

Relativité à 5 dimensions

§ 40 Principes et théorèmes généraux de la théorie.

Principes.

(40.1) — La théorie que nous allons étudier sommairement part des principes que nous avons posés pour la Relativité Générale (à savoir (33.1), (33.14), (33.20), (38.1)), avec les deux modifications suivantes :

(a) Nous supposons que la *dimension* de l'univers U est 5 au lieu de 4.

(40.2) (b) Nous remplacerons l'hypothèse suivant laquelle U est simplement connexe (38.1.H₁) par la suivante ⁽¹⁾ :

Le groupe de Poincaré de U est isomorphe au groupe additif Z des nombres entiers.

(40.3) — Le lecteur verra plus loin comment ces deux hypothèses, respectivement locale et globale, peuvent en quelque sorte se compenser, de façon que U puisse ressembler à une variété simplement connexe de dimension 4.

⁽¹⁾ Il résulte immédiatement de la définition (10,28) que le groupe de Poincaré d'un espace U est composé du seul élément neutre quand U est simplement connexe.

Théorèmes locaux et globaux.

(40.4) Les théorèmes généraux des §§ 33 et 34 se transposent immédiatement — *mutatis mutandis*; notamment le *théorème de conservation* $\text{div } T = 0$.

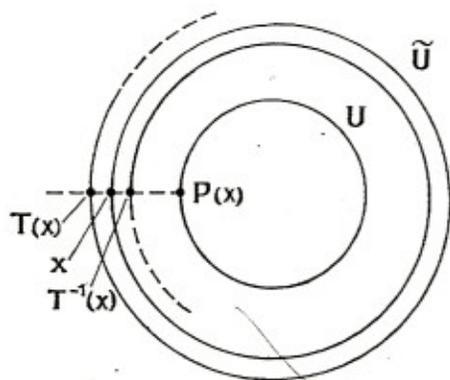
(40.5) — Nous admettrons encore que la gravitation est une connexion symétrique, que sa présence est, en première approximation ⁽¹⁾:

$$p = a + bg_{im}R^{im}.$$

Le théorème suivant lequel la gravitation coïncide avec la connexion riemannienne ⁽²⁾, ainsi que l'équation d'Einstein restent valables.

(40.6) — D'autre part, les résultats de la théorie des revêtements (§ 10) permettent de déduire immédiatement de l'hypothèse (40.2) ci-dessus les résultats suivants :

Soit \tilde{U} un *revêtement universel* de U ; P la *projection* de \tilde{U} sur U ; T un *générateur* du *groupe principal* (groupe de Poincaré) de \tilde{U} ⁽³⁾;



⁽¹⁾ Les indices latins j, k, l, m, \dots prendront les valeurs 1, 2, 3, 4, 5.

⁽²⁾ La démonstration de (35.17) est valable pour toute dimension > 2 .

⁽³⁾ Le seul autre générateur est T^{-1} .

Alors :

(40.7) La structure de variété de U se prolonge à $U \cup \tilde{U}$; T est un *glissement global* de \tilde{U} ; l'équation $T^m(X) = X$ n'a pas de solution si $m \neq 0$.

(40.8) U est *connexe*; \tilde{U} est *simplement connexe*. ?

(40.9) $[P(X) = P(Y)] \Leftrightarrow$ [Il existe un entier m tel que $X = T^m(Y)$].

On appelle *feuillet* de \tilde{U} les ouverts E où P est régulier; alors :

(40.10) — $P \cdot 1_E$ est un *glissement* de $U \cup \tilde{U}$;

— \tilde{U} peut être recouvert par des feuillet.

Tout champ f défini sur U peut se « relever », d'une seule façon, par un champ \tilde{f} de \tilde{U} tel que

$$[E = \text{feuillet}] \Rightarrow [[P \cdot 1_E]^{+\tilde{f}} < f]$$

(40.11) On a :

$$\tilde{f} = \sup_E [[P \cdot 1_E]^{-1}]^{+\tilde{f}}$$

$$T^{+\tilde{f}} = \tilde{f}$$

(autrement dit, le glissement T *invarie* \tilde{f}).

(40.12) Tout *glissement global* A de U se *relève* par un *glissement global* B de \tilde{U} , tel que

$$A \cdot P = P \cdot B$$

— Toute autre solution B^* de cette équation est de la forme

$$T^m \cdot B \text{ (resp. } B \cdot T^m) \quad [m \in \mathbb{Z}];$$

On a

$$B \cdot T \cdot B^{-1} = T^\varepsilon \quad [\varepsilon = \pm 1]$$

definition de la charge et de la conjugaison de charge

390

GÉOMÉTRIE ET RELATIVITÉ

(40.12) — Le nombre ε ne dépend que de A ; l'application $\chi [A \rightarrow \varepsilon]$ est un caractère du groupe des glissements globaux de U ; nous appellerons caractère de charge de A le nombre $\chi(A)$.

— Les glissements A vérifiant $\chi(A) = 1$ forment un groupe.

— Si $\chi(A) = -1$, A s'appellera une conjugaison de charge.

Soit f un lacet de U , c'est-à-dire une application continue, dans U , du cercle unité du plan complexe.

— Il existe une application continue φ de R dans \tilde{U} , telle que

$$P(\varphi(s)) = f(e^{is})$$

(40.13) — Il existe un entier m , qui ne dépend que de f et que nous appellerons charge du lacet, tel que

$$\varphi(s + 2\pi) = T^m(\varphi(s))$$

— Il existe des lacets ayant toutes les charges entières ⁽¹⁾; la charge d'un lacet change de signe si on remplace T par l'autre générateur T^{-1} .

§ 41 Approximations quadridimensionnelles.

(41.1) — Les approximations que nous allons indiquer sont indispensables à l'interprétation physique de la théorie; non pas parce que les expériences sont quadridimensionnelles — ce qui n'a évidemment aucun sens si la théorie est vraie — mais parce que les résultats expérimentaux auxquels nous pouvons nous référer ont déjà une interprétation quadridimensionnelle.

Relativité restreinte.

Dans la théorie à 5 dimensions, nous énoncerons comme suit l'approximation de la Relativité Restreinte :

⁽¹⁾ Ceci résulte du fait que sur variété connexe, deux points quelconques peuvent être joints par un arc de courbe; pour cette raison, \tilde{U} est dite connexe par arcs.

§ 41 APPROXIMATIONS QUADRIDIMENSIONNELLES 391

(41.2) (a) La courbure de U est nulle;
 (b) Le groupe d'holonomie de la connexion riemannienne (voir (28.71)) est réduit à l'unité ⁽¹⁾.

Des raisonnements analogues à ceux du § 38, et la théorie des revêtements, conduisent aux résultats suivants :

(41.3) — Le revêtement universel \tilde{U} de U possède une structure d'espace euclidien (hyperbolique normal) de dimension 5.

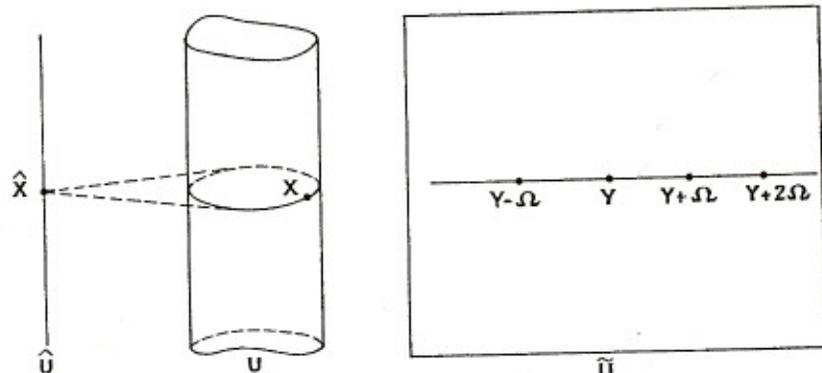
— Le générateur T du groupe de Poincaré (40.6) est une translation de \tilde{U} :

$$T(Y) = Y + \Omega$$

(41.4) — Soit X un point de U ; il existe un lacet géodésique de charge 1, f , tel que $f(1) = X$; on l'obtient en posant

$$f(e^{is}) = P\left(Y + s \frac{\Omega}{2\pi}\right) [P(Y) = X];$$

nous poserons val $(f) = \hat{X}$.



⁽¹⁾ Cette hypothèse est automatiquement vérifiée en relativité à 4 dimensions, où U est supposé simplement connexe.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - d\varphi^2$$

- (41.5) On suppose désormais que Ω est un *vecteur d'espace* :
- $$g(\Omega)(\Omega) < 0$$

Alors :

Il existe (*) une carte F , appliquant R^5 sur \tilde{U} , où les g_{jk} sont égaux aux éléments de la matrice

(41.6)
$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

et où le vecteur Ω est représenté par la colonne

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad \omega = \sqrt{-\bar{\Omega} \cdot \Omega}$$

- (41.7) Soient L_U l'ensemble des glissements globaux de U qui laissent invariant le champ $[X \rightarrow g]$; $L_{\tilde{U}}$ l'ensemble de leurs relèvements à \tilde{U} (40.12).

— Alors $L_{\tilde{U}}$ est le groupe des opérateurs

$$B \quad [Y \rightarrow C \cdot Y + Y_0]$$

où C est un affineur de \tilde{U} vérifiant simultanément

$$\bar{C} \cdot C = I_{\tilde{U}};$$

$$C\Omega = \varepsilon\Omega \quad [\varepsilon = \chi(P \cdot B/P) = \pm 1]$$

et, si U est orienté, $\det(C) = +1$

(*) On peut seulement montrer que F est une carte pour la structure C^2 : nous admettrons comme hypothèse supplémentaire, que F est une carte pour la structure de variété de \tilde{U} , définie en (40.7).

fibre en cercle

- (41.7) — Le groupe L_U et la projection $[X \rightarrow \hat{X}]$ donnent à U une structure d'espace fibré, dont les fibres sont les « cercles » \hat{X} , et dont la base \hat{U} possède la géométrie de la Relativité Restreinte à 4 dimensions (1).

