dual;} \\ \overline{\Psi'} \cdot \Psi = \overline{\Psi \cdot \Psi'} \quad (\text{2}) \quad \forall \Psi, \Psi' \in E; \\ \Psi \neq 0 \Rightarrow \overline{\Psi} \cdot \Psi > 0. \end{array} \right.$$

Il résulte immédiatement des propriétés des mesures positives que :

$\mathcal{H}(Y)$ devient un espace *préhilbertien* si l'on pose

$$(18.183) \quad \diamond \quad \overline{\Psi} \cdot \Psi' \equiv \langle \Psi, \Psi' \rangle \quad [\Psi, \Psi' \in \mathcal{H}(Y)].$$

THÉORÈME, DÉFINITION (3)

Soit E un espace *préhilbertien*.

1) E devient un espace vectoriel *normé* (16.105) si l'on pose

$$(18.184) \quad \|\Psi\| = \sqrt{\overline{\Psi} \cdot \Psi} \quad \forall \Psi \in E.$$

2) $\Psi \mapsto \overline{\Psi}$ est une application *régulière, antilinéaire* (4) de E dans son dual *topologique* (16.108) E' ; on a

$$\|\overline{\Psi}\| \equiv \|\Psi\| \quad (\text{5}).$$

(1) On a $\mu(F) = \mu(F_1) + i\mu(F_2)$, avec $F(x) \equiv F_1(x) + iF_2(x)$, F_1 et F_2 étant réelles (voir (16.144)).

(2) Le second membre est le *conjugué* du nombre complexe $\overline{\Psi} \cdot \Psi'$.

(3) On trouvera la démonstration dans M. A. Naimark, *Normed Rings* (Noordhoff, 1959).

(4) Une application F est dite *antilinéaire* si elle est linéaire sur le corps des réels et vérifie

$$F(i\Psi) \equiv -iF(\Psi).$$

(5) $\|\overline{\Psi}\|$ désigne la norme de $\overline{\Psi}$, au sens (16.107 \diamond); la formule $\|\overline{\Psi}\| = \|\Psi\|$ contient donc l'*inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski*

$$|\overline{\Psi} \cdot \Psi'| \leq \|\Psi\| \times \|\Psi'\|.$$

(18.184) 3) Pour que E soit complet (1), il faut et il suffit que l'application $\Psi \mapsto \overline{\Psi}$ soit une bijection de E sur E' (Théorème de Riesz); on dit dans ce cas que E est un *espace de Hilbert*; c'est donc un *espace de Banach* (1).

4) Tout espace préhilbertien E peut être *complété*, c'est-à-dire *plongé dans un espace de Hilbert* \hat{E} , de sorte que :

— les opérations $\begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi' \end{pmatrix} \mapsto \Psi + \Psi'$, $\begin{pmatrix} \Psi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \Psi z$, $\begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi' \end{pmatrix} \mapsto \overline{\Psi} \cdot \Psi'$ de E sont induites de celles de \hat{E} ;
— E est *dense* dans \hat{E} (2).

DÉFINITION, THÉORÈME

On appelle *C*-algèbre* une algèbre de Banach complexe A (3) munie d'une application antilinéaire (4) $a \mapsto a^*$ de A dans A telle que (5) :

$$(18.185) \quad \left\{ \begin{array}{l} [a^*]^* = a \\ [a \times b]^* = b^* \times a^* \\ \|a\| = \|a^*\| = \sqrt{\|a^* \times a\|} \end{array} \right. \quad \forall a, b \in A.$$

Soit E un espace de Hilbert; soit $B(E)$ l'ensemble des applications linéaires *bornées* (16.107) de E dans E ; soit a un élément de $B(E)$; il existe alors un élément a^* de $B(E)$, défini par

$$\diamond \quad \overline{a^*(\Psi)} = \overline{\Psi} \cdot a \quad \forall \Psi \in E;$$

l'opération $*$ fait de $B(E)$ une *C*-algèbre*.

(1) Définition (16.106).

(2) Une partie H d'un espace vectoriel normé est dite *dense* si toute boule non vide contient des points de H . Dans le cas où E est déjà complet, on a $\hat{E} = E$.

(3) Rappelons la définition (16.160, 161) : A est un espace de Banach complexe (16.106), muni d'une application $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a \times b$, *associative, bilinéaire*, et telle que

$$\|a \times b\| \leq \|a\| \|b\| \quad (\forall a, b \in A).$$

(4) Définition (18.184, 2^o) : $[a + b]^* \equiv a^* + b^*$, $[sa]^* \equiv \bar{s}a^*$ si s est complexe.

(5) Une *C*-algèbre* est donc une *algèbre involutive* (16.165, 166).

On sait déjà que $B(E)$ est un espace de Banach complexe (16.107); il est trivial de vérifier que le produit (de composition) lui donne une structure d'algèbre de Banach; l'existence d'une application $a \mapsto a^*$ de $B(E)$ dans $B(E)$ définie par \diamond est une conséquence simple de (18.184), notamment du théorème de Riesz; la vérification des axiomes (des C^* -algèbres est un bon petit exercice ⁽¹⁾).

(18.186) Soit A une C^* -algèbre; soit $a \in A$.

On dit que a^* est l'adjoint de a ; que a est self-adjoint si $a^* = a$; que a est normal si $a \times a^* = a^* \times a$. ■

Il peut exister une unité dans A , c'est-à-dire un élément (nécessairement unique) 1_A tel que

(18.187)
$$1_A \times a = a \times 1_A = a \quad \forall a \in A \quad (2). \quad \blacksquare$$

Dans ce cas, on dit que a est unitaire si

(18.188)
$$a^* \times a = a \times a^* = 1_A$$

les éléments unitaires forment un groupe pour la multiplication \times , ayant 1_A comme élément neutre et $a \mapsto a^*$ comme inversion (groupe unitaire de A). ■

Soit E un espace préhilbertien, a un opérateur linéaire borné appliquant E dans E , \hat{E} le complété de E (18.184).

(18.189) Il est facile de voir que a possède un seul prolongement \hat{a} appartenant à $B(\hat{E})$; on définit \hat{a} par continuité: si une suite Ψ_n d'éléments de E tend, dans \hat{E} , vers Ψ ($\Psi \in \hat{E}$), on peut définir \hat{a} par

(18.190)
$$\hat{a}(\Psi) = \lim a(\Psi_n).$$

La correspondance $a \mapsto \hat{a}$ est un homomorphisme d'algèbre normée (elle est linéaire et vérifie $\widehat{a \times b} \equiv \hat{a} \times \hat{b}$, $\|\hat{a}\| \equiv \|a\|$); on vérifie ⁽³⁾

(18.191)
$$[\hat{a} \text{ unitaire}] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \text{ est isométrique : } \|a(\Psi)\| = \|\Psi\| \quad [\forall \Psi \in E] \\ \text{val}(a) \text{ est dense dans } E \end{array} \right]$$

DÉFINITION. THÉORÈME

(18.192) Soit E un espace préhilbertien; on appelle opérateur hermitien de E toute application linéaire A de E dans E qui vérifie

□
$$\overline{A(\Psi)} = \overline{\Psi} \circ A \quad \forall \Psi \in E.$$

⁽¹⁾ On trouvera la solution dans Naimark (référence ci-dessus p. 352).

⁽²⁾ Ce qui a lieu, évidemment, dans le cas $A = B(E)$.

⁽³⁾ On peut utiliser l'identité:

$$\overline{\Psi} \cdot \Psi' \equiv \frac{1}{4} [\|\Psi + \Psi'\|^2 - i\|\Psi + i\Psi'\|^2 - \|\Psi - \Psi'\|^2 + i\|\Psi - i\Psi'\|^2].$$

Soit (Y, P) une quantification d'une variété symplectique U .

A toute variable dynamique u définie sur U , on peut associer un opérateur \hat{u} de $\mathcal{H}(Y)$ défini par ⁽¹⁾

(18.192)
$$(\hat{u}(\Psi))(\xi) \equiv -i \delta[\Psi(\xi)] \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}(Y).$$

Alors:

♠ \hat{u} est un opérateur hermitien;

♡ la correspondance $u \mapsto \hat{u}$ est linéaire et régulière ⁽²⁾;

◇
$$\hat{1} = 1_{\mathcal{H}(Y)}$$

♣
$$\hat{u} \circ \hat{u}' - \hat{u}' \circ \hat{u} = -i \widehat{[u, u']}_P \quad (3).$$

— Soit K le support, compact, d'un élément Ψ de $\mathcal{H}(Y)$; dans l'ouvert complémentaire de K (16.19), $\Psi(\xi)$ est identiquement nulle; donc aussi $\delta\Psi(\xi)$; par conséquent l'ensemble des ξ où $\delta\Psi(\xi) \neq 0$ est contenu dans K , donc relativement compact (16.25); sa fermeture, qui est le support de $\hat{u}(\Psi)$ est donc compacte.

— On vérifie facilement que le champ $\xi \mapsto \delta\xi$ est invariant par les transformations z_Y ($z \in T$); en dérivant l'identité

$$\Psi(z_Y(\xi)) \equiv z\Psi(\xi)$$

vérifiée par Ψ (18.179), on en déduit que $\hat{u}(\Psi)$ vérifie aussi cette identité: \hat{u} applique bien $\mathcal{H}(Y)$ dans $\mathcal{H}(Y)$; sa linéarité est triviale.

— Soient Ψ, Ψ' deux éléments de $\mathcal{H}(Y)$; posons

$$\alpha \equiv \overline{\Psi(\xi)} \cdot \Psi'(\xi).$$

En appliquant la dérivation δ , on constate que

$$\delta\alpha \equiv i[\overline{\Psi(\xi)} \cdot \hat{u}(\Psi')(\xi) - \overline{\hat{u}(\Psi)(\xi)} \cdot \Psi'(\xi)]$$

d'où, grâce à la définition (18.181)

$$\int_U \delta\alpha \varphi(dx) = i[\overline{\Psi} \cdot \hat{u}(\Psi') - \overline{\hat{u}(\Psi)} \cdot \Psi'].$$

⁽¹⁾ Notation δ : voir (18.140).

⁽²⁾ De l'espace vectoriel réel de toutes les variables dynamiques de U dans l'espace vectoriel réel des opérateurs hermitiens de $\mathcal{H}(Y)$.

⁽³⁾ $[u, u']_P$ désigne le crochet de Poisson (9.22) de deux variables dynamiques quelconques u, u' .

En utilisant une partition de l'unité (Théorème (16.49)), on peut mettre α sous la forme $\sum_j \alpha_j$, les α_j étant différentiables et ayant leurs supports contenus chacun dans l'ensemble de valeurs d'une carte canonique; on a alors (16.68), (9.23a)

$$\oint \delta \alpha \varphi(dx) = \sum_j \int \cdots \int [u, \alpha_j]_P dp_1 \dots dp_n d^1 q \dots d^n q;$$

en appliquant la formule (10.7) qui donne le crochet de Poisson en coordonnées canoniques, on trouve

$$[u, \alpha_j]_P = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial^k q} \left[\alpha_j \frac{\partial u}{\partial p_k} \right] - \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\alpha_j \frac{\partial u}{\partial^k q} \right]$$

en faisant des intégrations par parties, et en notant que α_j s'annule en dehors d'un compact, on constate que toutes les intégrales figurant au second membre de sont nulles; on a donc

$$\overline{\Psi} \cdot \hat{u}(\Psi') = \overline{[\hat{u}(\Psi)]} \cdot \Psi'$$

ce qui indique bien que \hat{u} est hermitien (\heartsuit), puisque Ψ et Ψ' sont arbitraires.

— La linéarité de $u \mapsto \hat{u}$ résulte immédiatement de (18.142); pour montrer sa régularité il suffit donc de construire (u étant une variable dynamique non identiquement nulle) un élément Ψ_0 de $\mathcal{H}(Y)$ et un point ξ_0 de Y tels que

$$\hat{u}(\Psi_0)(\xi_0) \neq 0;$$

cette construction ne présente pas de difficultés dans le cas où U est une variété potentielle, avec la quantification (18.30); on se ramène à ce cas en choisissant un morceau U_0 de U dans lequel u n'est pas identiquement nul, et en utilisant le théorème d'équivalence (18.130).

— Enfin la vérification des formules \diamond et \heartsuit est immédiate, en utilisant (18.147) et (18.179) d'une part, (18.144) et (2.45) de l'autre.

Exemple: On considère un espace vectoriel symplectique, muni d'une carte canonique globale (voir (10.3)); puisque l'espace est quantifiable (18.31), il résulte de (18.192) que les opérateurs \hat{p}_j, \hat{q}_k associés aux coordonnées canoniques sont hermitiens et vérifient

$$\begin{cases} [\hat{p}_j, \hat{p}_k]_- = 0; & [\hat{q}_j, \hat{q}_k]_- = 0; & \forall j, k \\ [\hat{p}_j, \hat{q}_k]_- = 0 & & j \neq k \\ [\hat{p}_j, \hat{q}_j]_- = -i \mathbb{1} & & \forall j \end{cases}$$

la notation $[a, b]_-$ désignant le commutateur $ab - ba$. ■

— Ainsi qu'on peut le vérifier sur ce dernier exemple, les opérateurs \hat{u} ne sont pas toujours bornés; ce qui crée de grandes difficultés pour leur étude. Von Neumann a montré, si a est un opérateur hermitien vérifiant certaines conditions (qui ne sont pas toujours vérifiées par les opérateurs \hat{u}) que l'on pouvait définir les exponentielles $\exp(is\hat{a})$, s réel, qui sont des opérateurs bornés.

Par analogie avec le cas de la dimension finie, on peut s'attendre à vérifier l'identité

$$\frac{d}{ds} [\exp(is\hat{u})(\Psi)(\xi)] = i\hat{u}(\exp(is\hat{u})(\Psi))(\xi).$$

Or on vérifie cette égalité si le champ $f[\xi \mapsto \delta \xi]$ est un *quantomorphisme infinitésimal* (18.145), et si l'on pose

$$\exp(is\hat{u})(\Psi)(\xi) \equiv \Psi(\exp(sf)(\xi)).$$

Ceci suggère de faire *opérer directement les quantomorphismes*, sans passer par le détour des quantomorphismes infinitésimaux et de l'exponentielle; ce qui est possible grâce au théorème :

Soit Y une variété quantique.

1) Si a est un quantomorphisme de Y , et si l'on pose

$$f(a)(\Psi) = \Psi \circ a^{-1} \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}(Y)$$

$f(a)$ est une application *linéaire, isométrique et surjective* de $\mathcal{H}(Y)$ sur lui-même.

2) Si on désigne par \underline{a} le prolongement borné $\widehat{f(a)}$ (18.189) de $f(a)$ à l'espace de Hilbert $H(Y)$ complété de $\mathcal{H}(Y)$, la correspondance $a \mapsto \underline{a}$ est un *homomorphisme injectif* de $\text{Quant}(Y)$ dans le groupe des opérateurs unitaires de $H(Y)$ (1).