Remarques :

- (41.8) — C'est ce dernier théorème (41.7) qui donne la clef de l'interprétation physique de la théorie pentadimensionnelle : on identifiera \hat{U} à l'univers « usuel » à 4 dimensions.

- (41.9) — Soit A un élément de L_U ; B son relèvement à \tilde{U} (40.12). B est représenté dans la carte F (41.6) par un changeur de carte

$$F^{-1} \cdot B \cdot F \quad [x \rightarrow Nx + x_0]$$

où la matrice N est de la forme

$$\begin{bmatrix} M & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \varepsilon \end{bmatrix} \quad [\varepsilon = \pm 1]$$

M étant une matrice d'ordre 4, de la forme étudiée en (38.8).

On en déduit que le groupe L_U est le produit direct du « groupe de Lorentz non homogène » classique $L_{\hat{U}}$ par le groupe des substitutions

entropie? $\longrightarrow [e^{ts} \rightarrow ze^{ts}] \quad |z| = 1; \quad s = \frac{2\pi x^5}{\omega};$

lui-même isomorphe au groupe orthogonal à 2 dimensions $O(R^2)$.

Or, en Mécanique Quantique, on est amené à décrire les glissements de Lorentz, les transformations de jauge électromagnétique et les transformations appelées conjugaisons de charge par ce pro-

(1) Il s'agit ici de la géométrie non séparée (voir (38.15), note 1); il est facile de passer à l'autre.

duit direct $L_U \times O(R^2)$ ⁽¹⁾; nous trouvons donc une interprétation physique de la géométrie de U; elle sera confirmée plus loin.

- (41.10) — Dans le cas où U est supposé orienté, on a de plus la relation
- $$\epsilon \det(M) = 1;$$

on peut seulement dire que $L_{\hat{U}}$ est le quotient de L_U par un sous-groupe distingué isomorphe à $O(R^2)$; en d'autres termes, que L_U est une extension du groupe $L_{\hat{U}}$ par $O(R^2)$.

Remarquons que, même dans ce cas, la variété quotient \hat{U} n'est pas orientée (voir (38.11)), et qu'il existe des conjugaisons de charge (cas $\epsilon = -1$).

- (41.11) — Le nombre $\omega = \sqrt{-\Omega \cdot \Omega}$ apparaît comme une « longueur élémentaire » de la théorie; nous constaterons plus loin qu'il est très petit devant les longueurs usuelles en physique nucléaire (qui se mesurent avec l'unité 10^{-13} cm).

- (41.12) — Il est évident que la théorie, sous sa forme actuelle, ne permet ni de calculer la valeur de ω , ni de prévoir que Ω est un vecteur d'espace (41.5), ni même que le groupe d'holonomie de la connexion est trivial (41.2); ces faits, que l'on peut considérer comme des constatations expérimentales, dérivent probablement de l'existence des champs, encore inconnus, qui constituent la matière.

- (41.13) — Nous allons voir que l'approximation que nous venons d'étudier implique la nullité du champ électromagnétique (41.66, 65, 49, 48); nous verrons aussi comment nous débarrasser de cette restriction.

Approximation de Jordan-Thiry.

- (41.14) Considérons la carte F, définie en (41.6) sur le revêtement \tilde{U} dans le cas de la relativité restreinte, et faisons varier le champ $[X \rightarrow g]$ « modérément ».

⁽¹⁾ Voir à ce sujet L. Michel, Nuovo Cimento, 9, 319 (1953).

D'après (40.11), les g_{jk} seront des fonctions périodiques de x^5 , de période ω ; si on suppose que leurs dérivées sont voisines de leur valeur initiale (nulle), et que la période ω est très petite, il sera tentant de considérer les g_{jk} comme indépendants de x^5 . Dans cette approximation, on aura donc $\delta_{5j}g_{jk} = 0$, ou encore $[\delta_5]_L g = 0$ (formule (25.106));

Nous appellerons approximation de Jordan-Thiry ⁽¹⁾ l'hypothèse suivant laquelle il existe sur U un champ de vecteurs $[X \rightarrow \delta X]$ tel que :

- (a) $\delta_L g = 0$; $\delta X =$ vecteur d'espace.
- (41.15) (b) Il existe un atlas du revêtement universel \tilde{U} de U formé par des cartes $F[x \rightarrow Y]$, $(P(Y) = X)$, telles que
- $$\left\{ \begin{array}{l} \delta x = |_5; \\ F^{-1} \cdot T \cdot F(x) \equiv x + 2\pi |_5, \end{array} \right.$$
- T étant le générateur du groupe de Poincaré;

Nous les appellerons cartes standard.

- (41.16) — C'est arbitrairement que nous avons attribué la période 2π aux cartes standard; par un changeur de carte linéaire, nous aurions pu leur donner toute autre valeur non nulle.

Théorème :

Désignons par J le champ $[X \rightarrow \delta X]$; pour tout X de U, l'application

$$(41.17) \quad f[e^{tX} \rightarrow e^{tJ(X)}]$$

est un lacet de charge 1; nous poserons $\text{val}(f) = \hat{X}$.

⁽¹⁾ La théorie de Jordan-Thiry (voir P. Jordan, Y. Thiry, A. Lichnerowicz (réf. de la p. 9)) est une théorie pentadimensionnelle, où l'on suppose a priori qu'il existe un vecteur δX vérifiant la condition (a) (principe de stationnarité); on n'utilise par ailleurs aucune condition topologique globale. Les résultats de la théorie de Jordan-Thiry se retrouvent dans la présente approximation: d'où le nom de celle-ci.

1
6
6

gik gles?

evad

— Le groupe \mathcal{G} des glissements e^{ij} , et la projection $X \rightarrow \hat{X}$ définissent sur U une structure d'espace fibré principal (voir (9.3), (9.1)), dont les fibres sont les \hat{X} , et dont le recueil $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ est le commutant de \mathcal{G} dans le recueil de tous les glissements de U . Soit \hat{U} la base de cet espace.

Théorème :

\hat{U} possède une structure de variété de dimension 4 ;

— Si F est une carte standard de \tilde{U} , on obtient une carte \hat{F} de \hat{U} en posant

$$(41.18) \quad \diamond \quad \hat{F}(\hat{x}) \equiv P(\widehat{F(x)}) ; \quad \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \hat{x}^3 \\ \hat{x}^4 \\ \hat{x}^5 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

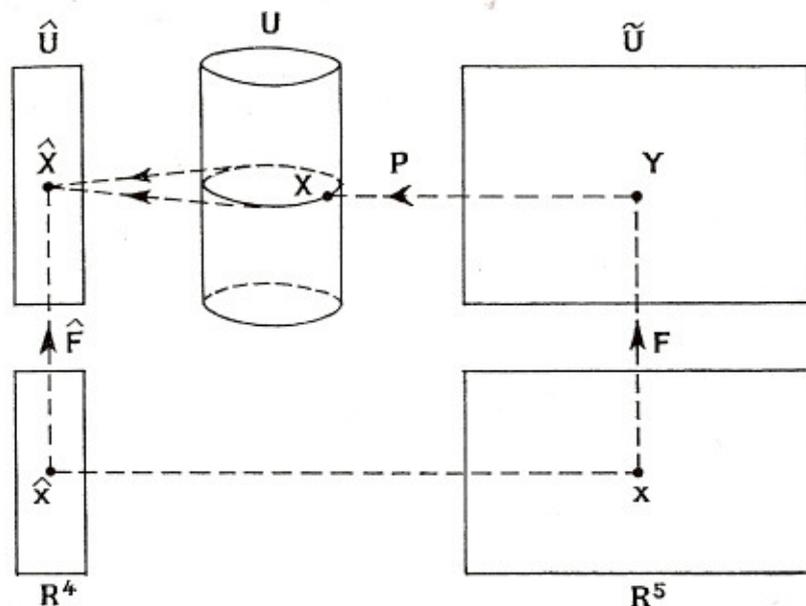
— Toute carte Φ de \hat{U} est de la forme

$$\sup_j \hat{F}_j$$

les F_j étant des cartes standard.

En effet, on peut prolonger le champ φ à \tilde{U} par relèvement (40.11), et à R^5 en posant $\varphi(x) = |_5$; le groupe des e^{ij} définit alors une structure d'univers fibré principal sur $\tilde{U} \cup R^5$, avec la projection $Y \rightarrow \widehat{P(Y)}$ sur \hat{U} , $x \rightarrow \hat{x}$ sur R^5 .

La base de cet espace est $\hat{U} \cup R^4$; c'est un univers (7.7) ; tout glissement de cet univers appliquant un ouvert de R^4 dans U est, localement, la projection \hat{F} d'un élément F du recueil de $R^5 \cup \tilde{U}$ (définition (7.2) de la base) ; F commute avec les e^{ij} (définition (9.1) des espaces fibrés principaux) ; $\hat{\phi}$ c'est donc une carte standard.



D'autre part, la projection $[Y \rightarrow \widehat{P(Y)}]$ est visiblement divisible par P , le quotient étant $[X \rightarrow \hat{X}]$; les théorèmes (7.8), (7.9) montrent que la structure de \hat{U} , considérée comme base de \tilde{U} , s'obtient aussi comme base de U , elle-même étant base de \tilde{U} ; or $\hat{\phi}$ cette structure de U est celle de (41.17).

Il reste à vérifier que le recueil de $\hat{U} \cup R^4$ se réduit bien, sur R^4 , à un recueil classique ; ceci va résulter de (41.21).

C.Q.F.D.

(41.19) — Appelons *recueil standard* le recueil \mathcal{R}_{st} engendré par les cartes standard ; c'est lui qui donne à $U \cup R^5$ sa structure d'univers fibré.