On vérifie que le support de $f(a)(\Psi)$ est l'image par a du support de Ψ , donc compact (16.22); comme a commute avec les opérations du tore (18.115), $f(a)(\Psi)$ vérifie, comme Ψ , l'identité (18.179 \diamond); $f(a)$ est donc une application de $\mathcal{H}(Y)$ dans $\mathcal{H}(Y)$; on constate immédiatement que f est un homomorphisme, que $f(a)$ est linéaire et surjectif (parce qu'il possède l'inverse $f(a^{-1})$). Le théorème de Liouville (16.99) montre que $f(a)$ est isométrique (Définition (18.191), donc de norme 1, donc borné; il résulte de (18.189 à 191) que $f(a)$ possède un seul prolongement borné \underline{a} à $H(Y)$, que \underline{a} est unitaire et que $a \mapsto \underline{a}$ est un homomorphisme. Pour montrer que cet homomorphisme est injectif, il suffit de trouver, si $a \neq 1_Y$, un $\Psi \in \mathcal{H}(Y)$ tel que $f(a)(\Psi) \neq \Psi$; comme dans la démonstration de (18.192), on l'obtient par une construction élémentaire, en usant du théorème d'équivalence (18.130).

— Si Γ est un *groupe de quantomorphismes* de Y , la restriction à Γ de $a \mapsto \underline{a}$ définit évidemment une *représentation unitaire* de Γ ; en appliquant cette remarque aux exemples (18.159 à 18.178), on obtient des représentations de groupes qui jouent un rôle essentiel en mécanique quantique.

(1) On dit aussi : une *représentation unitaire fidèle* de $\text{Quant}(Y)$ sur $H(Y)$.

§ 19 QUANTIFICATION DE SYSTÈMES DYNAMIQUES

LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE

(19.1) Appelons *système classique* un système dynamique conforme aux principes (13.1) ou (13.70) : un système classique est donc caractérisé — aussi bien en mécanique relativiste qu'en mécanique galiléenne — par un espace de mouvements qui est une variété symplectique U .

(19.2) L'expérience montre que cette description est insuffisante dans certains cas (exemples : chaleurs spécifiques à basse température ; rayonnement du corps noir) ; il apparaît des *effets*, appelés *quantiques*, dont une caractéristique commune est de mettre en jeu la constante de Planck h .

(19.3) On considère donc que la véritable mécanique doit être « quantique », et comporter la mécanique classique comme *approximation*, approximation valable lorsque h peut être traité comme *très petit*.

En fait, les rapports entre mécanique quantique et mécanique classique ne semblent pas se réduire à un simple processus d'approximation : « La formulation des principes fondamentaux de la mécanique quantique ... est foncièrement impossible sans l'intervention de la mécanique classique ⁽¹⁾ ».

(19.4) Avec ce point de vue, la description *classique* d'un système réel (donc *quantique* a priori) est une description *partielle* ; description qui peut servir d'*approximation* lorsqu'on considère la constante de Planck comme petite.

Il doit donc exister un système classique correspondant à chaque système quantique ⁽²⁾ ; si l'on admet ce principe de correspondance, il sera légitime de partir de la description classique d'un système pour construire sa description quantique ; c'est ce qu'on appelle la *quantification* du système classique ⁽³⁾.

⁽¹⁾ L. Landau et E. Lifchitz, « Mécanique quantique » (Moscou).

⁽²⁾ A condition, bien entendu, de ne pas limiter arbitrairement la définition ci-dessus des systèmes classiques (par exemple en récusant les particules à spin et en n'admettant que les systèmes de points matériels).

⁽³⁾ Bien noter la différence avec le cas des mécaniques relativiste et galiléenne : bien que certains systèmes relativistes — nous l'avons vu — possèdent une description galiléenne approchée, il n'y a pas de *correspondance* associant un système galiléen à chaque système relativiste (voir notamment (14.54, 55)) ; donc pas non plus, réciproquement, d'algorithme de « relativisation ».

(19.5) Dans ce § 19, nous allons examiner si la construction géométrique que nous avons élaborée au § 18 — sous le nom justement de « quantification » — peut jouer un rôle dans ce processus ; nous nous contenterons d'ailleurs d'examiner, dans divers cas, comment cette quantification géométrique conduit aux structures usuelles de la mécanique quantique.

Formulons l'hypothèse initiale :

(19.6) L'espace U des mouvements classiques d'un système dynamique est une variété symplectique quantifiable ⁽¹⁾.

(19.7) — Une première conséquence de cette hypothèse est relative au *spin* des particules : nous avons vu en détail, au § 18, que celui-ci doit être de la forme $n\hbar/2$ (n entier) pour que l'espace des mouvements soit quantifiable ; c'est bien ce que montre l'expérience (les valeurs rencontrées de n allant de 0 à plus d'une dizaine). Dans le cas des particules *de masse nulle*, on connaît les cas $n = 1$ (neutrinos) et $n = 2$ (photons) ⁽²⁾. ■

(19.8) Notons que le principe (19.6) ne s'oppose pas à la description d'un système composé de plusieurs parties sans interactions : la description classique se fait au moyen d'un produit direct de variétés symplectiques (13.1.II), (13.70.II), qui est donc quantifiable (Théorème (18.52)). ■

(19.9) Si on étudie un système mécanique par la *théorie de la diffusion*, on sait que les symplectomorphismes de diffusion S_j^k (15.65) définissent la structure symplectique d'un ouvert \tilde{U}' de l'espace \tilde{U} des mouvements diffusés (15.68) ⁽³⁾ ; puisque \tilde{U} doit être quantifiable, \tilde{U}' l'est aussi (18.17) ; ce qui fournit des conditions pour les S_j^k , conditions qui viennent s'ajouter aux relations (15.67). ■

(19.10) — Dans les autres systèmes physiques dont nous connaissons un modèle classique (systèmes de particules indiscernables ; certains atomes ou molécules ; solides traités comme oscillateurs harmoniques), on constate que la condition (19.6) est effectivement remplie (voir (18.138) et (18.31)).

⁽¹⁾ Avec la convention (18.28), qui consiste à choisir la constante \hbar comme unité de mesure pour les grandeurs ayant la dimension d'une action.

⁽²⁾ Le graviton conjecturé correspondrait à $n = 4$.

⁽³⁾ \tilde{U}' est l'espace des mouvements *non liés*.

VECTEURS D'ÉTAT ; OBSERVABLES

(19.11) L'hypothèse préalable (19.6) suppose l'existence d'une quantification (Y, P) pour l'espace U des mouvements d'un système classique quelconque; nous allons maintenant mettre en jeu *la variété quantique Y elle-même*; nous l'appellerons « variété quantique du système » ⁽¹⁾.

DÉFINITION

(19.12) Soit Y la variété quantique d'un système dynamique; appelons *vecteurs d'état* du système les éléments Ψ de l'espace préhilbertien $\mathcal{H}(Y)$ qui vérifient

$$\diamond \quad \bar{\Psi} \cdot \Psi = 1 \quad (\text{notation (18.183)}).$$

En se reportant à la définition (18.181), on constate que cette condition \diamond peut s'écrire

$$(19.13) \quad \int_U |\Psi(\xi)|^2 \varphi(dx) = 1$$

φ étant la *densité symplectique* de U ; c'est dire que la fonction

$$(19.14) \quad \rho(x) \equiv |\Psi(\xi)|^2$$

définit une *loi de probabilité* ⁽²⁾ sur l'espace des mouvements, c'est-à-dire un *état au sens de la mécanique statistique* (17.1); ce qui permet une *interprétation probabiliste* de chaque vecteur d'état Ψ : la probabilité pour que le mouvement du système appartienne à un ouvert Ω de U est égale à l'intégrale ⁽³⁾ ⁽⁴⁾

$$(19.15) \quad \int_{\Omega} |\Psi(\xi)|^2 \varphi(dx)$$

⁽¹⁾ On suppose que la nature définit la quantification (Y, P) à une *équivalence près* (18.117); ainsi, dans le cas d'un système de particules indiscernables, qui admet deux quantifications non équivalentes (18.138), l'expérience montre que c'est la quantification de Bose-Einstein qui convient si le spin est entier, celle de Fermi-Dirac si le spin est demi-impair.

⁽²⁾ Il s'agit bien entendu de la loi complètement continue admettant $\rho(x) \varphi$ comme *densité*.

⁽³⁾ Voir (16.179), (16.124), (16.136).

⁽⁴⁾ Si, dans le cas d'une particule par exemple, on choisit un instant t_0 et un ouvert A de l'espace R^3 , la probabilité pour que la particule soit dans A à l'instant t_0 sera

$$\int_{\Omega_{t_0, A}} |\Psi(\xi)|^2 \varphi(dx)$$

$\Omega_{t_0, A}$ désignant l'ensemble des mouvements de la particule dans lesquels la trajectoire (au sens (14.4e)) coupe l'hyperplan $t = t_0$ en un point de A ; on obtiendra donc la *densité spatiale $f(\mathbf{r})$ de probabilité de présence* en prenant l'image (au sens (16.149)) de la loi (19.14) par l'application $x \mapsto \mathbf{r}$ (définie à l'instant t_0 , par les équations de la trajectoire) et en mettant cette image sous la forme $\lambda \times f$, λ étant la *mesure euclidienne* (16.94) de R^3 .

la *valeur moyenne* d'une variable dynamique u est égale ⁽¹⁾ à

$$(19.16) \quad \int_U u |\Psi(\xi)|^2 \varphi(dx).$$

(19.17) — Mais ces règles tombent en défaut lorsqu'on approfondit la notion physique de valeur moyenne (19.207) ou d'état (19.215); la principale utilité de l'interprétation probabiliste est donc de montrer que la mécanique statistique est, elle aussi, une approximation de la mécanique quantique. ■

Nous savons d'autre part que l'on peut associer à *chaque variable dynamique* u un opérateur \hat{u} (18.192) de sorte que :

♠ \hat{u} est un opérateur hermitien sur $\mathcal{H}(Y)$;
♥ la correspondance $u \mapsto \hat{u}$ est linéaire (sur le corps des réels);

$$(19.18) \quad \diamond \quad \hat{1} = \underline{1}_{\mathcal{H}(Y)};$$

si u et v sont des variables dynamiques, on a

$$\clubsuit \quad \hat{u} \cdot \hat{v} - \hat{v} \cdot \hat{u} = -i \widehat{[u, v]}_P.$$

(19.19) Il est donc naturel d'identifier ces opérateurs \hat{u} avec les *observables* tels que les a définis Dirac ⁽²⁾, puisque ces résultats (19.18) ont été choisis par lui comme *principes* de la mécanique quantique.

Exemple

(19.20) Considérons un système dynamique conservatif; choisissons (comme en (12.32)) des coordonnées canoniques p_j, q de l'espace de phases à l'instant t ; toute fonction $u(p_1, \dots, p_N, q, \dots, q)$ peut être considérée comme une variable dynamique *dépendant de t* ; les équations canoniques de Hamilton (12.111, 112) et la formule de Poisson (10.7) montrent que

$$(19.21) \quad \frac{du}{dt} = [H, u]_P$$

H étant le hamiltonien; en appliquant (19.18♣), et en se permettant — à cause de (19.18♥) — de dériver sous le signe $\widehat{}$, on trouve l'équation

$$(19.22) \quad \frac{d}{dt} \hat{u} = i[\hat{H} \cdot \hat{u} - \hat{u} \cdot \hat{H}]$$

postulée aussi par Dirac, comme *équation du mouvement*.

⁽¹⁾ Voir (16.191).

⁽²⁾ P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc., A* 109 (1926), 642; *The principles of quantum mechanics* (Oxford University Press).

Dans le cas particulier des coordonnées canoniques p_j, q_j elles-mêmes, on trouve les relations :

$$(19.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\hat{p}_j \cdot \hat{p}_k - \hat{p}_k \cdot \hat{p}_j = 0} \quad \boxed{{}^j \hat{q} \cdot {}^k \hat{q} - {}^k \hat{q} \cdot {}^j \hat{q} = 0} \quad \forall j, k \\ \boxed{\hat{p}_j \cdot {}^k \hat{q} - {}^k \hat{q} \cdot \hat{p}_j = 0} \quad j \neq k \\ \boxed{\hat{p}_j \cdot {}^j \hat{q} - {}^j \hat{q} \cdot \hat{p}_j = -i} \quad \forall j \\ \boxed{\frac{d\hat{p}_j}{dt} = i[\hat{H} \cdot \hat{p}_j - \hat{p}_j \cdot \hat{H}]} \quad \boxed{\frac{d{}^j \hat{q}}{dt} = i[\hat{H} \cdot {}^j \hat{q} - {}^j \hat{q} \cdot \hat{H}]} \end{array} \right.$$

C'est l'ensemble de ces relations (19.23) qui a été choisi par Pauli et Heisenberg comme principes de la mécanique quantique.

FORMULATION DE LA CONDITION DE PLANCK

(19.24) Ainsi que son nom le suggère, on peut penser que c'est un *vecteur d'état* qui décrit « ce qui se passe » au cours d'une expérience réelle ; dans cette hypothèse, comment le déterminer ?

Nous allons formuler, sous le nom de *condition de Planck*, une propriété des vecteurs d'état ; nous examinerons ultérieurement des cas où elle semble vérifiée.

(19.25) — Supposons donné un *feuilletage isotrope* de l'espace U des mouvements ; nous avons vu (18.113) comment on pouvait, dans les cas favorables, relever ce feuilletage par un *feuilletage de Planck* de la variété quantique Y ; nous dirons qu'un vecteur d'état Ψ du système vérifie la *condition de Planck* (relative au feuilletage) si Ψ est une intégrale première, c'est-à-dire si $\Psi(\xi)$ est *constant sur chaque feuille*. ■

(19.26) — Supposons données un certain nombre de variables dynamiques u_j ($j = 1, 2, \dots, p$) en *involution*, c'est-à-dire telles que leurs crochets de Poisson mutuels soient nuls :

$$(19.27) \quad [u_j, u_k]_P \equiv 0 \quad \forall j, k.$$

Ainsi que nous l'avons remarqué (Théorème (9.37)), si les équations

$$(19.28) \quad u_j = \text{Cte}$$

définissent des variétés connexes de dimension constante plongées dans l'espace des mouvements, ces variétés sont les feuilles d'un *feuilletage co-isotrope* ; en tout point x de U , l'espace vectoriel orthogonal à la feuille passant par x est le *noyau* de la forme σ induite sur la feuille (9.35) ; ce qui détermine donc, sur toute feuille co-isotrope (et par conséquent sur U toute entière) un *feuilletage isotrope* (9.8) ; on constate facilement que le *relèvement de Planck* correspondant est le feuilletage $\xi \mapsto H$ de Y défini comme suit :

$$(19.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} H \text{ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs} \\ \delta \xi - u_j \delta \xi_j \end{array} \right.$$

la condition de Planck correspondante sera donc vérifiée par un vecteur d'état Ψ si

$$(19.30) \quad \delta \Psi(\xi) \equiv u_j \delta \Psi(\xi_j) \quad \forall j$$

compte tenu de la condition (18.179◇) et de la définition (18.192 ()), cette condition de Planck prend la forme suivante :

$$(19.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u \equiv f(u_1, \dots, u_p), \text{ on a} \\ [\hat{u}(\Psi)](\xi) \equiv u \times \Psi(\xi). \blacksquare \end{array} \right.$$

(19.32) L'ensemble des fonctions Ψ différentiables sur Y et vérifiant cette condition forme évidemment un espace vectoriel complexe (*espace de Planck*) ; si v est une variable dynamique, et s'il existe des fonctions f_j telles que

$$(19.33) \quad [v, u_j]_P \equiv f_j(u_1, \dots, u_p) \quad [j \equiv 1, \dots, p]$$

le lecteur pourra vérifier (en appliquant (18.144)) que l'opérateur \hat{v} laisse invariant l'espace de Planck.