En remarquant que tout élément x de R^5 vérifie

$$(41.20) \quad x = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x^5 \end{bmatrix} \text{ (notations (41.18))}$$

on peut écrire la forme générale des *changeurs de carte standard*, c'est-à-dire des éléments H de \mathcal{R}_s , qui appliquent un ouvert de R^5 dans R^5 ; ô il vient :

$$(41.21) \quad H \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}(\hat{x}) \\ x^5 + h(\hat{x}) \end{bmatrix}$$

\hat{H} étant la *projection* de H sur R^4 (H est donc un changeur de cartes de \hat{U}), h une fonction réelle; on en déduit immédiatement que les changeurs de carte de \hat{U} forment un recueil classique.

En particulier, si H est un *glissement de jauge*, ($\hat{H} < 1_R$), on a :

$$(41.22) \quad H \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x^5 + h(\hat{x}) \end{bmatrix}$$

— Soit F une carte standard; désignons par \mathcal{R}_F le plus petit recueil contenant F et les changeurs de carte standard qui conservent x^5 ; \mathcal{R}_F est un sous-recueil de \mathcal{R}_s , qui définit une structure d'espace fibré principal sur $R^5 \cup \text{val}(F)$; cet espace est *sans jauge*; tout glissement A de la base E se relève de façon unique par un glissement A_F , appartenant à \mathcal{R}_F ; on trouve notamment

$$(41.23) \quad F^{-1} \cdot A_F \cdot F \left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x^5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \hat{F}^{-1} \cdot A \cdot \hat{F}(\hat{x}) \\ x^5 \end{bmatrix}$$

si A est un *glissement* de E , et

$$(41.24) \quad A_F \left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ x^5 \end{bmatrix} \right) = F \left(\begin{bmatrix} A \cdot \hat{F}^{-1}(\hat{x}) \\ x^5 \end{bmatrix} \right)$$

si A est une carte de E .

(41.25) — Ceci permet de faire correspondre à chaque racine Φ de U une racine Φ_F de E ; ô il suffit de prolonger Φ à \tilde{U} (voir (16.3)), en assurant la condition

$$(41.26) \quad \Phi(e^{\mathcal{J}}(Y)) = 1_{\Phi_F}$$

et de poser, pour tout glissement A de $E \cup R^4$

$$(41.27) \quad \Phi_F(A)(\hat{X}) = \Phi(A_F)(Y)$$

A_F étant le relèvement de A dans \mathcal{R}_F , Y un point quelconque de $\tilde{U} \cup R^5$ qui se projette en \hat{X} .

— Si l'on change la carte F en F^* le recueil \mathcal{R}_F peut changer; on vérifie, par exemple à l'aide de (41.23) et (41.24), qu'il existe un *glissement de jauge* B , prolongeant 1_R , tel que le relèvement A_F soit remplacé par

$$(41.28) \quad A_{F^*} = B \cdot A_F \cdot B^{-1}$$

on en déduit immédiatement, par application de (41.27), que l'on passe de la racine Φ_F à la racine Φ_{F^*} par l'*isomorphisme de racine* $f_{\hat{X}}$ (voir (13.5)) défini par

$$(41.29) \quad f_{\hat{X}} = \Phi(B)(Y) \text{ [} Y \text{ se projetant en } \hat{X} \text{]}$$

on a en effet :

$$(41.30) \quad \Phi_{F^*}(A)(\hat{X}) = f_{A(\hat{X})} \cdot \Phi_F(A)(\hat{X}) \cdot f_{\hat{X}}^{-1}$$

D'autre part, il résulte de (41.22) que le glissement de jauge B est de la forme

$$(41.31) \quad B(Y) = e^{\mathcal{J}}(Y)$$

φ étant une fonction scalaire de $\hat{X} = \hat{P}(Y)$.

par conséquent l'*isomorphisme de jauge* $f_{\hat{X}}$ s'exprime au moyen des dérivées partielles de la fonction $[\hat{X} - \varphi]$, jusqu'à l'ordre k si Φ est une racine d'ordre k : il suffit d'appliquer (41.29).

(41.32) — Cet algorithme permet de décrire les champs de U (particulièrement les champs invariants par le glissement infinitésimal δX) au moyen de champs de \hat{U} , donc quadridimensionnels; les équations de champ seront invariante à la fois par les glissements de \hat{U} et par les isomorphismes de jauge.

Rien n'empêche donc de considérer les équations de U comme des équations quadridimensionnelles; mais, pour retrouver les notations en usage, on essaye autant que possible d'introduire des variables invariante de jauge.

(41.33) Considérons par exemple un tenseur du second ordre, Θ , covariant et symétrique. L'étude des glissements de \hat{U} montre que l'on peut considérer les $\Theta_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$) comme les composantes d'un tenseur covariant; les $\Theta_{\lambda 5}$ comme les composantes d'un covecteur; que Θ_{55} est un scalaire.

— D'autre part, dans un glissement de jauge $x^5 \rightarrow x^5 + \varphi$, on obtient immédiatement, [en écrivant par exemple que $\Theta_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$ est conservé] la substitution :

$$(41.34) \begin{cases} \Theta_{\lambda\mu} \rightarrow \Theta_{\lambda\mu} + \Theta_{\lambda 5} \partial_\mu \varphi + \Theta_{\mu 5} \partial_\lambda \varphi + \Theta_{55} \partial_\lambda \varphi \partial_\mu \varphi \\ \Theta_{\lambda 5} \rightarrow \Theta_{\lambda 5} + \Theta_{55} \partial_\lambda \varphi \\ \Theta_{55} \rightarrow \Theta_{55} \end{cases}$$

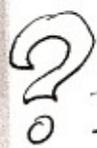
Dans le cas d'un tenseur symétrique contravariant, on trouve :

$$(41.35) \begin{cases} \Theta^{\lambda\mu} \rightarrow \Theta^{\lambda\mu} \\ \Theta^{\lambda 5} \rightarrow \Theta^{\lambda 5} - \Theta^{\lambda\mu} \partial_\mu \varphi \\ \Theta^{55} \rightarrow \Theta^{55} - 2\Theta^{\lambda 5} \partial_\lambda \varphi + \Theta^{\lambda\mu} \partial_\lambda \varphi \partial_\mu \varphi \end{cases}$$

— Appliquons ces résultats au tenseur g , dont les composantes sont indépendantes de x^5 (41.14, 15).

L'invariant de jauge $g_{55} = g(\delta X)(\delta X)$ est négatif par hypothèse (41.15 a); nous poserons

$$(41.36) \quad \xi = \sqrt{-g_{55}}$$



la longueur du lacet \hat{X} est égale à $\int_0^{2\pi} \xi dx^5 = 2\pi\xi$; ξ peut donc être interprété comme le « rayon » du tube-univers; nous verrons qu'il est très petit, comme il se doit (42.15).

L'image du tenseur contravariant g (29.12) par la projection $[X \rightarrow \hat{X}]$ est un tenseur contravariant \hat{g} (voir (25.60)); \hat{g} ses composantes dans la carte \hat{F} sont

$$(41.37) \quad \hat{g}^{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu}$$

Si l'on pose d'autre part

$$(41.38) \quad \hat{g}_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} - \frac{g_{\lambda 5} g_{\mu 5}}{g_{55}}$$

on trouve

$$(41.39) \quad \hat{g}^{\lambda\mu} \hat{g}_{\nu\sigma} = \delta^{\lambda}_{\nu} \delta^{\mu}_{\sigma} \quad [\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4]$$

(41.40) — Les $\hat{g}^{\lambda\mu}$ et $\hat{g}_{\lambda\mu}$ sont donc les composantes d'un tenseur symétrique régulier \hat{g} , qui donne à \hat{U} une structure de variété riemannienne à 4 dimensions; \hat{U} est hyperbolique normale, ainsi qu'on le vérifie en choisissant une carte standard F où les g_{jk} sont diagonaux.

— En dehors du scalaire ξ et du tenseur \hat{g} , qui sont invariants de jauge, on achève de caractériser le tenseur g par le quadri-covecteur \mathcal{A} :

$$(41.41) \quad \mathcal{A}_\nu = \frac{g_{\nu 5}}{g_{55}}$$

qui admet la transformation de jauge (voir (41.34)) :

$$(41.42) \quad \mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \varphi$$

On peut alors exprimer les composantes de g par les formules :

$g^{\lambda\mu} = \hat{g}^{\lambda\mu}$	$g_{\lambda\mu} = \hat{g}_{\lambda\mu} - \xi^2 \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu$
$g^{\lambda 5} = -\hat{g}^{\lambda\mu} \mathcal{A}_\mu$	$g_{\lambda 5} = -\xi^2 \mathcal{A}_\lambda$
$g^{55} = -\frac{1}{\xi^2} + \hat{g}^{\lambda\mu} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu$	$g_{55} = -\xi^2$

(41.43)

— Une méthode générale pour former des invariants de jauge consiste à représenter chaque champ (supposé invariant par les glissements $e^{\mathcal{A}}$) au moyen d'une carte F telle que, en un point, on ait les k premières des égalités (1)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_\lambda &= 0 \\
 \partial_\lambda \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \mathcal{A}_\lambda &= 0 \\
 \partial_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{A}_\lambda + \partial_\nu \partial_\lambda \mathcal{A}_\mu &= 0 \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

(41.44)

On peut en effet réaliser ces égalités par transformation de jauge, car elles fixent simplement les dérivées partielles (jusqu'à l'ordre k) de φ ; si l'on considère un champ d'une racine d'ordre k (voir (19.30)), l'image du champ par F^{-1} , au point considéré, ne dépendra que de \hat{F} : elle sera donc un invariant de jauge.

(41.45) — L'isomorphisme de jauge (41.30) permettra ensuite d'exprimer le champ, dans une carte standard quelconque, au moyen de cet invariant de jauge et des dérivées (jusqu'à l'ordre k) du covecteur \mathcal{A} .