ÉTATS STATIONNAIRES

Considérons un système conservatif ; son énergie E est une variable dynamique ; les variétés

$$E = \text{Cte}$$

définissent un feuilletage co-isotrope.

(19.34) Nous dirons qu'un vecteur d'état Ψ du système est *stationnaire* s'il vérifie la condition de Planck correspondante :

$$(19.35) \quad \diamond \quad \hat{E}(\Psi) = E \times \Psi. \blacksquare$$

(19.36) Ecrivons cette condition sur l'espace d'évolution, considéré traditionnellement comme produit direct de l'espace de phases par le temps.

On sait que $\hat{E}(\Psi) = -i \delta \Psi_E$ (18.192), et que $\delta \Psi_E = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ (voir (12.153)); (19.35) s'écrit donc

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \times \Psi$$

ou encore

$$\Psi = \Psi_0 e^{-iEt}$$

Ψ_0 étant une fonction « indépendante du temps »; Ψ dépend donc harmoniquement de t , avec la période $T = 2\pi/E$; compte tenu des équations aux dimensions de l'énergie et du temps (13.13), on a donc (18.29)

$$\frac{ET}{2\pi} = \hbar$$

ou, en introduisant la fréquence $\nu = 1/T$ et la constante de Planck $h = 2\pi\hbar$

$$E = h\nu$$

(19.37)

c'est cette formule même que Planck a prise comme hypothèse dans son travail initial sur la théorie des quanta; elle permet — au moins formellement — de traduire en termes de fréquences des résultats établis en termes d'énergie: par exemple l'effet Doppler (que nous avons traité en (15.113)); l'interprétation spectroscopique de la figure 17.IV. Cette loi de Planck reçoit une double utilisation dans la loi de Bohr du rayonnement

(19.38)

$$E' - E'' = h\nu,$$

où E' et E'' sont les énergies du système dans deux états stationnaires donnés, et ν la fréquence du photon émis (ou absorbé) dans une transition d'un état à l'autre.

FORMATION DES ÉQUATIONS D'ONDI

(19.39)

— Soit U l'espace des mouvements d'un système dynamique, (Y, P) sa quantification.

Soit G un groupe dynamique de U , possédant un moment μ ; supposons que G possède un sous-groupe de Lie abélien invariant \tilde{G} ; que la cohomologie symplectique du groupe dynamique \tilde{G} soit nulle.

Soient \mathcal{G} et $\tilde{\mathcal{G}}$ les algèbres de Lie respectives de G et \tilde{G} ; soit f le cocycle symplectique de \mathcal{G} défini en (11.17).

Il résulte aisément de (11.17#), (9.22) et (11.9) la formule

$$(19.40) \quad [\mu \cdot Z, \mu \cdot Z']_p \equiv \mu \cdot [Z, Z'] + f(Z)(Z') \quad \forall Z, Z' \in \mathcal{G}$$

qui montre, si l'on choisit une base Z_1, \dots, Z_p de \mathcal{G} , que les variables dynamiques

$$(19.41) \quad u_j \equiv \mu \cdot Z_j$$

sont en involution.

(19.42) On peut leur appliquer la construction (19.26) et définir — au moyen de (19.32) — un espace de Planck; si Z est un élément constant de \mathcal{G} , la formule (19.40) montre que $[\mu \cdot Z, \mu \cdot Z_j]_p$ est une fonction de u_1, \dots, u_p : en effet $[Z, Z_j]$ est un élément constant de \mathcal{G} (\tilde{G} étant un sous-groupe invariant de G , \mathcal{G} est un idéal de \mathcal{G}), et $f(Z)(Z_j)$ est une constante.

Le critère (19.34) s'applique: pour tout $Z \in \mathcal{G}$, l'observable $\widehat{\mu \cdot Z}$ laissera invariant l'espace de Planck. ■

(19.43) Cette construction s'appliquera à tout système dynamique isolé, en prenant pour G le groupe de Poincaré ou de Galilée (selon que le traitement est relativiste ou non), et pour \tilde{G} le groupe des translations d'espace-temps; on pourra alors choisir comme fonctions u_j l'énergie et les trois composantes de l'impulsion; l'espace de Planck ainsi obtenu sera donc composé de vecteurs d'état stationnaires (au sens (19.35)) quel que soit le référentiel d'inertie choisi (¹).

Cet espace sera donc invariant par les observables $\widehat{\mu \cdot Z}$ associés aux divers éléments Z de \mathcal{G} (moments relativistes ou non). ■

(19.44) Nous allons traiter les divers cas de particules élémentaires. Afin de donner une interprétation spatio-temporelle des résultats, nous utiliserons — en dehors de l'espace U des mouvements et de la variété quantique Y associée — l'espace d'évolution V (Fig. 19.I) et la variété W , produit fibré de V et Y , que nous avons déjà rencontrée dans le cas particulier de la figure 18.V (p. 331).

(19.45) **Point matériel non relativiste**

L'espace d'évolution V est parcouru par le triplet $Y \equiv \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ (12.26);

définissons W comme le produit direct de V par le tore T , parcouru par la variable

$$(19.46) \quad \eta \equiv \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \zeta \in T.$$

(¹) On a donc une relation de Planck spatiale $\|\mathbf{p}\| = h/\lambda$, λ étant la longueur d'onde; ainsi, dans le cas du photon non relativiste, les formules $\mathbf{p} = k\mathbf{u}$ (14.53 ♡) et $s = \hbar$ donnent $\lambda = 2\pi\nu k$ (voir (15.89)).

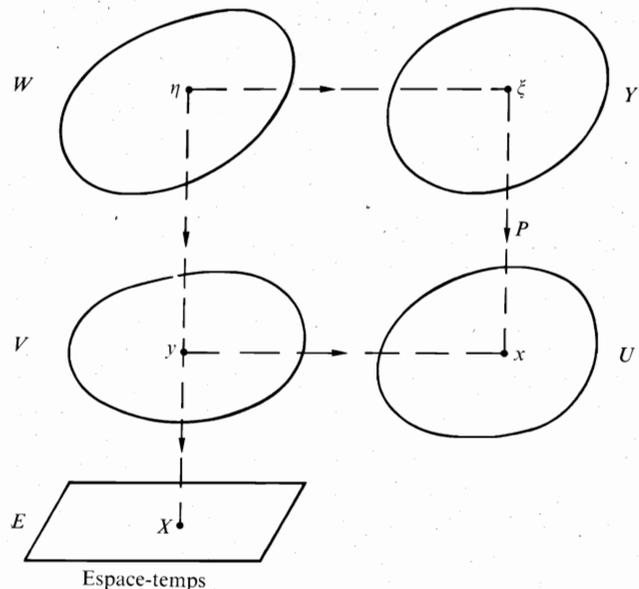


Fig. 19.1.

Considérons la 1-forme ϖ de W :

$$(19.47) \quad \varpi(d\eta) \equiv \langle m\mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle - \frac{1}{2}mv^2 dt + \frac{d\zeta}{i\zeta} \quad (v = \|\mathbf{v}\|)$$

on trouve facilement le feuilletage caractéristique de ϖ :

$$(19.48) \quad [d\eta \in \ker(\varpi) \cap \ker(\nabla\varpi)] \Leftrightarrow \left[d\mathbf{v} \equiv 0 ; d\mathbf{r} \equiv \mathbf{v} dt ; \frac{d\zeta}{i\zeta} \equiv -m \frac{v^2}{2} dt \right]$$

d'où la variété quotient Y , parcourue par la variable

$$(19.49) \quad \xi \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{v} \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &\equiv \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ z &\equiv \zeta e^{imv^2t/2} \end{aligned}$$

la forme ϖ passe naturellement au quotient (Théorème (5.21)) :

$$(19.50) \quad \varpi(d\xi) \equiv \varpi(d\eta) \equiv \langle m\mathbf{v}, d\boldsymbol{\rho} \rangle + \frac{dz}{iz}$$

le calcul donne la dérivée extérieure $\sigma \equiv \nabla\varpi$

$$(19.51) \quad \begin{aligned} \sigma(d\eta)(\delta\eta) &\equiv \langle m d\mathbf{v}, \delta\mathbf{r} - \mathbf{v} \delta t \rangle - \langle m \delta\mathbf{v}, d\mathbf{r} - \mathbf{v} dt \rangle \\ &\equiv \langle m d\mathbf{v}, \delta\boldsymbol{\rho} \rangle - \langle m' \delta\mathbf{v}, d\boldsymbol{\rho} \rangle \end{aligned}$$

on reconnaît la forme de Lagrange du point libre de masse m (12.40); l'espace des mouvements U est parcouru par la variable

$$(19.52) \quad x \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

on voit que σ est défini sur les quatre variétés W, V, Y, U , et que (Y, P) [$x \equiv P(\xi)$] quantifie le système; on sait qu'il est mono-quantifiable (18.135).

Soit

$$(19.53) \quad Z = \begin{bmatrix} j(\boldsymbol{\omega}) & \boldsymbol{\beta} & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

un élément de l'algèbre de Lie \mathcal{G} du groupe de Galilée G (notation (12.118)); on sait que G opère sur V en conservant σ , et que le vecteur $\delta y \equiv Z_V(y)$ est donné par (12.119)

$$(19.54) \quad \begin{aligned} \delta t &\equiv \varepsilon \\ \delta \mathbf{r} &\equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\beta}t + \boldsymbol{\gamma}, \\ \delta \mathbf{v} &\equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\beta}, \end{aligned}$$

d'où

$$(19.55) \quad \delta x \equiv \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\rho} \\ \delta \mathbf{v} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{v}\varepsilon \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

On sait (11.9) que

$$(19.56) \quad \delta x \equiv \delta x_{\mu.Z}$$

(notation (9.20); μ est le moment galiléen);

$x \mapsto \delta x$ est donc un symplectomorphisme infinitésimal.

Rappelons les formules (12.123), (12.122) :

$$(19.57) \quad \mu \equiv \{ \mathbf{l}, \mathbf{g}, \mathbf{p}, E \}; \quad \mu.Z \equiv \langle \mathbf{l}, \boldsymbol{\omega} \rangle - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\beta} \rangle + \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma} \rangle - E\varepsilon$$

il résulte de (12.125) que l'on peut choisir le moment μ suivant :

$$(19.58) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{l} &\equiv m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \equiv m\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{g} &\equiv m[\mathbf{r} - \mathbf{v}t] \equiv m\boldsymbol{\rho}, \\ \mathbf{p} &\equiv m\mathbf{v}, \\ E &\equiv \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned} \right.$$

19.59) Le groupe de Galilée G est *relevable* à Y (18.129), *mais il n'est pas quantifiable*, parce que sa cohomologie symplectique n'est pas nulle (18.155); on peut cependant relever le champ de vecteurs $x \mapsto \delta x$ sur Y en posant

19.60)
$$\omega(\delta\xi) \equiv \mu.Z;$$

les formules (19.55, 57, 58) donnent immédiatement

19.61)
$$\frac{\delta z}{iZ} \equiv \frac{1}{2}mv^2 \varepsilon - m \langle \rho, \beta \rangle$$

19.62) on a d'ailleurs $\delta\xi \equiv \delta\xi_{\mu Z}$ (notation (18.140)); le théorème (18.145) et l'étude directe de l'équation différentielle $\frac{d\xi}{d\alpha} \equiv \delta\xi$ montrent que $\xi \mapsto \delta\xi$ est un *quantomorphisme infinitésimal*.

Les formules (19.54, 61, 49) permettent de définir un champ de vecteurs $\eta \mapsto \delta\eta$ sur W ; on trouve immédiatement

19.63)
$$\frac{\delta\xi}{i\xi} \equiv -m \langle \beta, r \rangle. \blacksquare$$

— $\tilde{\mathcal{G}}$ désignant l'algèbre de Lie du groupe \tilde{G} des translations d'espaces-temps, on a

19.64)
$$[Z \in \tilde{\mathcal{G}}] \Leftrightarrow [\omega = \beta = 0].$$

L'espace de Planck défini en (19.43) est l'ensemble des Ψ différentiables sur Y , vérifiant

19.65)
$$\begin{cases} \delta_1 \Psi(\xi) \equiv i\Psi(\xi) \\ \delta_{\mu.Z} \Psi(\xi) \equiv i\mu.Z\Psi(\xi) \end{cases} \quad \forall Z \in \tilde{\mathcal{G}}.$$

Les formules précédentes permettent de résoudre sans difficultés ces équations; on trouve

19.66)
$$\Psi(\xi) \equiv \bar{\psi}_Z e^{im\langle v, \rho \rangle} \equiv \bar{\psi}_\xi e^{im[\langle v, r \rangle - v^2 t/2]}$$

ψ étant une fonction différentiable complexe *de v seulement*.

Selon (19.42), cet espace de Planck est invariant par les opérateurs $\widehat{\mu.Z} \equiv -i\delta_{\mu.Z}$ ($\forall Z \in \mathcal{G}$); le calcul montre d'ailleurs que l'effet de $\widehat{\mu.Z}$ consiste à remplacer ψ par

19.67)
$$i \frac{\partial \psi}{\partial v} (\omega \times v + \beta) + m[\langle v, \gamma \rangle - v^2 \varepsilon/2] \psi$$

qui est bien une fonction de v seul, puisque $\omega, \beta, \gamma, \varepsilon$ sont des constantes.

Exemple : Soit τ une *date*; si l'on choisit

19.68)
$$\omega = 0; \quad \beta = \begin{pmatrix} -1/m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \begin{pmatrix} \tau/m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = 0$$

on constate que $\mu.Z$ est égal à la première composante r_1 de la position r de la particule à la date τ ; l'opérateur \hat{r}_1 associé (« opérateur position ») change donc ψ en

19.69)
$$- \frac{i}{m} \frac{\partial \psi}{\partial v_1} + \tau v_1 \psi.$$

19.70) Il est facile de constater que les éléments de cet espace de Planck (19.66) *ne sont pas* des vecteurs d'état, parce que leur support n'est pas compact (voir (19.241)).

19.71) Dans le cas où le support de l'application $v \mapsto \psi$ est lui-même compact, nous pouvons introduire la variable (cf. (19.66)) :

19.72)
$$\tilde{\psi} \equiv \int_{R^3} \psi e^{-im[\langle v, r \rangle - v^2 t/2]} \varphi(dv)$$

φ désignant ici la densité euclidienne.

On constate que $\tilde{\psi}$ est une fonction différentiable de r et t ; quelques différentiations sous le signe \int montrent que $\tilde{\psi}$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

19.73)
$$\frac{1}{2m} \Delta \tilde{\psi} - i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \equiv 0$$

19.74) C'est l'équation que Schrödinger a proposée à priori pour décrire une particule libre non relativiste en mécanique quantique; équation dont la validité a reçu de très nombreuses confirmations; la variable $\tilde{\psi}$ s'appelle la *fonction d'onde* de la particule ⁽¹⁾.