Ainsi, l'expression (28.46) de la racine des connexions donne, pour toute connexion de U, la formule :

(1) Nous dirons que la carte est k -transversale en ce point: la première équation de transversalité, $\mathcal{A} = 0$, exprime que le vecteur $\partial X (= J(X))$ est orthogonal à la variété $x^5 = C^5$ qui passe par ce point.

$$(41.46) \quad \Gamma_{ki}^j \equiv \left\{ [{}^j|_r - {}^j|_5 \mathcal{A}_r] \hat{\Gamma}_{pr}^j + {}^j|_5 \frac{\partial_p \mathcal{A}_q + \partial_q \mathcal{A}_p}{2} \right\} [{}^p|_k + {}^p|_5 \mathcal{A}_k] [{}^q|_i + {}^q|_5 \mathcal{A}_i]$$

les $\hat{\Gamma}_{pr}^j$ désignant la valeur des symboles de Christoffel dans une carte 2-transversale.

— Dans le cas de la connexion riemannienne de U, la formule classique (30.12) donne :

$$(41.47) \quad \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \hat{g}^{\lambda\rho} [\partial_\mu \hat{g}_{\nu\rho} + \partial_\nu \hat{g}_{\mu\rho} - \partial_\rho \hat{g}_{\mu\nu}]$$

les $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ sont donc les symboles de Christoffel de la variété \hat{U} ;

$$(41.48) \quad \hat{\Gamma}_{5\mu}^\lambda = \hat{\Gamma}_{\mu 5}^\lambda = \frac{\xi^2}{2} \hat{g}^{\lambda\rho} \mathcal{F}_{\rho\mu} = \frac{\xi^2}{2} \mathcal{F}_\mu^\lambda$$

en posant

$$(41.49) \quad \mathcal{F}_{\rho\mu} = \partial_\rho \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\rho;$$

$$(41.50) \quad \hat{\Gamma}_{55}^\lambda = \xi \hat{g}^{\lambda\rho} \partial_\rho \xi = \xi \delta^\lambda \xi;$$

$$(41.51) \quad \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^5 = 0;$$

$$(41.52) \quad \hat{\Gamma}_{5\mu}^5 = \hat{\Gamma}_{\mu 5}^5 = \frac{\partial_\mu \xi}{\xi}$$

$$(41.53) \quad \hat{\Gamma}_{55}^5 = 0$$

La formule (41.46) permet ensuite de calculer ces symboles de Christoffel dans une carte quelconque à l'aide des invariants de jauge ci-dessus ;

il vient :

(41.54)	$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \hat{\Gamma}_{\mu 5}^\lambda \mathcal{A}_\nu + \hat{\Gamma}_{5\nu}^\lambda \mathcal{A}_\mu + \hat{\Gamma}_{55}^\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu$
	$\Gamma_{5\mu}^\lambda \equiv \Gamma_{\mu 5}^\lambda \equiv \hat{\Gamma}_{\mu 5}^\lambda + \hat{\Gamma}_{55}^\lambda \mathcal{A}_\mu$
	$\Gamma_{55}^\lambda \equiv \hat{\Gamma}_{55}^\lambda$
	$\Gamma_{\mu\nu}^5 \equiv \Gamma_{\nu\mu}^5 \equiv \hat{\Gamma}_{\mu 5}^5 \mathcal{A}_\nu + \hat{\Gamma}_{5\nu}^5 \mathcal{A}_\mu - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \mathcal{A}_\lambda - \hat{\Gamma}_{\mu 5}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\nu - \hat{\Gamma}_{5\nu}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu - \hat{\Gamma}_{55}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2} [\partial_\nu \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \mathcal{A}_\nu]$
	$\Gamma_{\mu 5}^5 \equiv \Gamma_{5\mu}^5 \equiv \hat{\Gamma}_{\mu 5}^5 - \hat{\Gamma}_{\mu 5}^\lambda \mathcal{A}_\lambda - \hat{\Gamma}_{55}^\lambda \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu$
	$\Gamma_{55}^5 \equiv -\hat{\Gamma}_{55}^\lambda \mathcal{A}_\lambda$

ces formules peuvent d'ailleurs se vérifier, à l'aide de (30.12), par un calcul direct.

— Soit S la base naturelle d'une carte standard (24.13); la base transversale \hat{S} associée est liée à S par les formules :

(41.55)	$\begin{array}{l} S_\lambda = \hat{S}_\lambda + \hat{S}_5 \mathcal{A}_\lambda \\ S_5 = \hat{S}_5 \end{array}$	$\begin{array}{l} \hat{S}_\lambda = S_\lambda - S_5 \mathcal{A}_\lambda \\ \hat{S}_5 = S_5 \end{array}$	det(S) = det(\hat{S})
	${}^\lambda S^{-1} = {}^\lambda \hat{S}^{-1}$	${}^\lambda \hat{S}^{-1} = {}^\lambda S^{-1}$	
	${}^5 S^{-1} = {}^5 \hat{S}^{-1} - \mathcal{A}_\lambda {}^\lambda \hat{S}^{-1}$	${}^5 \hat{S}^{-1} = {}^5 S^{-1} + \mathcal{A}_\lambda {}^\lambda S^{-1}$	

qui permettent de former les invariants de jauge pour toutes les racines d'ordre 1; on peut ainsi transcrire quadridimensionnellement le théorème de conservation (40.4) :

(41.56)
$$[\text{div T}]_i = g^{jk} [\partial_j T_{ki} - \Gamma_{jk}^r T_{ri} - \Gamma_{ji}^r T_{kr}] = 0$$

on trouve, dans le cas où le champ [X → T] est invariant par δ :

(41.57)
$$\begin{aligned} [\text{div } \xi \hat{T}]_k + \xi \mathcal{F}_{\alpha\lambda} \cdot \delta^\alpha + \frac{\partial_\lambda \xi}{\xi^2} \rho &= 0 \\ \text{div } \xi \mathcal{F} &= 0 \end{aligned}$$

en désignant par \hat{T} le tenseur quadridimensionnel de composantes $\hat{T}_{\lambda\mu}$, et en posant

(41.58)
$$\rho \equiv \hat{T}_{55}, \quad \delta_\lambda \equiv \hat{T}_{5\lambda}$$

ces formules s'obtiennent aisément avec une carte transversale, mais elles sont vraies dans toutes les cartes, puisqu'elles sont invariantes de jauge.

— Nous pouvons aussi transcrire quadridimensionnellement l'équation d'Einstein pentadimensionnelle (cf. (40.5), (35.24)) :

(41.59)
$$R_{jk} - \frac{1}{2} R \cdot g_{jk} + \Lambda g_{jk} \equiv \chi \sum T_{jk}$$

avec toujours

(41.60)
$$\Lambda = -\frac{a}{2b} \quad \chi = \frac{1}{2b}$$

les calculs, conduits à l'aide des formules (28.85), (41.54), (41.47 à 53), et en supposant bien entendu les tenseurs T_{jk} des différents phénomènes invariants par le glissement infinitésimal δX , conduisent aux équations suivantes, qui sont invariantes de jauge :

(41.61)
$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &\equiv \frac{\xi^2}{2} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle - g^{\alpha\sigma} \mathcal{F}_{\alpha\mu} \mathcal{F}_{\sigma\nu} \right] \\ &+ \chi \sum T_{\mu\nu} \\ &+ \frac{\hat{\partial}_\mu \partial_\nu \xi - g_{\mu\nu} \square \xi}{\xi} \end{aligned}$$

$n \xi \geq 0$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv \chi \sum T_{\mu\nu}$$

$$(41.62) \quad \text{div} [\xi^3 \mathcal{F}]_{,\mu} \equiv 2\chi \xi \sum \mathcal{F}_{,\mu}$$

$$(41.63) \quad \frac{3}{4} \xi^4 \langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle + \frac{1}{2} \xi^2 R - \Lambda \xi^2 = \chi \sum \rho.$$

Toutes les écritures étant quadridimensionnelles, nous avons sous-entendus les signes \wedge spécifiant les grandeurs de \hat{U} .

En éliminant la courbure contractée R entre (41.61) et (41.63), on trouve l'équation

$$(41.64) \quad \frac{\square \xi}{\xi} + \frac{2\Lambda}{3} \equiv -\frac{\xi^2}{2} \langle \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle + \frac{2\chi}{3} \frac{\sum \rho}{\xi^2} + \frac{\chi}{3} \sum T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

qui peut évidemment remplacer (41.63).

Les équations (41.61, 62) ont une ressemblance étroite avec les équations d'Einstein et de Maxwell quadridimensionnelles; elles nous amènent à introduire les nouvelles variables:

$$(41.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{\mu} \equiv \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}} \frac{1}{\xi} \mathcal{J}_{\mu} \\ A_{\mu} \equiv \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} \xi \mathcal{A}_{\mu} \\ F_{\mu\nu} \equiv \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} \xi \mathcal{F}_{\mu\nu} \\ r \equiv \frac{1}{\xi^2} \rho \end{array} \right.$$

pas d'interprétation

ce qui conduit au tableau :

Références	Equations	Interprétation classique
(41.49)	$\nabla \left[\frac{\Lambda}{\xi} \right] = \frac{F}{\xi}$	Expression du champ électromagnétique en fonction des potentiels (37.4).
Equation précédente	$\nabla \left[\frac{F}{\xi} \right] = 0$	Première équation de Maxwell (37.21)
(41.62)	$\text{div} [\xi^2 F] = 4\pi \xi^2 \sum J$	Deuxième équation de Maxwell, en présence de charges (37.31)
équation précédente et (41-57)	$\text{div} [\xi^2 J] = 0$	Conservation de l'électricité (37.38)
(41.57)	$\text{div} [\xi T]_{,\lambda} + \xi F_{\alpha\lambda} J^{\sigma} + [\partial_{\lambda} \xi] r = 0$	Conservation de l'énergie et de l'impulsion, compte tenu des forces électromagnétiques (37.35, 36).
(41.61)	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi \left[\frac{1}{4\pi} \left[2g_{\mu\nu} \langle F, F \rangle - g^{\rho\sigma} F_{\rho\mu} F_{\sigma\nu} \right] + \sum T_{\mu\nu} \right] + \frac{\hat{\partial}_{\mu} \partial_{\nu} \xi - g_{\mu\nu} \square \xi}{\xi}$	Equation d'Einstein, avec constante cosmologique, en présence de matière, et compte tenu de l'énergie du champ électromagnétique (35.24), (37.9).
(41.63)	$\frac{\square \xi}{\xi} + \frac{2\Lambda}{3} = \chi \left[-\frac{\langle F, F \rangle}{4\pi} + \frac{2}{3} \sum r \right] + \frac{1}{3} \sum T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$	Pas d'interprétation classique.