Comme le montre la théorie de l'intégrale de Fourier, la correspondance entre les fonctions $\mathbf{v} \mapsto \psi$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \tilde{\psi}$ ⁽²⁾ est injective; on peut donc décrire les opérateurs $\widehat{\mu.Z}$ par leur action sur $\tilde{\psi}$; en utilisant (19.57), (19.67), (19.72), (19.69), on trouve le tableau suivant

$$19.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_j : \quad i \frac{\partial}{\partial r_j} \\ \hat{r}_j : \quad r_j - \frac{i}{m} [t - \tau] \frac{\partial}{\partial r_j} \\ \hat{E} : \quad -i \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right.$$

19.76) Le lecteur pourra vérifier directement que les « opérateurs position » \hat{r}_j conservent les solutions de l'équation de Schrödinger; ce qui n'est pas le cas des opérateurs r_j (multiplicatifs), avec lesquels on les confond si on ne distingue pas les dates t et τ ; quant aux \hat{p}_j et à \hat{E} , ce sont les opérateurs habituels en mécanique quantique.

— On notera que l'équation de Schrödinger traduit, sur $\tilde{\psi}$, la relation

$$19.77) \quad \hat{E} = \frac{1}{2m} [\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2]$$

exprimant l'opérateur hamiltonien \hat{E} en fonction des opérateurs-impulsion \hat{p}_j ; cette relation (19.77) est une conséquence immédiate de la relation

$$19.78) \quad E = \frac{1}{2m} [p_1^2 + p_2^2 + p_3^2] \quad (\text{cf. (19.58)})$$

et du théorème (19.32); elle a été formulée à priori dans la conception originale de l'équation de Schrödinger. ■

⁽¹⁾ On obtiendrait une quantification équivalente en changeant i en $-i$ dans toutes les formules ci-dessus; on peut donc aussi écrire l'équation de Schrödinger sous la forme

$$\frac{1}{2m} \Delta \tilde{\psi} + i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \equiv 0.$$

⁽²⁾ Et même $\mathbf{r} \mapsto \tilde{\psi}$, t étant choisi.

Le groupe de Galilée (12.115) se relève à Y et à W par le groupe des applications

$$19.79) \quad \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t + e \\ A(\mathbf{r}) + \mathbf{b}t + \mathbf{c} \\ A(\mathbf{v}) + \mathbf{b} \\ \zeta e^{-im[\langle \mathbf{b}, A(\mathbf{r}) \rangle + \mathbf{b}^2 t/2 + \mathbf{c}t e]} \end{pmatrix}$$

ce qui fournit une *extension quantifiable* (18.156), de dimension 11, du groupe de Galilée.

19.80) Le lecteur pourra vérifier directement que cette extension conserve l'espace de Planck, en calculant son action sur la fonction d'onde $\tilde{\psi}$ ⁽¹⁾.

19.81) Point matériel relativiste

La transposition au cas relativiste des calculs précédents conduit aux résultats suivants (même Fig. 19.1) :

$$19.82) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \equiv \begin{pmatrix} X \\ I \end{pmatrix}, \quad \bar{I}.I \equiv 1, I \text{ vecteur de futur (notations (14.24))} \\ \eta \equiv \begin{pmatrix} X \\ I \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \zeta \in T \\ \xi \equiv \begin{pmatrix} \bar{X} \\ I \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \bar{X} \equiv [1 - I.\bar{I}] X \\ z \equiv \zeta e^{-im\bar{I}.X} \end{array}, \quad \bar{I}.\bar{X} \equiv 0 \end{array} \right.$$

$$19.83) \quad \boxed{\omega(d\eta) \equiv \omega(d\xi) \equiv -m\bar{I}.dX + \frac{d\zeta}{i\zeta} \equiv m\bar{X}.dI + \frac{dz}{iz}}$$

$$19.84) \quad \sigma(d.x) (\delta.x) \equiv m[\bar{dX}.\delta I - \bar{\delta X}.dI].$$

⁽¹⁾ V. Bargmann a montré l'origine cohomologique de l'échec des tentatives naïves pour faire opérer le groupe de Galilée sur les fonctions d'ondes (voir (19.59)).

Si l'on désigne par $Z = \begin{pmatrix} A & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (notation (13.54)) un élément de l'algèbre de Lie \mathcal{G} du groupe de Poincaré, la dérivation δ associée est :

19.85)

| | |
|---|--|
| $\delta X \equiv AX + \Gamma$ | $\delta E \equiv AE + [1 - I\bar{I}] \Gamma$ |
| $\delta I \equiv A.I$ | $\delta \zeta \equiv 0$ |
| $\frac{\delta z}{iz} \equiv -m\bar{I}.\Gamma$ | |

le moment de Poincaré μ étant donné par

19.86)
$$\mu.Z \equiv m[\bar{X}.A.I - \bar{I}.\Gamma].$$

L'algèbre de Lie du groupe des translations d'espace-temps s'obtient en faisant $A = 0$; l'espace de Planck associé est l'ensemble des Ψ :

19.87)
$$\Psi(\xi) \equiv \bar{\psi}_z \equiv \bar{\psi}\zeta e^{-im\bar{I}.X}$$

ψ étant une fonction complexe de I , différentiable sur la variété H d'équations

19.88)
$$\bar{I}.I \equiv 1, \quad I \text{ vecteur de futur } ^{(1)}.$$

L'opérateur $\widehat{\mu.Z}$ opère sur l'espace de Planck en changeant ψ en

19.89)
$$i \frac{\partial \psi}{\partial I} (A.I) - m\bar{I}.\Gamma \psi.$$

Si le support de $I \mapsto \psi$ est compact, on peut définir $\tilde{\psi}$ par

19.90)
$$\tilde{\psi} = \int_H \psi e^{im\bar{I}.X} \varphi(dI)$$

φ étant la densité euclidienne sur H ⁽²⁾; $\tilde{\psi}$ est une fonction complexe différentiable de X , qui vérifie l'équation de Klein-Gordon

19.91)
$$\square \tilde{\psi} + m^2 \tilde{\psi} \equiv 0$$

⁽¹⁾ $\bar{I}.I = 1$ est l'équation d'une variété à deux composantes (« hyperboloïde à deux nappes »); H est l'une d'entre elles; l'autre, H' , lui est opposée.

⁽²⁾ L'espace vectoriel tangent à H en I est orthogonal à I ; c'est un espace euclidien négatif de dimension 3.

Notons que l'on obtiendrait aussi une solution de cette équation en prenant l'intégrale (19.90) sur la variété H' , opposée de H , parcourue par les vecteurs unitaires de passé; en remarquant que

(19.92)
$$\varphi(dI) = \frac{\varphi(d\mathbf{p})}{m^2 E} \begin{cases} E = \sqrt{m^2 + p^2} \\ \varphi(d\mathbf{p}) = \text{élément de volume de } R^3 \end{cases} \quad (14.28)$$

ce qui permet d'écrire (19.90) sous la forme

(19.93)
$$\tilde{\psi} \equiv \int_{R^3} \psi \frac{e^{iI \cdot \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle + iI \sqrt{p^2 + m^2}}}{m^2 \sqrt{m^2 + p^2}} \varphi(d\mathbf{p})$$

on voit, pour chaque valeur de \mathbf{r} , que le spectre de fréquence de $\tilde{\psi}$ est positif (il commence à $\nu = m/2\pi = m/h$), alors qu'il serait négatif sur H' ; c'est pourquoi on dit que $\tilde{\psi}$ est une solution à fréquences positives de l'équation de Klein-Gordon.

(19.94)

C'est bien par ces solutions que l'on représente habituellement, en mécanique quantique, les particules sans spin.

Particule non relativiste de spin 1/2

(19.95) Ainsi que nous l'avons vu en (18.55), on peut quantifier cette particule à l'aide de la quantification (18.45) de la sphère S_2 et de celle de la particule sans spin, par l'algorithme (18.52) du produit direct. Ce qui conduit aux résultats suivants :

(19.96)

| | | | |
|--|-------------------------------------|--|---|
| $\eta \equiv \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \zeta \end{pmatrix}$ | $\zeta \in C^2, \ \zeta\ \equiv 1$ | $y \equiv \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$ | $u_j = \bar{\zeta} \sigma_j \zeta; \ \mathbf{u}\ \equiv 1$ |
| (notations (18.43)) | | | |

| | |
|--|--|
| $\xi \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ z \end{pmatrix}$ | $\mathbf{p} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ |
| $z \equiv \zeta e^{imv^2t/2} \quad z \in C^2, \ \mathbf{z}\ \equiv 1$ | |

(19.97)
$$\varpi(d\eta) \equiv \langle m\mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle - \frac{1}{2} m v^2 dt + \text{Re} \left(\frac{\bar{\zeta} d\zeta}{i} \right) \equiv m \langle \mathbf{v}, d\mathbf{p} \rangle + \text{Re} \left(\frac{\bar{z} dz}{i} \right)$$

Soit E_1 l'ensemble des Ψ tels que

98)
$$\Psi(\xi) \equiv \bar{\Psi} \cdot \mathbf{z} e^{im\langle \mathbf{v}, \rho \rangle} \equiv \bar{\Psi} \cdot \zeta e^{im[\langle \mathbf{v}, \mathbf{r} \rangle - v^2 t/2]}$$

la variable ψ , prenant ses valeurs dans C^2 , étant une fonction différentiable de v seule.

Il est facile de vérifier les conditions (19.65) : E_1 est donc un *sous-espace vectoriel de l'espace de Planck*.

99) On peut vérifier que E_1 est invariant par les opérateurs $\widehat{\mu \cdot Z}$, Z appartenant à l'algèbre de Lie du groupe de Galilée ; en particulier donc par les opérateurs « moment cinétique », « impulsion », « position », « énergie » que le lecteur pourra calculer ; comme dans le cas de la particule sans spin, on peut associer à Ψ la variable

100)
$$\tilde{\Psi} \equiv \int_{R^3} \Psi e^{-im[\langle \mathbf{v}, \mathbf{r} \rangle - v^2 t/2]} \varphi(d\mathbf{v}) \quad (\text{cf. (19.72)})$$

101) $\tilde{\Psi}$ est un élément de C^2 dont les deux composantes sont solutions de l'équation de Schrödinger ; on reconnaît la description de l'électron proposée par Pauli.

102) Ainsi que le montre le théorème de décomposition barycentrique (13.34), on peut faire opérer le groupe $SO(3)$ sur U en dehors du groupe de Galilée (cette opération consiste à faire tourner le spin $\mathbf{u}/2$ sans modifier la trajectoire) ; les moments correspondants sont simplement les composantes du spin ; choisissons la troisième composante $\frac{1}{2} u_3 \equiv \frac{1}{2} \bar{\mathbf{z}} \cdot \sigma_3 \cdot \mathbf{z}$; on trouve facilement

$$\delta_{u_3/2} \rho \equiv 0, \quad \delta_{u_3/2} \mathbf{v} \equiv 0, \quad \delta_{u_3/2} \mathbf{z} \equiv \frac{i}{2} \sigma_3 \mathbf{z}$$

ce qui montre que $\delta_{u_3/2}$ conserve, lui aussi, l'espace E_1 ; on voit sur (19.98) et (19.100)

que l'observable associé $\hat{u}_3/2$ change Ψ en $-\frac{1}{2} \sigma_3 \Psi$, $\tilde{\Psi}$ en $-\frac{1}{2} \sigma_3 \tilde{\Psi}$; en se reportant à l'expression (18.43) des matrices de Pauli, on voit que cet opérateur admet les valeurs propres $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, et que les vecteurs propres correspondants sont les Ψ (ou les $\tilde{\Psi}$) ayant une seule composante non nulle ; c'est bien ainsi que se comportent les opérateurs de spin en mécanique quantique.

L'espace E_1 ne constitue pas l'espace de Planck tout entier : on vérifie aussi les conditions (19.65) pour les Ψ :

$$\Psi(\xi) \equiv T(\mathbf{z})(\mathbf{z})(\mathbf{z}) e^{im\langle \mathbf{v}, \rho \rangle}$$

T étant un opérateur trilinéaire dépendant de \mathbf{v} seulement ⁽¹⁾ ; or ces solutions ne semblent pas s'interpréter physiquement : on voit que la condition de Planck ne suffit pas à sélectionner les « vecteurs d'état » qui s'observent dans la nature.

Particule relativiste de spin 1/2

(19.104) En utilisant la quantification (18.80), on trouve :

(19.105)
$$\eta \equiv \begin{pmatrix} X \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \varpi(d\eta) \equiv \text{Re}(-i\bar{\zeta}d\xi) - m\xi\gamma(dX)\xi$$

X étant un point de l'espace-temps, ζ un spineur de Dirac (18.59) vérifiant (notations (18.62, 63)) :

(19.106)
$$\bar{\zeta}\zeta \equiv 1, \quad \bar{\zeta}\gamma_5\zeta \equiv 0 ;$$

rappelons qu'il existe un vecteur I , unitaire de genre futur, fonction de ζ , tel que (18.67, 68) :

(19.107)
$$\bar{\zeta} \cdot \gamma(dX) \cdot \zeta \equiv \bar{I} \cdot dX ;$$

on vérifie les conditions de Planck sur l'espace E_1 des Ψ :

(19.108)
$$\Psi(\xi) \equiv \bar{\Psi} \cdot \zeta e^{-im\bar{I} \cdot X}$$

Ψ étant un spineur de Dirac fonction de I seulement.

Notons que cette relation ne définit pas complètement l'application $I \mapsto \Psi$; en effet on peut déduire de (19.106) et (19.107) la relation

(19.109)
$$\gamma(I)\zeta \equiv \zeta ;$$

comme $\gamma(I)^2 = 1$ (18.64), $\frac{1 + \gamma(I)}{2}$ et $\frac{1 - \gamma(I)}{2}$ sont des projecteurs supplémentaires ; en décomposant Ψ sur leurs espaces de valeurs, et en tenant compte du fait que $\gamma(I)$ est hermitien (18.64), on voit que la seconde compo-

⁽¹⁾ Et, plus généralement, pour les Ψ de l'espace E_p ($p = 1, 2, \dots$) :

◇
$$\Psi(\xi) \equiv T(\mathbf{z}) \dots (\mathbf{z})(\bar{\mathbf{z}}) \dots (\mathbf{z}) e^{im\langle \mathbf{v}, \rho \rangle}$$

le tenseur T étant p fois linéaire en \mathbf{z} , $p - 1$ fois en $\bar{\mathbf{z}}$. Notons que ces espaces ne sont pas disjoints, à cause de la relation $\bar{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{z} \equiv 1$; on peut les rendre disjoints en supposant que les coefficients de T sont tels que ◇ soit une fonction harmonique de \mathbf{z} dans C^2 .

sante donne une contribution nulle à l'expression (19.108); on peut donc supposer Ψ réduit à sa première composante, ce qui s'écrit

$$\Psi \equiv \gamma(I) \Psi \quad (1)$$

Alors la relation entre Ψ et $I \mapsto \Psi$ devient injective; dans le cas où $I \mapsto \Psi$ est à support compact (sur la variété H (19.88) décrite par I), on peut définir une variable $\tilde{\Psi}$ par

$$\tilde{\Psi} \equiv \int_H \Psi e^{im\bar{I}.X} \varphi(dI) \quad (\text{cf. (19.90)});$$

en dérivant sous le signe \int par rapport à X , on trouve

$$\delta\tilde{\Psi} \equiv im \int_H \bar{I} \cdot \delta X \Psi e^{im\bar{I}.X} \varphi(dI)$$

compte tenu de (19.110), on en déduit l'équation de Dirac (2)

$$\sum_{\mu=1}^4 \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\Psi} - im\tilde{\Psi} \equiv 0 \quad (3)$$

Notons que l'on aurait trouvé une seconde famille de solutions de la même équation de Dirac en remplaçant, dans (19.112), H par la variété opposée H' (19.88); les solutions trouvées ici n'ont que des fréquences positives (voir (19.94)); ce sont bien les solutions à fréquences positives de l'équation de Dirac que l'on utilise habituellement pour la description quantique d'une particule de spin 1/2 (4).