(41.67) — Les interprétations classiques données dans la 3^e colonne sont toutes *rigoureuses* si l'on suppose ξ constant ⁽¹⁾; la dernière équation montre que l'on peut supposer que ξ *varie peu* si les constantes Λ et χ sont petites.

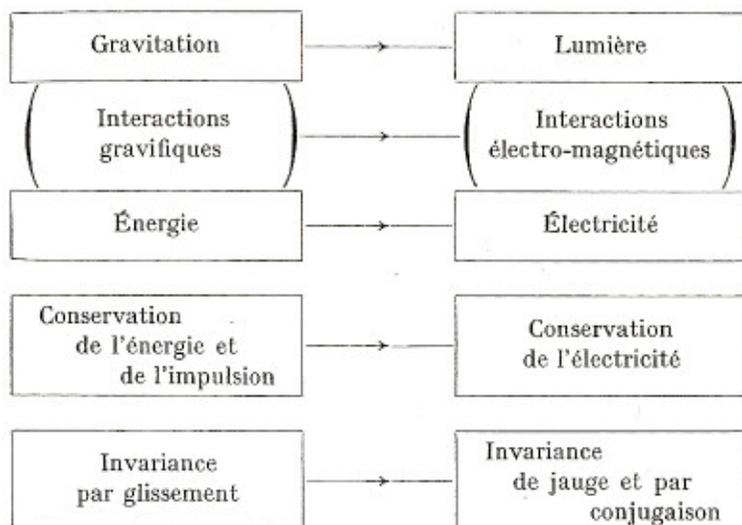
(41.68) — L'hypothèse, que nous avons choisie pour simplifier, de la structure *fibrée principale* pour U, peut être étendue, en admettant comme glissements de U les glissements qui changent le vecteur δX en $-\delta X$; on obtiendra ainsi des conjugaisons de charge de U (voir (40.12)); on en déduit l'invariance des équations par le changement de x^5 en $-x^5$ (voir notamment (41.51, 53)); c'est-à-dire, quadridimensionnellement, par le changement de signe des grandeurs A_λ , $F_{\lambda\mu}$, J_λ , les autres étant laissées invariantes. Si U est *orientée*, ce changement doit être accompagné d'un glissement de \hat{U} à jacobien négatif.

(41.69) — Nous ne chercherons pas à interpréter les différences entre les équations (41.67) et les équations classiques, non plus que la grandeur r et la dernière de ces équations; en effet on peut les modifier en effectuant un *changement conforme* du champ g : $[g_{\alpha\beta} \rightarrow f(\xi)g_{\alpha\beta}]$, f étant une fonction arbitraire ⁽²⁾.

D'ailleurs le but de la théorie est ailleurs: il s'agit de *décrire la physique pentadimensionnellement*, et de prévoir ainsi des faits expérimentaux. Ainsi, l'approximation de Jordan-Thiry-Kaluza-Klein nous a déjà permis de faire les déductions indiquées par des flèches:

⁽¹⁾ Cette hypothèse fournit la *théorie de Kaluza-Klein*; elle est équivalente à la suivante; les lacets \hat{X} sont des géodésiques de U (voir Lichnerowicz [réf. p. 9], II. 15).

⁽²⁾ Voir F. Hennequin, thèse (Gauthiers-Villars éd.).



Rappelons d'ailleurs que, dans la théorie quadridimensionnelle, les résultats de gauche se déduisent par voie géométrique, alors que les résultats de droite sont beaucoup plus phénoménologiques (voir (37.27)).

§ 42 Champ scalaire à 5 dimensions.

La Relativité à 4 dimensions se prête bien à la description des phénomènes macroscopiques: gravitation, matière parfaite, etc.

Nous allons utiliser la théorie à 5 dimensions pour décrire les particules élémentaires.

Considérons un phénomène trivial, à fibre réelle ⁽¹⁾; soit $[X \rightarrow \varphi]$ le champ correspondant, défini sur U.

⁽¹⁾ On arrive aux mêmes conclusions en supposant le champ *pseudoscalaire*.

La présence est une fonction de φ et de $g^{jk}\partial_j\varphi\partial_k\varphi$; en faisant un développement limité au second ordre suivant les puissances de φ , suivi d'une transformation affine sur φ , on trouve la présence

$$(42.1) \quad p = \pm \frac{1}{2} [a\varphi^3 - g^{jk}\partial_j\varphi\partial_k\varphi]$$

a étant une constante. Nous adopterons cette expression de la présence; on pourrait ajouter d'autres termes.

L'équation aux variations est donnée par (34.13, 12); il vient

$$(42.2) \quad \frac{1}{u} \partial_j [u g^{jk} \partial_k \varphi] + a\varphi = 0$$

Or on a pour toute variable scalaire θ :

$$(42.3) \quad \frac{1}{u} \partial_j [u g^{jk} \partial_k \theta] = \square \theta,$$

\square désignant l'opérateur laplacien sur la variété pentadimensionnelle U (formule (30.51)); nous arrivons donc à l'équation linéaire:

$$(42.4) \quad \square \varphi + a\varphi = 0$$

Pour l'interprétation, adoptons l'approximation de Kaluza-Klein.

La formule (41.55) montre que les changeurs de carte de jauge ont un jacobien égal à 1; le calcul du déterminant u^2 peut donc se faire en supposant la carte *transversale*; les formules (30.5) et (41.43) donnent

$$(42.5) \quad u = \xi \hat{u}$$

\hat{u} étant la quantité quadridimensionnelle correspondante.

ξ étant supposé constant, on trouve en développant (42.3):

$$(42.6) \quad \square \varphi + a\varphi = \left[\square \varphi - \text{div } \mathcal{A} \cdot \partial_s \varphi - 2\mathcal{A}^\lambda \partial_\lambda \partial_s \varphi + \left[g^{\lambda\mu} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{\xi^2} \right] \partial_s \partial_s \varphi \right] + a\varphi = 0$$

φ est une fonction périodique de x^5 , de période 2π (40.11); on peut donc le décomposer en série de Fourier:

$$(42.7) \quad \varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n e^{inx^5}$$

les φ_n étant des fonctions complexes de \hat{X} , vérifiant

$$(42.8) \quad \overline{\varphi_n} = \varphi_{-n};$$

en particulier, φ_0 est réelle.

En portant dans (42.6), on constate que chaque φ_n vérifie une équation quadridimensionnelle distincte; en introduisant les grandeurs électromagnétiques usuelles (41.65), il vient

$$(42.9) \quad \square \varphi_n - 2ink A^\mu \partial_\mu \varphi_n + \left[n^2 \left[\frac{1}{\xi^2} - k^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right] - ink \text{div } A + a \right] \varphi_n = 0$$

en posant pour abrégé

$$(42.10) \quad k = \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}}$$

— En Mécanique Ondulatoire, on suppose à priori qu'une particule de spin 0, de charge q , de masse m est décrite par une fonction d'onde complexe φ , vérifiant l'équation de Klein-Gordon:

$$(42.11) \quad g^{\lambda\mu} \left[\partial_\lambda - \frac{iqA_\lambda}{\hbar} \right] \left[\partial_\mu - \frac{iqA_\mu}{\hbar} \right] \varphi + \frac{m^2}{\hbar^2} \varphi = 0$$

Klein Gordon

livre: 1964) longueur de Planck

valable en Relativité Restreinte; on a fait $c = 1$ et noté $2\pi\hbar$ la constante de Planck.

Or on constate que cette équation s'identifie à (42.9) si l'on pose

(42.12) $q = nk\hbar,$

(42.13) $m = \hbar \sqrt{\frac{n^2}{\xi^2} + a}$

Ainsi l'équation pentadimensionnelle $\square\varphi + a\varphi = 0$ conduit à l'équation de Klein-Gordon (42.11), avec la condition supplémentaire suivante: la charge électrique q doit être un multiple entier de la charge élémentaire

(42.14) $e = k\hbar = \frac{\hbar}{\xi} \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}}$

Si l'on identifie e à la charge élémentaire usuelle (par exemple celle du méson Π^+ pour lequel on admet l'équation (42.11)), on peut en tirer

(42.15) $\xi = \frac{\hbar}{e} \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}} = \frac{2\hbar}{ec} \sqrt{G}$ (voir (39.63));

avec les valeurs numériques $\hbar = 3,51719 \cdot 10^{-33}$ gr.cm, $e = 1,60206 \cdot 10^{-20}$ gr $^{1/2}$.cm $^{1/2}$, $\chi = 1,865 \cdot 10^{-27}$ cm.gr $^{-1}$, il vient

(42.16) $\xi = 3,782 \cdot 10^{-32}$ cm

On constate bien que la « longueur élémentaire » $2\pi\xi \neq 2,38 \cdot 10^{-31}$ cm est très petite devant les dimensions nucléaires [de l'ordre de 10^{-13} cm].

quantification de la charge

* Hypothèse $x^5 \rightarrow -x^5 \Rightarrow$ inversion d'Isos-UU, inversion de charge. En mica Q inversion $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ partie réelle, i imaginaire

(42.17) — On pourrait s'attendre à trouver, pour chaque particule, des charges entières successives (en faisant varier n), et un spectre de masses donné par (42.13); en fait, la petitesse de ξ empêche que l'on puisse observer deux états de masse différents: les différences sont de l'ordre de $\frac{\hbar}{\xi} \neq 9,2 \cdot 10^{-7}$ gr $\neq 5,2 \cdot 10^{26}$ électron-volt $\neq 23$ KWH. $\sim 10^{30}$ °K
D'aussi grandes énergies ne sont approchées que par certains rayons cosmiques.

(42.18) — Dans une transformation de jauge $x^5 \rightarrow x^5 + \alpha$, φ_n est remplacé par $\varphi_n e^{in\alpha}$, A_μ par $A_\mu + \frac{\delta_\mu \alpha}{k}$; l'équation (42.9) est évidemment invariante, comme celle de Klein-Gordon.

— Dans la conjugaison de charge $x^5 \rightarrow -x^5$, φ_n est remplacée par $\varphi_{-n} \equiv \bar{\varphi}_n$ (42.8), A par $-A$; les équations (42.9) et (42.11) sont toutes deux invariantes: elles sont simplement remplacées par les équations complexes conjuguées. On retrouve là des circonstances familières en Mécanique Quantique.

important

(42.19) — Avec le champ $\varphi = \sum_n \varphi_n e^{in\alpha}$, le tenseur d'énergie T_{jk} n'est pas invariant par le glissement $X \rightarrow \delta X$, à moins que φ_0 seul ne soit pas nul. Dans ce cas φ est réel, la charge de la particule est nulle, et l'on trouve:

(42.20) $T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [a\varphi^2 - g^{\sigma\rho} \partial_\sigma \varphi \partial_\rho \varphi]$
 $J_\mu = 0,$

en adoptant le signe + devant l'expression (42.1) de la présence. L'expression (42.20) du tenseur d'énergie est classique en Mécanique Quantique; l'identité $J = 0$ montre que la particule n'agit pas sur le champ électromagnétique, de même que le champ n'agit pas sur elle (équation (42.9), avec $n = 0$).

livre outil de la logique tétrahédrique ?

§ 43 Espaces quaternioniques.

(43.1) On sait que les *quaternions* sont les symboles

$$q = a + bi + cj + dk$$

où a, b, c, d sont des nombres réels, et où les clefs i, j, k ont la table de Pythagore suivante :

(43.2)

	i	j	k	
i	-1	k	$-j$	($i^2 = -1, ij = k, \text{ etc...}$)
j	$-k$	-1	i	
k	j	$-i$	-1	

(43.3) L'ensemble Q des quaternions est à la fois un *espace vectoriel réel* de dimension 4 et un *corps non commutatif* ⁽¹⁾, qui contient le corps des réels a et le corps des complexes $a + bi$; nous poserons

(43.4) $\Re(a + bi + cj + dk) = a.$

(43.5) On dit qu'un ensemble E est un *espace vectoriel quaternionique* (en abrégé e.v.q.) si l'on a défini dans E une addition et une multiplication quaternionique :

$$[\psi, \psi' \in E ; q \in Q] \Rightarrow [\psi + \psi' \in E, \psi q \in E]$$

et si l'ensemble E^* des applications θ de E dans Q qui vérifient

(43.6) $\theta(\psi + \psi') = \theta(\psi) + \theta(\psi'), \theta(\psi q) = [\theta(\psi)]q$

⁽¹⁾ L'addition et la multiplication des quaternions vérifient les mêmes règles d'associativité et de distributivité que celles des matrices ; de plus, tout quaternion non nul q possède un *quaternion inverse* q^{-1} , tel que $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$.

est *séparant*, c'est-à-dire si

(43.7) $[\psi, \psi' \in E, \psi \neq \psi'] \Rightarrow$ [il existe $\theta \in E^*$ tel que $\theta(\psi) \neq \theta(\psi')$]

(43.8) E^* s'appelle le *dual* (quaternionique) de E .

Exemples :

(43.9) Q est un e.v.q.

Q^n est un e.v.q. si l'on pose

(43.10)

$$\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \dots \\ q^n \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} q^1 q \\ q^2 q \\ \dots \\ q^n q \end{bmatrix}$$

(43.11) — On démontre aisément dans tout e.v.q., les *règles usuelles* de calcul des espaces vectoriels, notamment la règle d'associativité

$$[\psi q]q' = \psi[qq']$$

dans laquelle il faut respecter l'ordre des facteurs.

— Soient E_1 et E_2 deux e.v.q. ; A un opérateur appliquant E_1 dans E_2 . A est dit *Q-linéaire* s'il vérifie

(43.12) $A(\psi + \psi') = A(\psi) + A(\psi'), A(\psi q) = A(\psi)q$

dans le cas $E_2 = Q$, A est un élément du *dual* E_1^* ; dans le cas $E_2 = E_1$, nous dirons que A est un *Q-affineur* de E_1 . Les sommes et produits d'opérateurs Q -linéaires sont Q -linéaires.

Les opérateurs *scalaires* q , définis par

(43.13) $q(\psi) = \psi q$

ne sont pas Q -linéaires, sauf si q est réel. Notons que

$$\underline{qq'} = \underline{q' \cdot q}$$

(43.14) \sum — Il n'existe pas d'opérateur bi-[Q-linéaire] non nul.

— Si E est un e.v.q., on peut identifier tout élément ψ de E avec un opérateur Q-linéaire de Q à E, en posant

$$(43.15) \quad \psi(q) = \psi q$$

(43.16) — Alors Q est égal à son dual; tout opérateur Q-linéaire A appliquant Q^n dans Q^n est une matrice dont les éléments sont des quaternions (*matrice quaternionique*).

(43.17) On appelle Q-base de E tout opérateur Q-linéaire régulier S appliquant Q^n sur E; c'est une ligne de n vecteurs de E.

Le nombre n s'appelle Q-dimension de E; c'est le quadruple de la dimension de E considéré comme espace vectoriel réel (R-dimension).

(43.18) Nous appellerons *espace euclidien quaternionique* (e.e.q.) tout e.v.q. E possédant une structure euclidienne telle que $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ appartiennent au *groupe orthogonal* de E.

Si ψ et ψ' sont des éléments de E, leur produit scalaire

$$\sum \quad g_E(\psi)(\psi')$$

est un *nombre réel*.

Exemple :

Nous poserons

$$(43.19) \quad g(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) \equiv aa' + bb' + cc' + dd'$$

et

$$(43.20) \quad g\left(\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \dots \\ q^n \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} q'^1 \\ q'^2 \\ \dots \\ q'^n \end{bmatrix}\right) \equiv g(q^1)(q'^1) + \dots + g(q^n)(q'^n)$$

alors Q et Q^n sont des e.e.q. (positifs).

(43.21) — Soit A un opérateur Q-linéaire appliquant un e.e.q. E_1 dans un e.e.q. E_2 . Alors le transposé \bar{A} de A (défini en (29.3)) est Q-linéaire.

Ceci résulte des formules

$$(43.22) \quad \overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk \quad \text{ou} \quad \Re(q) \equiv \frac{q + \bar{q}}{2};$$

$$\underline{[q]} = \overline{[q]}$$

Exemple :

Si M est une matrice quaternionique (cf. (43.16)), \bar{M} est la matrice quaternionique obtenue en transposant chaque élément et en échangeant les lignes et les colonnes; ainsi :

$$(43.23) \quad \overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \equiv \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} \quad (a, b, c, d \in Q)$$

— Soient ψ et ψ' deux éléments d'un e.e.q. E; alors

$$(43.24) \quad g_E(\psi)(\psi') = \Re(\bar{\psi} \cdot \psi')$$

\sum Le quaternion $\bar{\psi} \cdot \psi'$ s'appelle *produit quaternionique* de ψ par ψ' ; cette opération n'est pas symétrique: en effet $\bar{\psi}' \cdot \psi \equiv \overline{\bar{\psi} \cdot \psi'}$; notons que $\bar{\psi} \cdot \psi$ est *réel*, donc que $g(\psi)(\psi) = \bar{\psi} \cdot \psi$.

(43.25) — Si S est une Q-base d'un e.e.q. E, la *matrice de Gram*

$$G = \bar{S} \cdot S$$

est une matrice quaternionique régulière, vérifiant $\bar{G} = G$. Tout e.e.q. possède une Q-base S vérifiant

$$(43.26) \quad \bar{S} \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \dots \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

avec k signes $+$, $n - k$ signes $-$; l'entier k est la Q -dimension maximum d'un sous-e.e.q. positif (indice d'inertie quaternionique).

(43.27) — Si E est un e.e.q., les affineurs Q -linéaires et orthogonaux de E forment un groupe, appelé parfois *groupe symplectique*, noté $Sp(E)$.

(43.28) — Le lecteur adaptera aisément toutes ces considérations au cas plus classique des *espaces vectoriels complexes*, en remplaçant Q par le corps C des complexes.

Notons en particulier que les *scalaires complexes* z sont C -linéaires; qu'il existe des opérateurs multi[C -linéaires]; que les espaces E euclidiens et complexes tels que i soit orthogonaux s'appellent *espaces hermitiens* (ou *hermitiques*); que le groupe des affineurs orthogonaux et C -linéaires de E s'appelle groupe *unitaire*; on le note $U(E)$.

§ 44 Théorie des spineurs.

Algèbres d'opérateurs.

Définitions :

(44.1) Soit E un espace vectoriel réel; appelons $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires appliquant E dans E (affineurs de E).

Soit H une partie de $\mathcal{L}(E)$.