Nous avons donné en (18.174, 175) deux représentations linéaires $M \mapsto \underline{M}_\mathcal{E}$, $M \mapsto \underline{M}_E$ du groupe $SL(2)_C$ sur l'espace \mathcal{E} des spineurs et sur

(1) Dans un référentiel où la vitesse est faible, $\gamma(I)$ est voisin de γ_4 ; en se reportant à l'expression (18.62) de γ_4 , on voit que les demi-spineurs Ψ, Ψ'' (18.60) constituant Ψ sont voisins; ce qui permet de faire le lien avec la théorie non relativiste ci-dessus, qui n'utilise qu'un « spineur à 2 composantes ».

(2) On pose $\gamma^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu} \gamma_\nu$; donc $\gamma^j = -\gamma_j$ ($j = 1, 2, 3$), $\gamma^4 = \gamma_4$.

(3) On déduit facilement de cette équation que les composantes de $\tilde{\Psi}$ sont solutions de l'équation de Klein-Gordon; ce qui se déduit aussi directement de (19.111).

(4) Voir: D. Kastler, *Introduction à l'électrodynamique quantique* (Dunod).

l'espace-temps E ; nous avons construit (18.176) une extension quantifiable G' du groupe de Poincaré, dont un élément

$$a \equiv \begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} M \in SL(2)_C \\ C \in E \end{matrix} \quad (19.116)$$

opère sur l'espace-temps selon

$$a_E(X) \equiv \underline{M}_E X + C \quad (19.117)$$

et sur la variété W selon

$$a_W \begin{pmatrix} X \\ \zeta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_E(X) \\ \underline{M}_\mathcal{E} \zeta \end{pmatrix}. \quad (19.118)$$

Ce groupe laisse invariant l'espace E_1 ; le calcul montre en effet que l'action de a consiste à remplacer $I \mapsto \Psi$ par $I^* \mapsto \Psi^*$:

$$I^* \equiv \underline{M}_E I, \quad \Psi^* \equiv \underline{M}_\mathcal{E} \Psi e^{-im\bar{I}^*.C} \quad (19.119)$$

et par conséquent $X \mapsto \tilde{\Psi}$ par $X^* \mapsto \tilde{\Psi}^*$:

$$X^* \equiv a_E(X) \quad \tilde{\Psi}^* \equiv \underline{M}_\mathcal{E} \tilde{\Psi}. \quad (19.120)$$

C'est donc le groupe G' (et non le groupe de Poincaré G) qui opère sur l'espace des solutions de l'équation de Dirac; ce paradoxe classique de la mécanique quantique trouve ici une explication naturelle (1).

Comme dans le cas non relativiste (19.103), on peut construire toute une famille de sous-espaces E_2, E_3, \dots de l'espace de Planck, disjoints de E_1 , et tous invariants par le groupe G' .

Particule de masse nulle, de spin 1/2

En se reportant à la quantification (18.96), on pose

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} X \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (19.122)$$

ζ étant encore un spineur de Dirac qui vérifie (2)

$$\bar{\zeta}\zeta \equiv 1 \quad \bar{\zeta}\gamma_5\zeta \equiv 0; \quad (19.124)$$

(1) Noter la différence avec le cas (19.80): ce n'est pas la cohomologie qui empêche G d'opérer, mais la structure de la variété quantique Y .

(2) ζ est noté ψ en (18.83).

le vecteur isotrope du genre futur I défini par (18.84)

125)
$$\bar{I} \cdot dX \equiv \bar{\zeta} \gamma(dX) \frac{1 + i\gamma_5}{\sqrt{2}} \zeta$$

coïncide avec l'impulsion-énergie P (nous supposons le signe de l'énergie égal à $+1$).

La forme quantique est définie par

126)
$$\varpi(d\eta) \equiv \varpi(d\xi) \equiv \chi \operatorname{Re}(-i\bar{\zeta} d\zeta) - \bar{I} \cdot dX,$$

$\chi = \pm 1$ étant l'hélicité.

On trouve facilement l'espace de Planck : ψ étant un spineur, fonction différentiable de I sur le « cône de lumière » K d'équation

127)
$$\bar{I} \cdot I \equiv 0, \quad I \text{ de genre futur}$$

et vérifiant

128)
$$\gamma(I) \psi \equiv 0, \quad \gamma_5 \psi \equiv \chi i\psi$$

on pose

129)
$$\Psi(\xi) \equiv \begin{cases} \bar{\psi} \cdot \zeta e^{-i\bar{I} \cdot X} & \text{si } \chi = +1 \\ \bar{\zeta} \cdot \psi e^{-i\bar{I} \cdot X} & \text{si } \chi = -1. \end{cases}$$

Il existe, sur le cône de lumière K , un champ de densités φ invariant par le groupe de Lorentz, que l'on peut définir par

130)
$$\varphi(dI) \equiv \frac{\varphi(d\mathbf{p})}{E} \quad (E \equiv \|\mathbf{p}\|; \text{ comparer avec (19.92)})$$

comme précédemment, on suppose le support de $I \mapsto \psi$ compact, et on pose

131)
$$\tilde{\Psi} \equiv \int_K \psi e^{i\bar{I} \cdot X} \varphi(dI);$$

grâce à (19.128), on constate que $\tilde{\Psi}$ est solution à fréquences positives du système :

132)

| | |
|---|---|
| $\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\Psi} \equiv 0 \quad (1)$ | $\gamma_5 \tilde{\Psi} \equiv \chi i\tilde{\Psi} \quad (2)$ |
|---|---|

(1) Cette équation a pour conséquence l'équation des ondes $\square \tilde{\Psi} \equiv 0$.

(2) Cette équation exprime que l'un des demi-spineurs composant $\tilde{\Psi}$ (18.60) est nul ; c'est pourquoi on dit que $\tilde{\Psi}$ est un spineur à deux composantes.

(19.133) Ce sont effectivement les solutions à fréquences positives de ces équations que l'on utilise — depuis les expériences suggérées par Lee et Yang sur la « non-conservation de la parité » — pour décrire les *neutrinos* (parmi lesquels les deux hélicités sont effectivement observées).

(19.134) On notera que les difficultés rencontrées en (19.103), (19.121) n'apparaissent pas : la condition de Planck est, ici, suffisante pour trouver les bonnes équations d'onde (1).

Particule de masse nulle, de spin 1

(19.135) Nous traiterons le cas où le *signe de l'énergie* est $+1$, et où la particule peut être *polarisée* aussi bien à droite qu'à gauche (Définition (14.28) ; ceci permet de faire opérer le groupe de Poincaré *orthochrone* (à deux composantes) comme groupe dynamique.

Les résultats (14.77), (18.18), la quantification (18.106) du cas connexe, montrent que l'on peut poser

(19.136)
$$\eta \equiv \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ P \\ X \\ \chi \end{pmatrix} \quad \varpi(d\eta) \equiv \chi \bar{S}_2 dS_1 - \bar{P} \cdot dX$$

$\chi = \pm 1$ étant l'hélicité de la particule, X un point de l'espace-temps E , l'impulsion-énergie P un vecteur du cône de lumière K (19.127) :

(19.137)
$$\bar{P} \cdot P \equiv 0 \quad P \text{ de genre futur}$$

les vecteurs S_1 et S_2 vérifiant

(19.138)
$$\bar{S}_1 \cdot S_1 \equiv \bar{S}_2 \cdot S_2 \equiv -1 \quad \bar{P} \cdot S_1 \equiv \bar{P} \cdot S_2 \equiv \bar{S}_1 \cdot S_2 \equiv 0.$$

Contrairement au cas du spin 1/2, le groupe de Poincaré est *quantifiable* (au sens 18.151) ; on obtient cette quantification en posant, pour

$$a \equiv \begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{notation (13.51) ; } L \text{ orthochrone})$$

(1) Ce fait peut être rapproché du suivant : la dimension du feuilletage isotrope est égale à 3 dans les deux cas ; si la masse est nulle, la dimension de l'espace des mouvements est 6, le feuilletage est *self-orthogonal* (8.10), les u_i donnant naissance au feuilletage (19.32) forment ce qu'on appelle une « observation maximale » ; ce n'est pas le cas si la masse n'est pas nulle, car la dimension de l'espace des mouvements est 8.

139)

$$\underline{a}_w \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ P \\ X \\ \chi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} LS_1 \\ LS_2 \chi_s(a) \\ LP \\ LX + C \\ \chi_s(a) \chi \end{pmatrix}$$

$\chi_s(a)$ étant le caractère spatial de a (14.73).

Le calcul montre ⁽¹⁾ que l'espace de Planck est l'ensemble des Ψ :

40)

$$\Psi(\xi) \equiv \bar{A}[S_1 + i\chi S_2] e^{-i\bar{P}\cdot X}$$

A étant un élément de E_C , prolongement complexe euclidien de E :

41)

$$A \equiv A' + iA'' ; \quad \bar{A} = \bar{A}' - i\bar{A}'' ; \quad A', A'' \in E$$

tel que

42)

A est fonction différentiable de P sur le cône de lumière K ; $\bar{P}\cdot A \equiv 0$.

A n'est d'ailleurs défini par (19.140) qu'à une transformation « de jauge » près :

43)

$$A \mapsto A + P f(P)$$

f étant une fonction complexe différentiable sur K . ■

⁽¹⁾ On vérifie d'abord facilement que l'on doit avoir

$$\Psi(\xi) \equiv \varphi e^{-i\bar{P}\cdot X}$$

φ étant une fonction complexe de S_1, S_2, P, χ , différentiable sur la variété définie par les équations (19.137, 138), invariante par les substitutions

$$S_1 \rightarrow S_1 + P\alpha, \quad S_2 \rightarrow S_2 + P\beta, \quad P \rightarrow P, \chi \rightarrow \chi \quad (\text{Cf. 18.105})$$

et telle que

$$\diamond \quad [\delta S_1 = -S_2 \chi, \quad \delta S_2 = S_1 \chi, \quad \delta P = 0] \Rightarrow [\delta \varphi = i\varphi]$$

P étant donné, φ dépend seulement de \hat{S}_1, \hat{S}_2 et χ (en désignant, pour tout vecteur Z orthogonal à P , par \hat{Z} son orbite selon le groupe des translations parallèles à P ; comme P est isotrope, les \hat{Z} forment un espace \mathcal{E}_2 euclidien négatif de dimension 2, dont $[\hat{S}_1, \hat{S}_2]$ constitue une base orthonormale); à cause de \diamond , on vérifie que φ se met sous la forme $\Gamma_+(\hat{S}_1 + i\chi\hat{S}_2)$, Γ_1 et Γ_{-1} étant des éléments de \mathcal{E}_2^* ; ou, sous la forme équivalente $\varphi \equiv [\bar{B}' - i\bar{B}''][S_1 + i\chi S_2]$, B' et B'' étant des vecteurs de \mathcal{E}_2 déterminés par cette relation. On peut donc choisir deux vecteurs A', A'' de E , orthogonaux à P , tels que $B' = \hat{A}', B'' = \hat{A}''$; ce choix pouvant être fait globalement et différentiablement (par exemple en annulant les composantes temporelles de A' et A''); on pose $A \equiv A' + iA''$.

Le groupe de Poincaré quantifié (19.139) opère sur cet espace de Planck : il suffit de faire la substitution

$$(19.144) \quad [P \mapsto A] \rightarrow [L^{-1} P \mapsto L \cdot A e^{-i\bar{P}\cdot C}] . \blacksquare$$

— En supposant compact le support de $P \mapsto A$, on peut poser

$$(19.145) \quad \tilde{A} \equiv \int_K A e^{i\bar{P}\cdot X} \varphi(dP)$$

φ étant la densité définie sur le cône de lumière K en (19.130); on constate facilement (grâce à (19.117) et (19.122)) que \tilde{A} est un vecteur de E_C , fonction différentiable de X , vérifiant l'équation des ondes

(19.146)

$$\square \tilde{A} \equiv 0$$

et l'équation de Lorentz

(19.147)

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu \equiv 0$$

sur lequel les transformations de jauge (19.143) opèrent selon

(19.148)

$$\tilde{A}_\mu \mapsto \tilde{A}_\mu + \partial_\mu u$$

en posant

(19.149)

$$u \equiv -i \int_K f(P) e^{i\bar{P}\cdot X} \varphi(dP) ;$$

u est aussi une solution de l'équation des ondes :

(19.150)

$$\square u \equiv 0 .$$

(19.151)

Comme dans les exemples ci-dessus, on voit que \tilde{A} (et u) sont des solutions à fréquences positives de l'équation des ondes; or, en mécanique quantique, on représente effectivement un photon par un champ de vecteurs complexes, $X \mapsto \tilde{A}$, solution à fréquence positive de l'équation des ondes, vérifiant la condition de Lorentz (19.147), et définie à une « transformation de jauge de seconde espèce » (19.148) près ⁽¹⁾. ■

⁽¹⁾ Voir D. Kastler (ouvrage cité, p. 376).

Pour trouver comment le groupe de Poincaré quantifié (19.136) opère sur $X \mapsto \tilde{A}$, il suffit de porter (19.144) dans (19.145); en se souvenant que la mesure définie par φ est invariante par le groupe de Lorentz (19.130), on trouve la substitution

$$9.152) \quad [X \mapsto \tilde{A}] \mapsto [a^{-1}_E(X) \mapsto L \cdot \tilde{A}]$$

c'est-à-dire que le groupe de Poincaré orthochrone quantifié opère sur $X \mapsto \tilde{A}$ comme sur un *champ de vecteurs* ⁽¹⁾. ■

On peut si l'on veut éviter les transformations de jauge en introduisant la 2-forme complexe F , fonction de P :

$$9.153) \quad F_{\mu\nu} \equiv i[P_\mu A_\nu - P_\nu A_\mu]$$

visiblement invariante par ces transformations, et qui caractérise Ψ par la formule :

$$9.154) \quad -iP_\mu \Psi(\xi) \equiv \sum_\nu \bar{F}_{\mu\nu} \cdot [S_1^\nu + i\chi S_2^\nu] e^{i\bar{P} \cdot X};$$

F vérifie le système

$$9.155) \quad \begin{cases} \sum_\mu P_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0 & (2) \\ P_\mu F_{\nu\rho} + P_\nu F_{\rho\mu} + P_\rho F_{\mu\nu} \equiv 0; \end{cases}$$

si l'on pose

$$9.156) \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \int_K F_{\mu\nu} e^{i\bar{P} \cdot X} \varphi(dP)$$

on voit que

$$9.157) \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu$$

et que

$$9.158) \quad \begin{cases} \sum_\mu \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0 \\ \partial_\mu \tilde{F}_{\nu\rho} + \partial_\nu \tilde{F}_{\rho\mu} + \partial_\rho \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv 0. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Formule (2.38); on opère séparément sur la partie réelle et sur le coefficient de i du vecteur complexe \tilde{A} .