(a) Nous appellerons *commutant* de H , et nous noterons $\text{Com}(H)$, l'ensemble des affineurs a tels que

$$[h \in H] \Rightarrow [a.h = h.a]$$

(b) Soit E' un sous-espace vectoriel de E . Nous dirons que E' est *stable* par H si

$$[x \in E', h \in H] \Rightarrow [h(x) \in E']$$

(c) On dira que H est *irréductible* si

$$[E' \text{ stable par } H] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{soit } E' = E \\ \text{soit } E' = \{0\} \end{array} \right] \quad (1)$$

(1) On désigne ainsi l'espace vectoriel réduit à 0 tout seul.

(44.1) (d) On dira que H est une *algèbre* (réelle) si H n'est pas vide et si

$$\left[\begin{array}{l} s \in \mathbb{R} \\ h, h' \in H \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h + h' \in H \\ h.h' \in H \\ sh \in H \end{array} \right]$$

(e) On dira qu'une algèbre H est un *corps* si

$$[h \in H, h \neq 0] \Rightarrow [h \text{ régulier, } h^{-1} \in H]$$

(f) Soit H une algèbre de E ; E' un espace vectoriel.

On appellera *représentation* de H dans E' un opérateur linéaire Φ , appliquant H dans $\mathcal{L}(E')$, tel que

$$[h, k \in H] \Rightarrow [\Phi(h.k) = \Phi(h) \cdot \Phi(k)]$$

Théorème :

Soit H une partie de $\mathcal{L}(E)$; A l'intersection des algèbres contenant H .

Alors :

(a) A est une algèbre; on l'appelle *algèbre engendrée* par H .

(b) Les éléments de A sont les *combinaisons linéaires de produits d'éléments* de H .

(c) Les sous-espaces vectoriels stables par H et par A sont les *mêmes*.

(44.2) (d) $[H \text{ irréductible}] \Leftrightarrow [A \text{ irréductible}]$

(e) $\text{Com}(H)$ est une algèbre.

(f) $\text{Com}(H) = \text{Com}(A)$.

(g) $[H' \subset H] \Rightarrow [\text{Com}(H) \subset \text{Com}(H')]$.

(h) $H \subset A \subset \text{Com}^2(H)$ (1).

(i) $\text{Com}^3(H) = \text{Com}(H)$.

(j) $[H \text{ irréductible}] \Rightarrow [\text{Com}(H) \text{ est un corps}]$.

(1) L'algèbre $\text{Com}^2(H) = \text{Com}(\text{Com}(H))$ s'appelle *bicommutant* de H .

La vérification de (a), (b), (c), (e), (f), (g) est immédiate; (d) est un corollaire évident de (c).

ô la définition (44.1, a) montre que $H \subset \text{com}^2(H)$; puisque $\text{Com}^2(H)$ est une algèbre qui contient H, elle contient A; d'où (h).

— De $H \subset \text{Com}^2(H)$, (g) permet de déduire $\text{Com}^2(H) \subset \text{Com}(H)$; en remplaçant H par $\text{Com}(H)$ dans (h), on trouve $\text{Com}(H) \subset \text{Co}^2(H)$; d'où (i).

— Soit a un élément de $\text{com}(H)$; ô le noyau de a et $\text{val}(a)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par H; si H est irréductible et si a n'est pas nul, on a donc $\text{val}(a) = E$, le noyau de a étant réduit à 0; donc a est régulier, $a^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$; pour tout $h \in H$, on a

$a^{-1}.h - h.a^{-1} = a^{-1}.[h.a - a.h].a^{-1} = 0$; d'où $a^{-1} \in \text{Com}(H)$, et (j).

C.Q.F.D.

Définition :

Soit A une algèbre sur un espace vectoriel E; H un sous-espace vectoriel de A.

(44.3)

— On dit que H est un idéal (à gauche) de A si

$$[a \in A, h \in H] \Rightarrow [a.h \in H];$$

— On dit que H est un idéal minimal si tout idéal de A contenu dans H coïncide avec H ou {0}.

Lemme :

Soit A une algèbre irréductible sur un espace vectoriel E; H un idéal minimal non nul de A; p un élément de A vérifiant

$$\diamond \quad \begin{cases} p^2 = p \\ [h \in H] \Rightarrow [h.p = 0] \end{cases}$$

(44.4)

Il existe alors un opérateur régulier F, appliquant E sur H, et un vecteur V de E, tels que

$$\heartsuit \quad \begin{cases} p(V) = 0 \\ \left[\begin{array}{l} a \in A \\ X \in E \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a.F(X) = F(a(X)) \\ F(X)(V) = X \end{array} \right] \end{cases}$$

Puisque H n'est pas nul, il existe $h_0 \in H$ et $X_0 \in E$ tels que $h_0(X_0) \neq 0$; posons $V = X_0 - p(X_0)$ et, pour tout $h \in H$,

$$R(h) = h(V).$$

Il est clair que R est une application linéaire de H dans F, que

$$\clubsuit \quad R(h_0) = h_0(X_0 - p(X_0)) = h_0(X_0) \neq 0;$$

ô $\text{val}(R)$ est un sous-espace vectoriel stable par A; comme $\text{val}(R)$ n'est pas réduit à 0 (à cause de \clubsuit), et comme A est irréductible, $\text{val}(R) = E$.

D'autre part, le noyau de R est un idéal contenu dans H, plus petit que H à cause de \clubsuit ; H étant minimal, ce noyau se réduit à 0, R est régulier. ô il suffit de poser $F = R^{-1}$ pour vérifier (\heartsuit).

C.Q.F.D.

Théorème :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie N ($N \geq 2$); A une algèbre irréductible sur E.

Il existe un entier n, des V_j dans E et des opérateurs linéaires jF définis sur E tels que

$$(44.5) \quad \diamond \quad \left[\begin{array}{l} X \in E \\ a \in A \\ 1 \leq j, k \leq n \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} {}^jF(X) \in A \\ a.{}^jF(X) = {}^jF(a(X)) \\ {}^jF(X)(V_k) = {}^j|_k X \end{array} \right]$$

et

$$\heartsuit \quad \sum_{j=1}^n {}^jF(V_j) = 1_E$$

Supposons donné un opérateur p vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\clubsuit \quad \begin{cases} p \in A \\ p = p^2 \\ \text{Il existe des } {}^jF \text{ et des } V_j \text{ vérifiant } \diamond, \text{ tels que} \\ p = \sum_{j=1}^n {}^jF(V_j), \quad {}^jF(X) = {}^jF(X).p, \quad p(V_j) = V_j \end{cases}$$

(Exemple $p = 0, n = 0$).

Soit r le rang de p . Si $r < N$, p n'est pas régulier, il existe un X_0 non nul dans son noyau; un a_0 de A tel que $a_0(X_0) \neq 0$ [sinon X_0 engendrerait un espace vectoriel stable de dimension 1, A ne serait pas irréductible].

Considérons l'ensemble J :

$$[a \in J] \Leftrightarrow \begin{cases} a \in A \\ a.p = 0 \end{cases}$$

δJ est un idéal de A ; il n'est pas réduit à 0, car $\delta a_0 - a_0.p \in J$, et $a_0 - a_0.p \neq 0$, puisque $[a_0 - a_0.p](X_0) = a_0(X_0) \neq 0$.

Parmi les idéaux non réduits à 0 contenus dans J , choisissons en un, H , de dimension minimum; δH est minimal.

Appliquons (44.4): il existe un F et un V vérifiant (44.4, \heartsuit); δ on en tire

$$\begin{cases} F(V)(V) = V; \\ F(X).F(V) = F(X); \\ F(V)^2 = F(V); \\ p.F(V) = F(p(V)) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, pour tout X , $F(X) \in H \subset J$, d'où

$$\begin{cases} F(X).p = 0 \\ F(V).p = 0 \end{cases}$$

Il résulte de \clubsuit que, pour $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{cases} {}^jF(X)(V) = 0 & {}^jF(X).F(V) = 0 \\ F(X)(V_j) = 0 & F(V)(V_j) = 0 \end{cases}$$

δ Toutes ces relations se résument de la façon suivante: si l'on pose $n' = n + 1$, $V_{n+1} = V$, ${}^{n+1}F = F$, $p' = p + F(V)$, p' vérifie les conditions \clubsuit .

Or on sait que la trace d'un projecteur est égale à son rang; donc le rang r' de p' vérifie

$$r' = \text{Tr}(p + F(V)) = r + \text{Tr}(F(V)) = r + \text{rang}(F(V)),$$

d'où $r' > r$ puisque $\delta F(V)$ n'est pas nul. En répétant ce processus un nombre fini de fois, on obtiendra donc une solution p de \clubsuit , dont le rang sera égal à N ; p sera un projecteur régulier, donc égal à 1_p .

C.Q.F.D.

Théorème :

Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimensions finies, N et N' respectivement; A une algèbre irréductible sur E .

1) Si $N' < N$, il n'existe pas d'autre représentation de A dans E' que la représentation nulle.

2) Si $N' = N$, toute représentation non nulle Φ de A dans E' est donnée par

$$\Phi(a) = M.a.M^{-1}$$

M étant un opérateur linéaire régulier appliquant E sur E' ; elle est régulière et irréductible ⁽¹⁾.

3) Si $N' > N$, il n'existe pas de représentation irréductible de A dans E' .

1) Soit Φ une représentation irréductible, non nulle, de A dans E' .

Tout élément a de A vérifie $a = a.1_E = a.\sum_j {}^jF(V_j) = \sum_j {}^jF(a(V_j))$ (notations de (44.5); le cas trivial $N = 1$ est exclu).

— Il existe donc un j tel que l'ensemble $H' = \text{val}(\Phi({}^jF))$ ne soit pas 0.

— Posons $A' = \Phi^+(A)$; si $a' \in A'$, $h' \in H'$, on a

$$a' = \Phi(a), \quad h' = \Phi({}^jF(X)), \quad a'.h' = \Phi(a.{}^jF(X)) = \Phi({}^jF(a(X))) \in H';$$

H' est un idéal de A' .