⁽²⁾ On pose $F^{\mu\nu} \equiv \sum_{\mu',\nu'} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu'\nu'}$.

(19.159) Les $\tilde{F}_{\mu\nu}$ sont donc les composantes d'une 2-forme complexe (la forme « champ électromagnétique »), admettant la 1-forme de composantes \tilde{A}_μ comme *potentiel*, au sens (9.14) (\tilde{A} s'appelle « potentiel électromagnétique ») et vérifiant les *équations de Maxwell* (19.158) ⁽¹⁾. ■

On peut aussi donner une description de l'espace de Planck au moyen de solutions réelles \hat{A} , \hat{F} des équations d'ondes (19.146, 147, 148, 150, 157, 158); il suffit évidemment de poser

$$9.160) \quad \begin{cases} \hat{A} \equiv \text{Re}(\tilde{A}) \\ \hat{F} \equiv \text{Re}(\tilde{F}) \end{cases}$$

ces fonctions vérifient alors les équations classiques de l'électromagnétisme dans le vide.

(19.161) A première vue, il semble que ces solutions réelles ne définissent pas complètement le vecteur d'état Ψ ; en détaillant la définition des composantes $\hat{A}_\mu = \frac{1}{2}[\tilde{A}_\mu + \bar{\tilde{A}}_\mu]$, $\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\tilde{F}_{\mu\nu} + \bar{\tilde{F}}_{\mu\nu}]$, compte tenu de (19.145), (19.156), on voit cependant que les champs réels comportent à la fois des fréquences négatives et des fréquences positives, et qu'il suffit de *filtrer* les fréquences positives (au sens usuel de l'analyse harmonique appliquée) pour reconstituer les champs complexes, donc Ψ .

ASSEMBLÉES DE PARTICULES

(19.162) Soit U la variété des mouvements d'une particule d'un type donné ⁽²⁾; nous allons décrire une *assemblée* ⁽³⁾ de telles particules (c'est-à-dire un système composé d'un nombre indéterminé de particules indiscernables), par son espace de mouvements, que nous appellerons *variété de Fock* ⁽⁴⁾ et que nous noterons U_Φ .

(19.163) Comme ensemble, U_Φ est simplement l'ensemble des *parties finies* de U ; il se décompose donc en une somme de variétés disjointes U_n (décrivant chacune une partie composée de n mouvements, c'est-à-dire un système comportant n particules); U_Φ est donc une variété *composée* (16.8, 9, 10).

⁽¹⁾ Exercices : en introduisant les vecteurs (de C^3) \mathbf{E} et \mathbf{B} définis par

$$\tilde{F}(dX)(\delta X) \equiv \langle d\mathbf{r} \delta t - \delta\mathbf{r} dt, \mathbf{E} \rangle + \langle d\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}, \mathbf{B} \rangle$$

transcrire tridimensionnellement les équations de Maxwell (19.158), et leur donner l'écriture usuelle. Dédire de ces équations l'équation des ondes $\square \tilde{F} \equiv 0$.

⁽²⁾ Il ne s'agit pas nécessairement de particules *élémentaires*, mais de systèmes à priori quelconques (par exemple des particules α), dont on supposera les actions mutuelles négligeables.

⁽³⁾ Mot français.

⁽⁴⁾ Nous l'avons déjà décrite, dans le cas des photons, à propos du rayonnement du corps noir (17.152).

U_0 est la variété de dimension 0, comportant le seul élément \emptyset (la partie vide de U); U_1 s'identifie canoniquement à U ; la structure de variété symplectique de U_n ($n \geq 2$) a déjà été donnée en (15.45); rappelons-la.

Si on appelle S_n le groupe des permutations des entiers $1, 2, \dots, n$ (« groupe symétrique d'ordre n »), on fait opérer S_n sur le produit direct U^n en posant

$$(19.164) \quad \Pi^{-1} U^n \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_{\Pi(1)} \\ \dots \\ x_{\Pi(n)} \end{pmatrix} \quad \Pi \in S_n; \quad x_1, \dots, x_n \in U$$

désignons par

$$(19.165) \quad x \equiv \Phi_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

l'orbite de $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ suivant ce groupe (Fig. 19. II).

(19.166) Si on désigne par \tilde{U}^n l'ensemble des $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que les x_j soient tous différents. \tilde{U}^n est un ouvert de U^n , stable par S_n ; S_n est d'ailleurs un groupe discret de difféomorphismes (1.45); on peut donc donner au quotient $U_n = \tilde{U}^n / S_n$, image de \tilde{U}^n par Φ_n , une structure de variété, telle que Φ_n soit différentiable : c'est cette variété U_n qui constitue l'espace des mouvements

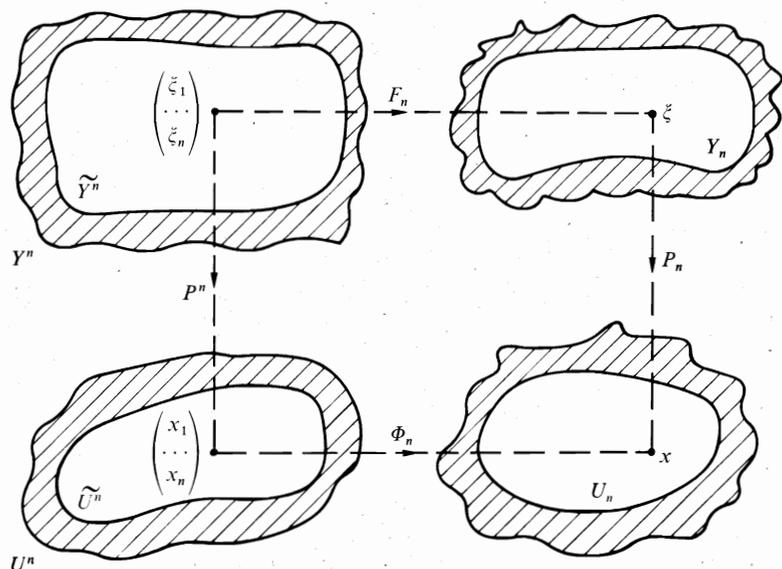


Fig. 19. II.

d'un système à n particules ⁽¹⁾; sa forme de Lagrange admet celle de \tilde{U}^n (induite de celle de U^n , elle-même définie en (9.6)), comme image réciproque par Φ_n .

(19.167) — Notons que $(\tilde{U}^n, S_n, \Phi_n)$ constitue un revêtement de U_n ; dans les cas de particules élémentaires que nous avons étudiés ci-dessus, \tilde{U}^n est simplement connexe, le revêtement est donc universel (1.55). ■

Soit (Y, P) la quantification de U ; pour quantifier la variété de Fock U_Φ , il suffit de quantifier séparément chacune des U_n (18.18).

La quantification (Y_0, P_0) de U_0 est immédiate :

$$(19.168) \quad Y_0 = T; \quad P_0(z) \equiv \emptyset \quad (z \in T); \quad \varpi(dz) \equiv \frac{dz}{iz}$$

Celle de $U_1, (Y_1, P_1)$, est supposée déjà connue ($Y_1 = Y, P_1 = P$); quant aux U_n ($n \geq 2$), elles possèdent deux quantifications non équivalentes, associées aux deux caractères χ_+, χ_- du groupe S_n (18.138); χ désignant le caractère choisi parmi eux, on peut décrire la quantification (Y_n, P_n) comme suit.

Soit \tilde{Y}^n l'ensemble des $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in Y^n$ tels que les $P(\xi_j)$ soient tous différents;

\tilde{Y}^n peut être considérée comme l'image réciproque de \tilde{U}^n par l'application P^n :

$$(19.169) \quad P^n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} P(\xi_1) \\ \dots \\ P(\xi_n) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

on définit sur Y^n , ou sur \tilde{Y}^n , une relation d'équivalence \sim :

$$(19.170) \quad \left[\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists \Pi \in S_n; \exists z_1, \dots, z_n \in T; \\ z_1 \dots z_n = \chi(\Pi); \\ \xi'_j = z_{jY}(\xi_{\Pi(j)}) \quad \forall j \end{array} \right]$$

en désignant par

$$(19.171) \quad \xi \equiv F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾ Le quotient par le groupe fait passer — du point de vue ensembliste — du n -uplet des x_j à l'ensemble des x_j ; ainsi se formule mathématiquement l'indiscernabilité des particules.

la classe de $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ selon cette relation \sim , la variété Y_n est l'image par F_n de \tilde{Y}^n (Fig. 19.II); l'application P_n est définie par

19.172)
$$x \equiv P_n(\xi)$$

c'est-à-dire par la commutativité du diagramme de la figure 19.II :

19.173)
$$P_n \cdot F_n = \Phi_n \cdot P^n ;$$

la forme quantique de Y_n est donnée par

19.174)
$$\varpi(d\xi) \equiv \sum_j \varpi_j(d\xi_j)$$

ϖ_j désignant la forme quantique de Y prise au point ξ_j .

19.175) — Pour achever la quantification de U_Φ , il faut choisir le caractère χ pour chaque valeur de n ; il existe quelques raisons de penser qu'il est toujours le même, quel que soit n ⁽¹⁾; nous traiterons donc les deux cas $\chi \equiv \chi_+$ (resp. $\chi \equiv \chi_-$), en disant que les particules sont des *bosons* (resp. de *fermions*); ce sont effectivement les seuls qu'on rencontre dans la nature ⁽²⁾. Finalement, la quantification (Y_Φ, P_Φ) de U_Φ sera définie par

9.176)
$$\begin{cases} Y_\Phi = \text{somme des } Y_n \text{ (} n = 0, 1, 2, \dots \text{) définis ci-dessus;} \\ P_\Phi = \text{prolongement commun des } P_n. \end{cases}$$

CRÉATEURS ET ANNIHILATEURS

19.177) Nous allons étudier l'espace préhilbertien $\mathcal{H}(Y_\Phi)$ associé à la variété quantique Y_Φ (Définitions (18.179, 183)), et construire sur cet espace des opérateurs ayant des propriétés algébriques remarquables.

19.178) Soit Ψ un élément de l'espace $\mathcal{H}(Y_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); nous conviendrons de l'identifier avec son prolongement par 0 sur les $Y_{n'}$ ($\forall n' \neq n$); ce prolongement est un élément de $\mathcal{H}(Y_\Phi)$.

Trivial.

⁽¹⁾ Sinon, le comportement d'un système dépendrait du nombre de particules du même type susceptibles d'exister dans le reste de l'univers.

⁽²⁾ Dans le cas de particules non élémentaires, il pourrait arriver que \tilde{U}^n ne soit pas simplement connexe: le groupe d'homotopie de U_n n'étant plus égal à S_n , pourrait posséder plus de deux caractères, ce qui conduirait à une quantification d'un type nouveau.

THÉORÈME

Soit Ψ un élément de $\mathcal{H}(Y_\Phi)$; alors Ψ se met, d'une seule façon, sous forme d'une somme finie

(19.179)
$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \dots + \Psi_m,$$

chacun des Ψ_n appartenant à $\mathcal{H}(Y_n)$ ⁽¹⁾; on obtient cette décomposition en désignant par Ψ_n la restriction de Ψ à Y_n .

Puisque le support de Ψ est compact (18.179), il possède un recouvrement fini extrait du recouvrement (Y_0, Y_1, \dots) ; le reste est trivial.

THÉORÈME, DÉFINITION

$\mathcal{H}(Y_0)$ est un espace vectoriel de dimension 1, composé des multiples (complexes) de Ω :

(19.180)
$$\Omega(z) \equiv z ;$$

Ω , considéré (grâce à (19.178)) comme élément de $\mathcal{H}(Y_\Phi)$, est un vecteur d'état ⁽²⁾; on l'appelle le *vide*.

Trivial.

THÉORÈME

Si $\Psi \in \mathcal{H}(Y_n)$ [$n \geq 2$], la fonction $\hat{\Psi} = \Psi \cdot F_n$ (Fig. 19.II) vérifie les relations

| | |
|--|--------------------------------|
| $\hat{\Psi}$ est différentiable, à support compact, sur \tilde{Y}^n | |
| $\hat{\Psi} \begin{pmatrix} \underline{z_1}(\xi_1) \\ \dots \\ \underline{z_n}(\xi_n) \end{pmatrix} \equiv z_1 \times \dots \times z_n \hat{\Psi} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ | $z_j \in T$ $\xi_j \in Y$ |
| $\hat{\Psi} \begin{pmatrix} \xi_{\Pi(1)} \\ \dots \\ \xi_{\Pi(n)} \end{pmatrix} \equiv \chi(\Pi) \hat{\Psi} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (3)$ | $\Pi \in S_n$ $\xi_j \in Y$ |

⁽¹⁾ On dit que $\mathcal{H}(Y_\Phi)$ est la *somme directe* des $\mathcal{H}(Y_n)$.
⁽²⁾ Avec la convention, déjà appliquée en (17.153), qui consiste à définir la mesure de Liouville de $U_0 = \{\emptyset\}$ par le fait que sa masse est égale à 1.
⁽³⁾ $\hat{\Psi}$ est donc *symétrique* dans le cas des bosons, *antisymétrique* dans le cas des fermions.

9.181) Réciproquement, si $\hat{\Psi}$ vérifie \diamond , il existe un élément Ψ de $\mathcal{H}(Y_n)$, et un seul, tel que

$$\Psi \cdot F_n = \hat{\Psi}.$$

La vérification est laissée aux bons soins du lecteur ; utiliser (19.170), qui permet notamment de montrer que F_n est étalée, et (18.51).

THÉORÈME, DÉFINITION

(I) Soit ξ un point de Y ; il existe un opérateur $a^-(\xi)$, linéaire sur $\mathcal{H}(Y_\phi)$, qui applique chaque $\mathcal{H}(Y_n)$ dans $\mathcal{H}(Y_{n-1})$, et $\mathcal{H}(Y_0)$ sur 0 ; $a^-(\xi)$ est défini par ⁽¹⁾

| | | |
|-----|---|--|
| (a) | $a^-(\xi)(\Psi)(z) \equiv z\Psi(\xi)$ | $z \in Y_0 (= T)$ |
| (b) | $a^-(\xi)(\Psi)\left(F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}\right) \equiv \Psi\left(F_{n+1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \\ \xi \end{pmatrix}\right)$ | $\Psi \in \mathcal{H}(Y_\phi)$ $n = 1, 2, 3, \dots$ |

$a^-(\xi)$ s'appelle l'annihilateur associé à ξ .

(II) Soit θ un élément de $\mathcal{H}(Y)$; il existe un opérateur $a^+(\theta)$, linéaire sur $\mathcal{H}(Y_\phi)$, qui applique chaque $\mathcal{H}(Y_n)$ dans $\mathcal{H}(Y_{n+1})$; $a^+(\theta)$ est défini par :

| | | |
|-----|--|---|
| (a) | $a^+(\theta)(\Psi)(z) \equiv 0$ | $\Psi \in \mathcal{H}(Y_\phi)$; $z \in Y_0 (= T)$ |
| (b) | $a^+(\theta)(\Psi)(\xi_1) \equiv \theta(\xi_1)\Psi(1)$ | $\xi_1 \in Y_1 ; n = 2, 3, \dots$ |
| (c) | $a^+(\theta)(\Psi)\left(F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}\right) \equiv \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\Pi \in S_n} \chi(\Pi) \Psi\left(F_{n-1} \begin{pmatrix} \xi_{\Pi(1)} \\ \dots \\ \xi_{\Pi(n-1)} \end{pmatrix}\right) \theta(\xi_{\Pi(n)})$ | |

$a^+(\theta)$ s'appelle le créateur associé à θ ; a^+ est bilinéaire.

⁽¹⁾ On convient de poser $F_1(\xi_1) \equiv \xi_1$.

(19.182) (III) a^+ et a^- vérifient les identités :

| | | |
|-----|---|--|
| (a) | $a^-(\xi)(\Omega) \equiv 0$ | $\xi, \xi' \in Y$ |
| (b) | $a^-(\xi)(\theta) \equiv \theta(\xi)\Omega$ | (c) $a^+(\theta)(\Omega) \equiv \theta$ $\theta, \theta' \in \mathcal{H}(Y)$ |
| (d) | $a^-(\xi) \cdot a^-(\xi') - \varepsilon a^-(\xi') \cdot a^-(\xi) \equiv 0$ | |
| (e) | $a^+(\theta) \cdot a^+(\theta') - \varepsilon a^+(\theta') \cdot a^+(\theta) \equiv 0$ | $\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{(bosons)} \\ -1 & \text{(fermions)} \end{cases}$ |
| (f) | $a^-(\xi) \cdot a^+(\theta) - \varepsilon a^+(\theta) \cdot a^-(\xi) \equiv \underline{\theta(\xi)}$ ⁽¹⁾ | |

\heartsuit

Pour vérifier que $a^-(\xi)(\Psi)$, $a^+(\theta)(\Psi)$, définis par \heartsuit et \heartsuit , sont bien des éléments de $\mathcal{H}(Y_\phi)$, il suffit d'appliquer le critère (19.181) ; le reste du théorème s'établit par des vérifications longues, mais élémentaires. Il est commode d'établir préalablement la formule

$$a^+(\theta)(\Psi)\left(F_{n+1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \\ \xi \end{pmatrix}\right) \equiv \Psi \circ F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \theta(\xi) + \varepsilon \left[\Psi \circ F_n \begin{pmatrix} \xi \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \theta(\xi_1) + \dots + \Psi \circ F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_{n-1} \\ \xi \end{pmatrix} \theta(\xi_n) \right]$$

(19.183)

qui simplifie la vérification de $(\heartsuit f)$; de même la formule

(19.184)

$$\Psi\left(F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}\right) \equiv [a^-(\xi_1) \dots a^-(\xi_n)](\Psi)(1)$$

⁽¹⁾ s étant un scalaire, on désigne par \underline{s} l'opérateur de multiplication par s (ici dans l'espace vectoriel complexe $\mathcal{H}(Y_\phi)$).

rend immédiate ($\hat{\Delta}d$); pour vérifier ($\hat{\Delta}e$), on peut montrer — à l'aide de ($\hat{\Delta}f$) que l'opérateur $A = a^+(\theta).a^+(\theta') - a^+(\theta').a^+(\theta)$ commute ou anticommute avec

les $a^-(\xi)$; en calculant $A(\Psi)$ ($F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$) par (19.184), on constate que ce nombre est nul.

Notons que l'on peut construire un élément Ψ de $\mathcal{H}(Y_n)$ en posant

$$(19.185) \quad \Psi = [a^+(\Psi_n) a^+(\Psi_{n-1}) \dots a^+(\Psi_1)] (\Omega) \quad [\Psi_j \in \mathcal{H}(Y)]$$

ses valeurs sur Y_n peuvent se calculer par la formule (19.183); on trouve

$$(19.186) \quad \Psi \cdot F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{\Pi \in S_n} \chi(\Pi) \Psi_1(\xi_{\Pi(1)}) \dots \Psi_n(\xi_{\Pi(n)}).$$

(19.187) Si Ψ (19.185) est le vecteur d'état d'une assemblée de particules, on dit que l'assemblée se compose de n particules, la première étant dans l'état Ψ_1 , la seconde dans l'état Ψ_2 , etc.

Dans le cas des fermions, on constate que la quantité (19.186) est égale au déterminant

$$(19.188) \quad \det \begin{pmatrix} \Psi_1(\xi_1) & \dots & \Psi_1(\xi_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Psi_n(\xi_1) & \dots & \Psi_n(\xi_n) \end{pmatrix}$$

ceci montre que Ψ est identiquement nul — donc incapable d'être un vecteur d'état — si Ψ_1, \dots, Ψ_n ne sont pas tous différents : c'est le principe d'exclusion de Pauli.

(19.189) — Par contre des bosons peuvent être tous dans le même état ⁽¹⁾.

— Etudions maintenant la structure préhilbertienne de $\mathcal{H}(Y_\phi)$; on vérifie trivialement que

$$(19.190) \quad [\Psi \in \mathcal{H}(Y_n), \Psi' \in \mathcal{H}(Y_{n'})], n \neq n' \Rightarrow [\overline{\Psi} \cdot \Psi' = 0]$$

c'est-à-dire que les espaces $\mathcal{H}(Y_n)$ sont deux à deux orthogonaux; pour calculer le produit scalaire de $\Psi, \Psi' \in \mathcal{H}(Y_\phi)$, il suffit d'utiliser la décomposition en somme directe (19.179)

$$(19.191) \quad \Psi = \sum_n \Psi_n \quad \Psi' = \sum_n \Psi'_n$$

⁽¹⁾ Il semble que ce soit le cas de l'hélium superfluide, et aussi celui de la lumière cohérente (ce qui explique pourquoi on peut décrire celle-ci, comme si elle était composée d'un seul photon, par une solution des équations de Maxwell (19.160)).

et on trouve

$$(19.192) \quad \overline{\Psi} \cdot \Psi' = \sum_n \overline{\Psi}'_n \cdot \Psi'_n$$

la somme indiquée étant finie.

On a par définition (18.181)

$$(19.193) \quad \overline{\Psi}'_n \cdot \Psi'_n \equiv \int_{U_n} \overline{\Psi}(\xi) \cdot \Psi'(\xi) \varphi(dx);$$

pour calculer cette intégrale, utilisons le revêtement (\tilde{U}^n, S_n, P_n) de U_n (19.167); la densité de Liouville de \tilde{U}^n est égale au produit tensoriel $\varphi \otimes \dots \otimes \varphi$ (Théorème (16.98)); son image par P_n est égale à $n!$ fois la densité de Liouville de U_n (parce que S_n contient $n!$ éléments); si bien que (19.193) se transforme en ⁽¹⁾

$$(19.194) \quad \overline{\Psi}'_n \cdot \Psi'_n = \frac{1}{n!} \int_{\tilde{U}^n} \overline{\Psi}_n \circ F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \cdot \Psi'_n \circ F_n \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \varphi(dx_1) \dots \varphi(dx_n).$$

En utilisant cette formule, le fait que \tilde{U}^n est dense dans U^n , et en effectuant quelques transformations d'intégrales, le lecteur établira la formule

$$(19.195) \quad \langle \Psi, a^+(\theta) (\Psi') \rangle \equiv \langle a^-(\theta) (\Psi), \Psi' \rangle \quad \theta \in \mathcal{H}(Y); \quad \Psi, \Psi' \in \mathcal{H}(Y_\phi)$$

formule dans laquelle on a posé

$$(19.196) \quad a^-(\theta) (\Psi) (\xi_\phi) = \int_U \overline{\theta(\xi)} \cdot a^-(\xi) (\Psi) (\xi_\phi) \varphi(dx) \quad \forall \xi_\phi \in Y_\phi$$

on voit que les opérateurs linéaires $a^+(\theta)$ et $a^-(\theta)$ sont transposés (18.185); en utilisant le théorème (19.182), le lecteur établira immédiatement le formulaire :

$$(19.197) \quad \left[\begin{array}{l} a^-(\theta) \text{ est un opérateur linéaire sur } \mathcal{H}(Y_\phi), \text{ qui applique chaque } \mathcal{H}(Y_n) \\ \text{ dans } \mathcal{H}(Y_{n-1}); a^-(\theta) \text{ s'appelle annihilateur (« d'une particule dans l'état } \theta \text{ »).} \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ On peut, si l'on veut, supprimer le terme $1/n!$ devant cette intégrale en travaillant, non sur les Ψ_n , mais sur les $\Psi_n/\sqrt{n!}$; ce qui introduit des facteurs $\sqrt{n+1}, 1/\sqrt{n+1}$ dans la définition des créateurs et des annihilateurs. Ces complications, bien qu'inutiles, sont traditionnelles.

a^- est un opérateur *anti-linéaire* (18.184).

(19.197)

| | | | | |
|-----|--|-----|--|--|
| (a) | $a^-(\theta) = a^+(\theta)^*$ | (b) | $a^+(\theta) = a^-(\theta)^*$ | |
| (c) | $a^-(\theta)(\Omega) \equiv 0$ | (d) | $a^-(\theta)(\theta') \equiv \langle \theta, \theta' \rangle \Omega$ | $\theta, \theta' \in \mathcal{H}(Y)$ |
| (e) | $a^-(\theta) \cdot a^-(\theta') - \varepsilon a^-(\theta') \cdot a^-(\theta) \equiv 0$ | | | $\Omega = \text{vide}$ |
| (f) | $a^+(\theta) \cdot a^+(\theta') - \varepsilon a^+(\theta') \cdot a^+(\theta) \equiv 0$ | | | $\varepsilon = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ (bosons) (fermions) |
| (g) | $a^-(\theta) \cdot a^+(\theta') - \varepsilon a^+(\theta') \cdot a^-(\theta) \equiv \langle \theta, \theta' \rangle$ | | | |

— Dans le cas des fermions, on notera que les formules (e, f, g) se contractent en

(19.198)

$$[a^+(\theta) + a^-(\theta)]^2 \equiv \|\theta\|^2 ;$$

que la formule (g) montre que les créateurs $a^+(\theta)$, les annihilateurs $a^-(\theta)$ ⁽¹⁾ sont *bornés*, et plus précisément qu'ils vérifient

(19.199)

$$\|a^+(\theta)\| \leq \|\theta\|, \quad \|a^-(\theta)\| \leq \|\theta\|.$$

(19.200)

— C'est ce formalisme des créateurs et des annihilateurs que l'on appelle parfois la « seconde quantification », et qui est à la base de la théorie quantique des champs.

ÉTATS QUANTIQUES

Soit U l'espace des mouvements d'un système dynamique, Y sa variété quantique.

(19.201)

Nous avons défini l'espace préhilbertien $\mathcal{H}(Y)$ (18.179), et donné en (18.196) une *représentation unitaire* $a \mapsto \underline{a}$ du groupe $\text{Quant}(Y)$ (groupe des quantomorphismes de Y) sur l'espace hilbertien $H(Y)$, complété de $\mathcal{H}(Y)$.

Un *vecteur d'état* du système, au sens (19.12), est un élément Ψ de $\mathcal{H}(Y)$, donc de $H(Y)$, vérifiant

(19.202)

$$\overline{\Psi} \cdot \Psi = 1.$$

⁽¹⁾ Mais non les annihilateurs $a^-(\xi)$ associés aux points ξ de U (définition (19.182 ♡)).

Nous avons vu (19.14) qu'il lui correspond un *état statistique* du système, dans lequel la *valeur moyenne* d'une variable dynamique quelconque u est donnée par la formule

(19.203)

$$\int_U u |\Psi(\xi)|^2 \varphi(dx).$$

Si le vecteur d'état Ψ vérifie la condition de Planck relative à u , nous savons (19.32) que

(19.204)

$$[\hat{u}(\Psi)](\xi) \equiv u \times \Psi(\xi)$$

\hat{u} désignant l'*observable* associé à u ; \hat{u} est un opérateur hermitien appliquant $\mathcal{H}(Y)$ dans $\mathcal{H}(Y)$. Il résulte évidemment de (19.203, 204) et de (18.181) que la valeur moyenne de u peut alors s'écrire

(19.205)

$$\langle \Psi, \hat{u}(\Psi) \rangle$$

ou encore (18.183)

(19.206)

$$\text{moyenne } u = \overline{\Psi} \cdot \hat{u} \cdot \Psi$$

(19.207)

En mécanique quantique, c'est cette formule (19.206) que l'on adopte comme *définition de la valeur moyenne*; si bien que la condition de Planck apparaît comme une condition suffisante pour la coïncidence des valeurs moyennes *statistique* et *quantique* de u ; condition à laquelle on pourra donc renoncer en même temps qu'à l'interprétation statistique.

Nous allons transformer cette formule (19.206) dans le cas où u engendre un quantomorphisme infinitésimal, selon la règle (18.145).

Soit f ce quantomorphisme infinitésimal :

$$f(\xi) \equiv \delta \xi ;$$

on a, par définition de \hat{u} (18.192) :

$$\hat{u}(\Psi)(\xi) \equiv -i \delta[\Psi(\xi)] \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi(\exp(sf)(\xi)) - \Psi(\xi)}{is} ;$$

en utilisant le fait que $\exp(sf)$ est un quantomorphisme (18.145), que le support de Ψ est compact, que u et Ψ sont différentiables, on en déduit ⁽¹⁾ :

$$\int_U \overline{\Psi(\xi)} \cdot \hat{u}(\Psi)(\xi) \cdot \varphi(dx) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_U \overline{\Psi(\xi)} \cdot \frac{\Psi(\exp(sf)(\xi)) - \Psi(\xi)}{is} \varphi(dx)$$

⁽¹⁾ Pour calculer l'intégrale variable, on peut se ramener à une somme finie d'intégrales prises sur R^{2n} ($2n$ étant la dimension de U) dont les intégrandes convergent uniformément (utiliser le théorème (16.49)).

d'où le théorème :

Soit u une variable dynamique tel que le champ de vecteurs f

$$f(\xi) \equiv \delta \xi_u$$

soit un quantomorphisme infinitésimal.

(19.208) Si Ψ est un vecteur d'état, la valeur moyenne quantique (19.207) de u dans l'état Ψ est donnée par la formule

$$\diamond \quad \text{moyenne } u = i \frac{d}{ds} [\overline{\Psi} \cdot \exp(sf) \cdot \Psi]_{s=0}$$

$\exp(sf)$ étant l'opérateur associé au quantomorphisme $\exp(sf)$ par la représentation unitaire (18.196).

(19.209) — Rappelons que la condition imposée à u (génération d'un quantomorphisme infinitésimal) peut prendre la forme (18.145♥), qui ne met pas en jeu la quantification de U , et qui est vérifiée notamment :

- lorsque u est une fonction à support compact ;
- lorsque u est un moment d'un groupe dynamique (même non quantifiable).

— En mécanique statistique, un état est complètement déterminé si l'on sait calculer les valeurs moyennes des fonctions à support compact ⁽¹⁾; de façon analogue, nous définirons l'état *quantique* correspondant au vecteur Ψ comme étant la *fonction*

$$(19.210) \quad a \mapsto \Psi \cdot \underline{a}^{-1} \cdot \Psi$$

fonction qui est définie sur le groupe des quantomorphismes de Y ; puisque, selon la formule (19.208♦), cette fonction permet de calculer les valeurs moyennes quantiques des variables dynamiques à support compact ⁽²⁾. Notons que l'état ne change pas si on déphase le vecteur Ψ (c'est-à-dire si on le multiplie par un élément de T).

⁽¹⁾ Puisqu'un état est une *mesure* sur U .

⁽²⁾ Aussi bien que celles des moments dynamiques. On notera que les variables auxquelles ne correspondent pas de quantomorphismes infinitésimaux conduisent à des difficultés dans l'interprétation usuelle de la mécanique quantique.

DÉFINITION, THÉORÈME

Soit F une fonction à valeurs complexes définie sur un groupe G .

(19.211) — On dit que F est une fonction *de type positif* si, quel que soit le système fini a_1, a_2, \dots, a_p d'éléments de G , la matrice M d'éléments

$${}^j M_k = F(a_j^{-1} \times a_k)$$

est *semi-positive* ⁽¹⁾.

— Si $a \mapsto \underline{a}$ est une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert E , et si $\Psi \in E$, la fonction

$$a \mapsto \overline{\Psi} \cdot \underline{a}^{-1} \cdot \Psi$$

est *de type positif*.

Soit en effet $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_p \end{pmatrix}$ un élément de C^p ; a_1, \dots, a_p des éléments de G ; M la matrice d'éléments ${}^j M_k = \overline{\Psi} \cdot \underline{a_k}^{-1} \times a_j \cdot \Psi$; un calcul immédiat donne

$$\overline{Z} \cdot M \cdot Z = \left\| \sum_j z_j \underline{a_j}(\Psi) \right\|^2 \geq 0.$$

C.Q.F.D.

Indiquons quelques propriétés immédiates des fonctions F de type positif :

$$(19.212) \quad \begin{cases} F(a^{-1}) = \overline{F(a)} & \forall a \in G \\ |F(a)| \leq F(e) & e = \text{élément neutre de } G \end{cases}$$

(faire $p = 2$, $a_1 = e$, $a_2 = a$); on voit que les fonctions de type positif sont *bornées*;

(19.213) Les fonctions de type positif sur G forment un *cône convexe*; c'est-à-dire que toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions de type positif est encore une fonction de type positif.

⁽¹⁾ C'est-à-dire si

$$\overline{Z} \cdot M \cdot Z \geq 0 \quad \forall Z \in C^p;$$

on démontre l'équivalence de cette condition avec

$$\overline{M} = M, \quad \text{spectre}(M) \geq 0;$$

on a nécessairement

$$\det(M) \geq 0$$

(voir *Calcul linéaire*, ouvrage cité p. 267).

THÉORÈME

Soient : Y la variété quantique d'un système dynamique ; Ψ un vecteur d'état du système ; F la fonction « état » correspondante (19.210) :

$$F(a) = \overline{\Psi} \cdot a^{-1} \cdot \Psi \quad \forall a \in \text{Quant}(Y)$$

alors :

(19.214)

| | |
|-----|--|
| (I) | F est une fonction de type positif sur le groupe $\text{Quant}(Y)$ |
| ◇ | (II) $F(z_Y \circ a) = zF(a) \quad \forall z \in T, \quad \forall a \in \text{Quant}(Y)$ |
| | (III) $F(1_Y) = 1$ |

On sait que F est de type positif (Théorème (19.211)) ; en écrivant $F(a)$ sous la forme $\overline{\Psi} \cdot [\Psi \circ a]$ (Définition (18.196)), on constate que (II) et (III) traduisent les axiomes $\Psi(z_Y(\xi)) \equiv z\Psi(\xi)$, $\overline{\Psi} \cdot \Psi = 1$ des vecteurs d'état (19.12).

Nous allons maintenant élargir la notion d'état et de valeur moyenne en prenant les résultats précédents comme axiomes :

DÉFINITION

(19.215)

Nous appellerons *état* d'un système dynamique toute fonction F vérifiant les axiomes (19.214◇).

Nous définirons la *valeur moyenne* d'une variable dynamique u (à laquelle est associé un quantomorphisme infinitésimal $f : \xi \mapsto \delta \xi$) dans un état F par la formule

$$\heartsuit \quad \text{moyenne } u = -i \frac{d}{ds} [F(\exp(sf))]_{s=0}$$

lorsque la dérivée mentionnée existe.

(19.216)

On vérifie facilement que la valeur moyenne d'une variable dynamique est *réelle* (appliquer (19.212)), que la valeur moyenne d'une constante est égale à cette constante.

THÉORÈME

(19.217)

L'ensemble des états d'un système dynamique est *convexe*.

Vérification triviale (cf. (19.213)).

(19.218)

Si F_1, \dots, F_n sont des états, p_1, \dots, p_n des nombres positifs de somme 1, $F = \sum_j p_j F_j$ est donc aussi un état ; on dit que F est un *mélange* des états F_j .

Dans le cas particulier où les F_j dérivent de vecteurs d'état Ψ_j , on constate que la valeur moyenne de u dans l'état mélangé F peut se mettre sous la forme ⁽¹⁾

$$(19.219) \quad \text{moyenne } u = \text{Tr}(\hat{u} \cdot D),$$

avec

$$(19.220) \quad D = \sum_j p_j \Psi_j \cdot \overline{\Psi}_j$$

D est un opérateur de rang fini, borné, positif ⁽²⁾, de trace 1, appelé *opérateur densité*.

(19.221)

Il y a longtemps que l'on a remarqué ⁽³⁾, en mécanique quantique, la nécessité de décrire certains états physiques par un opérateur densité D , avec le mode d'emploi (19.219) ; c'est notamment le cas de la *chimie quantique* : la méthode dite des *orbitales moléculaires* est un moyen de calcul de l'opérateur densité qui représente l'état d'une molécule au zéro absolu (dans l'*approximation de Hartree-Fock*). On voit qu'un élargissement de la notion d'état, définie initialement à l'aide d'un seul vecteur, est nécessaire pour tenir compte de la réalité.

Donnons d'autres exemples d'états qui découlent de la définition (19.215).

THÉORÈME

(19.222)

Soit $j \mapsto F_j$ une application d'une variété séparée I dans l'espace des états d'un système dynamique, telle que $j \mapsto F_j(a)$ soit continue pour tout $a \in \text{Quant}(Y)$; soit μ une *loi de probabilité* (16.178) sur I ; il existe alors un état F défini par

$$F(a) \equiv \mu(j \mapsto F_j(a)).$$

Il résulte de (19.212) et (19.214.III) que $|F_j(a)| \leq 1 \quad (\forall j, \forall a)$; par suite la valeur moyenne $F(a)$ existe pour tout a ; F vérifie trivialement (19.214.II, III) ; quant à la condition (I), elle dérive — grâce au théorème (16.194) — du fait que les matrices semi-positives d'ordre donné forment un ensemble *fermé convexe*.

(19.223)

En particulier, si l'on considère une famille *quelconque* d'états F_j et de nombres $p_j \geq 0$ tels que $\sum_j p_j = 1$, il existe un état F défini par

$$F(a) = \sum_j p_j F_j(a)$$

(il suffit de considérer l'ensemble d'indices comme une variété de dimension 0 ; voir (16.182)) ; on voit que ce théorème (19.222) étend la notion (19.218) de mélange d'états à des cas *infinis*.

⁽¹⁾ L'opérateur trace Tr est linéaire sur l'ensemble des opérateurs de rang fini d'un espace vectoriel E , et vérifie $\text{Tr}(V \circ \Gamma) \equiv \Gamma \circ V \quad (V \in E, \Gamma \in E^*)$; ces propriétés le caractérisent.

⁽²⁾ Un élément d'une C^* -algèbre est dit positif s'il est le carré d'un opérateur self-adjoint ; il est donc lui-même self-adjoint.

⁽³⁾ L. Landau et F. Bloch (1927).

THÉORÈME

Si F_j est une suite d'états telle que la limite

$$F(a) = \lim_j F_j(a)$$

existe pour tout $a \in \text{Quant}(Y)$, F est un état.

Vérification triviale.

THÉORÈME

Si Ψ est un vecteur de l'espace de Hilbert $H(Y)$ (19.201) tel que $\overline{\Psi} \cdot \Psi = 1$,
 $a \mapsto \overline{\Psi} \cdot a^{-1} \cdot \Psi$ est un état.

Trivial.

Il est possible, évidemment, que la définition des états proposée ci-dessus (19.215) soit trop large, et qu'il convienne de la restreindre par des conditions supplémentaires, notamment des conditions de continuité. ■

— Soit G un groupe de Lie opérant par quantomorphismes sur la variété quantique Y d'un système; pour tout état F du système, la fonction F_G induite sur G :

$$F_G(a) = F(a_Y) \quad \forall a \in G$$

est évidemment, comme F , une fonction de type positif.

Si on suppose F_G continue, on peut démontrer ⁽¹⁾ qu'il existe une représentation unitaire continue ⁽²⁾ $a \mapsto a_E$ de G sur un espace de Hilbert E , et un élément Ψ de E , tels que

$$F_G(a) = \overline{\Psi} \cdot a^{-1}_E \cdot \Psi \quad \forall a \in G;$$

il est évident que

$$\overline{\Psi} \cdot \Psi = 1.$$

Réciproquement, si on possède une représentation unitaire $a \mapsto a_E$ de G , si Ψ est un élément de E tel que $\overline{\Psi} \cdot \Psi = 1$, et si G opère effectivement sur Y (Définition (16.220)), on pourra définir une fonction de type positif F_G sur \underline{G}_Y (qui est un sous-groupe de $\text{Quant}(Y)$) par

$$F_G(a_Y) \equiv \overline{\Psi} \cdot a_E^{-1} \cdot \Psi;$$

⁽¹⁾ Voir J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations* (Gauthier-Villars), § 13.

⁽²⁾ C'est-à-dire telle que, pour tout $X \in E$, l'application $a \mapsto a_E \cdot X$ soit continue (pour la topologie de variété de G et pour la topologie de la norme de E).

si F_G est prolongeable par un état F à tout le groupe $\text{Quant}(Y)$, on pourra considérer que la représentation $a \mapsto a_E$ et le vecteur Ψ donnent une description partielle de l'état F ; cette description étant suffisante pour calculer les valeurs moyennes des moments

$$(19.231) \quad \mu \cdot Z \equiv \varpi(Z_Y(\xi)) \quad (1);$$

on sait en effet que $\delta \xi \equiv Z_Y(\xi)$ (18.153); les formules (19.215♡), (6.12c) et (19.230) donnent alors

$$(19.232) \quad \text{moyenne } \mu \cdot Z = i \frac{d}{ds} [\overline{\Psi} \cdot \exp(sZ_G)(e)_E \cdot \Psi]_{s=0}$$

e désignant l'élément neutre de G .

Exemples

(19.233) Considérons une particule non relativiste, sans spin, de masse m ; nous avons vu comment associer un élément Ψ de l'espace de Planck à chaque fonction différentiable à support compact $\mathbf{v} \mapsto \psi$ définie dans R^3 (formule (19.66)); nous avons remarqué que ces Ψ ne sont pas des vecteurs d'état; mais on peut donner à leur ensemble \mathcal{E} une structure préhilbertienne en posant ⁽²⁾

$$(19.234) \quad \overline{\Psi} \cdot \Psi = C \int_{R^3} |\psi|^2 \varphi(d\mathbf{v})$$

φ désignant la densité euclidienne, C une constante positive.

On a vu que le groupe de Galilée possède une extension quantifiable G , de dimension 11 (19.79), qui constitue d'ailleurs son plus grand relèvement; on sait que ce groupe opère sur \mathcal{E} (19.80); on vérifie qu'il opère isométriquement (pour la structure préhilbertienne (19.234)) et surjectivement; ce qui fournit, par prolongement, une représentation unitaire de G sur le complété \mathcal{E}' de \mathcal{E} (Théorème (18.191)).

(19.235) Un élément Ψ de \mathcal{E}' étant donné, la question se pose donc de savoir si la fonction F_G définie par la formule (19.230) est prolongeable par un état à tout le groupe des quantomorphismes. Notons seulement quelques remarques relatives à cette conjecture.

⁽¹⁾ Voir (18.152).

⁽²⁾ Connaissant la structure d'espace vectoriel complexe de \mathcal{E} , on sait que la connaissance de la norme $\overline{\Psi} \cdot \Psi$ entraîne celle du produit scalaire $\overline{\Psi} \cdot \Psi'$ (voir (18.191)).

Pour que F_G soit prolongeable par un état, il est nécessaire que $F_G(1) = 1$ et (puisque G contient les \underline{z}_Y) que

$$9.236) \quad F_G(\underline{z}_Y) \equiv z \quad (\text{axiomes (19.214)} \diamond);$$

en fait, ces deux conditions sont vérifiées dès que $\bar{\Psi} \cdot \Psi = 1$.

— La théorie de l'intégrale de Fourier montre que l'on peut choisir la constante C qui figure dans (19.234) de façon que

$$9.237) \quad \bar{\Psi} \cdot \Psi = \int_{R^3} |\tilde{\psi}|^2 \varphi(\mathbf{dr})$$

$\tilde{\psi}$ étant la fonction d'onde (19.74); la valeur de l'intégrale peut se calculer à un instant t arbitraire.

La formule (19.232) permet de calculer — si la conjecture (19.235) est vérifiée — les valeurs moyennes des moments de G au moyen de la fonction d'onde; on trouve par exemple pour l'énergie E la formule

$$9.238) \quad \text{moyenne } E = C \int_{R^3} \frac{mv^2}{2} |\psi|^2 \varphi(\mathbf{dv}) \\ = \frac{1}{2m} \int_{R^3} \left\{ \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r_3} \right|^2 \right\} \varphi(\mathbf{dr})$$

l'intégrale de droite étant prise à une date arbitraire; ces formules (19.237, 238) sont généralement admises a priori ⁽¹⁾. ■

9.239) Nous avons construit ci-dessus (19.81 à 19.135) des espaces de Planck (ou sous-espaces) pour divers types de particules élémentaires; espaces sur chacun desquels opère le relèvement du groupe de Poincaré (ou de Galilée).

⁽¹⁾ Si l'on pose $\tilde{\psi} \equiv \sqrt{\frac{\rho}{m}} e^{im\alpha}$, les formules (19.237, 238) peuvent s'écrire

$$m \equiv \int_{R^3} \rho \varphi(\mathbf{dr}), \quad \text{moyenne } E = \int_{R^3} \left[\frac{1}{2m^2} \text{grad}^2 \sqrt{\rho} + \frac{\rho}{2} \text{grad}^2 \alpha \right] \varphi(\mathbf{dr});$$

ces formules suggèrent une curieuse analogie avec un fluide de densité ρ , ayant une densité

d'énergie élastique (de type capillaire) $\frac{1}{2m^2} \text{grad}^2 \sqrt{\rho}$, et une vitesse $\text{grad } \alpha$; on constate en effet que les équations des mouvements irrotationnels d'un tel fluide (équation de continuité, équation d'Euler) se réduisent à l'équation de Schrödinger.

Le lecteur pourra trouver, dans chaque cas, une structure préhilbertienne de l'espace, invariante par le groupe; ainsi, dans le cas du photon, on peut prendre

$$(19.240) \quad \bar{\Psi} \cdot \Psi = - \int_K \bar{A} \cdot A \varphi(\mathbf{dP}) \quad [\text{notations (19.145)}];$$

on notera que cette quantité ne change pas dans les transformations de jauge (19.143), et qu'elle est bien positive si $\Psi \neq 0$.

Une étude parallèle à celle du cas non relativiste sans spin est donc possible.

(19.241) Ces remarques permettent d'envisager une solution aux difficultés d'interprétation des fonctions d'onde (voir (19.70), (19.103)).