— Soit H'' un sous-idéal de H' ; définissons E_1 par

$$[X \in E_1] \Leftrightarrow [\Phi({}^jF(X)) \in H'']$$

δE_1 est stable par A , et par conséquent égal à $\{0\}$ ou à E ; donc $H'' = \{0\}$ ou H' , H' est minimal.

En appliquant (44.4) à E' , A' , H' (avec $p = 0$), on voit qu'il existe un opérateur linéaire régulier F' appliquant E' sur H' , tel que

$$\diamond \quad \Phi(a).F'(X') = F'(\Phi(a)(X'));$$

⁽¹⁾ On dit qu'une représentation Φ est irréductible si l'ensemble $\Phi^+(A)$ des $\Phi(a)$ est irréductible sur E' : il est évident que $\Phi^+(A)$ est une algèbre.

posons $M = F'^{-1} \cdot \Phi \cdot {}^jF$; M applique E sur E' ; en remplaçant X' par $M(X)$ dans \diamond , il vient

$$\begin{aligned} F'([\Phi(a) \cdot M](X)) &= \Phi(a) \cdot [[F' \cdot M](X)] = \Phi(a) \cdot [[\Phi \cdot {}^jF](X)] \\ &= \Phi(a) \cdot [\Phi({}^jF(X))] = \Phi(a \cdot {}^jF(X)) = \Phi({}^jF(a(X))) = F'([M \cdot a](X)), \end{aligned}$$

d'où, F' étant régulier, $\Phi(a) \cdot M = M \cdot a$; ceci montre que le noyau de M est un espace stable par A , donc réduit à $\{0\}$; ainsi M est régulier, E et E' ont même dimension, et $\Phi(a) = M \cdot a \cdot M^{-1}$.

δ L'énoncé s'en déduit, en remarquant que de toute représentation non nulle Φ on peut déduire une représentation irréductible non nulle en se limitant à un sous-espace de E' (1).

C.Q.F.D.

Théorème :

(44.7)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie N ($N \geq 2$); A une algèbre irréductible sur E .

Alors

$$A = \text{Com}^2(A).$$

Utilisons (44.5, \diamond), et posons

$${}^j\Gamma(X)(Y) = {}^jF(Y)(X)$$

— La formule $a \cdot {}^jF(X) = {}^jF(a(X))$ s'écrit alors

$$a \cdot {}^j\Gamma(Y) = {}^j\Gamma(Y) \cdot a,$$

d'où

 \heartsuit

$$\text{val}({}^j\Gamma) \subset \text{Com}(A)$$

Supposons que $\beta \in \text{Com}(\text{val}({}^jF))$; on aura

$$\beta \cdot {}^jF(X) = {}^jF(X) \cdot \beta;$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \beta({}^jF(X)(V_j)) &= {}^jF(X)(\beta(V_j)) \\ \text{soit (cf. 44.5, } \diamond): \\ \beta &= {}^j\Gamma(\beta(V_j)) \end{aligned} \right\} \text{(ne pas sommer sur } j)$$

(1) Le sous-espace E' défini par $\Phi(1_E)(X) = X$ est stable par $\Phi(A)$ et non nul; un sous-espace stable de E' , non réduit à 0, de dimension minimum, répond à la question.

d'où

 \spadesuit

$$\text{Com}(\text{val}({}^jF)) \subset \text{val}({}^j\Gamma).$$

Puisque $\text{val}({}^jF) \subset A$, on a $\text{Com}(A) \subset \text{Com}(\text{val}({}^jF))$ (th. (44.2, g)); en comparant avec \heartsuit et \spadesuit , il vient

$$\text{val}({}^j\Gamma) = \text{Com}(\text{val}({}^jF)) = \text{Com}(A) \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n$$

Alors si $\gamma \in \text{Com}^2(A) = \text{Com}(\text{val}({}^j\Gamma))$, on a

$$[\gamma \cdot {}^j\Gamma(X) - {}^j\Gamma(X) \cdot \gamma](V_j) = 0$$

soit

$$[\gamma \cdot {}^jF(V_j) - {}^jF(\gamma(V_j))](X) = 0$$

et

$$\gamma = \gamma \cdot 1_E = \gamma \sum_j {}^jF(V_j) = \sum_j {}^jF(\gamma(V_j)) \in A; \text{ d'où } \text{Com}^2(A) \subset A;$$

on sait que $A \subset \text{Com}^2(A)$ (44.2, g).

C.Q.F.D.

Remarques :

(44.8)

— Le cas $N = 1$ se traite immédiatement; il n'existe que deux algèbres sur E , l'algèbre des scalaires et l'algèbre nulle; toutes deux sont irréductibles.

— Nous savons que $K = \text{Com}(A)$ est un corps (44.2 f); on peut le calculer effectivement par la formule $K = \text{val}({}^j\Gamma)$. Puisque $A = \text{Com}(K)$, A est l'ensemble des opérateurs R -linéaires qui commutent avec K ou, comme on dit, l'ensemble des opérateurs K -linéaires. La nature de K va être précisée par le théorème suivant:

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie; K un corps réel d'opérateurs sur E (non réduit à 0).

Alors l'une des trois circonstances suivantes a lieu:

(44.9)

- (a) K est l'ensemble des scalaires réels $\underline{r} = r \cdot 1_E$ ($r \in R$);
 (b) E possède une structure d'espace vectoriel complexe; K est l'ensemble des scalaires complexes $\underline{c} = c \cdot 1_E$ ($c \in C$);
 (c) E possède une structure d'espace vectoriel quaternionique; K est l'ensemble des scalaires quaternioniques \underline{q} ($q \in Q$) (voir (43.13)),

On peut démontrer élémentairement ce théorème en remarquant que chaque élément de K vérifie une équation algébrique à coefficients réels, décomposable en facteurs du premier et du second degré, donc qu'il se met sous la forme $a 1_E + b I$ (a, b réels, $I^2 = -1_E$), et en discutant l'ensemble des éléments de K dont le carré vaut -1_E (1).

- (44.10) — δ Les démonstrations des théorèmes (44.2, 4, 5, 6, 7) restent valables lorsqu'on considère des espaces vectoriels complexes, des algèbres complexes C-irréductibles (c'est-à-dire dont les espaces vectoriels complexes stables sont triviaux; une R-algèbre C-irréductible n'est pas nécessairement R-irréductible), des idéaux complexes. Mais le théorème (44.7) se simplifie; en utilisant la méthode indiquée par (44.9), on voit que *tout corps complexe K coïncide avec l'ensemble des scalaires (complexes); par suite, toute algèbre complexe C-irréductible non nulle sur E est l'ensemble des opérateurs C-linéaires.*

Indiquons enfin le **théorème** :

- (44.11) Soit K un corps sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. $\text{Com}(K)$ est une algèbre irréductible; $\text{Com}^2(K) = K$.

qui se démontre aisément en construisant des K -bases de E . Nous connaissons alors toutes les algèbres irréductibles sur les espaces de dimension finie.

Algèbres de Dirac.

Définition :

- (44.12) Soit E un espace vectoriel réel; Γ une partie de $\mathcal{L}(E)$. Nous dirons que Γ est une *algèbre de Dirac* si :
- (a) Γ est un espace vectoriel réel :

$$\left[\begin{array}{l} s \in \mathbb{R} \\ \gamma, \gamma' \in \Gamma \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \gamma + \gamma' \in \Gamma \\ s\gamma \in \Gamma \end{array} \right]$$

(1) Voir Souriau (réf. p. 265), chap. IX, exerc. 1.

- (44.12) (b) $[\gamma \in \Gamma] \Rightarrow [\gamma^2 \text{ scalaire}]$ (1).

(c) L'opérateur g défini sur Γ par

$$[\gamma, \gamma' \in \Gamma] \Rightarrow [\gamma \cdot \gamma' + \gamma' \cdot \gamma = 2g(\gamma)(\gamma') 1_E]$$

est régulier.

- (44.13) — En général, une algèbre de Dirac Γ n'est pas une algèbre; l'algèbre engendrée par Γ (voir (44.2 a)) s'appelle *algèbre de Clifford* (quand elle est irréductible).

- (44.14) — Soit Γ une algèbre de Dirac. Puisque l'opérateur g est symétrique et régulier, il donne à Γ une structure d'espace euclidien (définition (29.1)); toutes les considérations du § 29 lui sont applicables; mais comme les éléments γ de Γ sont des opérateurs, on ne peut les identifier aux « contravecteurs » $\underline{\gamma}$ correspondants (voir (17.6)); on ne pourra pas employer la notation $\bar{\gamma} \cdot \gamma'$ pour désigner le produit scalaire $g(\gamma)(\gamma')$; nous emploierons à l'occasion la notation $\langle \gamma, \gamma' \rangle$.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ des éléments Γ constituant une base; les composantes du tenseur g dans cette base sont évidemment

(44.15)
$$g_{\lambda\mu} = \langle \gamma_\lambda, \gamma_\mu \rangle = \frac{1}{2} [\gamma_\lambda \cdot \gamma_\mu + \gamma_\mu \cdot \gamma_\lambda] \text{ (2)}$$

— On désigne habituellement par γ^λ les éléments de la *base supplémentaire*, soit

(44.16)
$$\gamma^\lambda = g^{\lambda\mu} \cdot \gamma_\mu$$

On trouve immédiatement (Cf. (29.19)) :

(44.17)
$$g^{\lambda\mu} = \langle \gamma^\lambda, \gamma^\mu \rangle = \frac{1}{2} [\gamma^\lambda \cdot \gamma^\mu + \gamma^\mu \cdot \gamma^\lambda] \text{ (2)}$$

(1) En remplaçant γ par $\gamma + \gamma'$, on constate que cette condition est équivalente à
(b) $[\gamma, \gamma' \in \Gamma] \Rightarrow [\gamma \cdot \gamma' + \gamma' \cdot \gamma \text{ scalaire}]$

(2) Avec l'abus de notations qui consiste à identifier un nombre et l'opérateur scalaire sur E correspondant.

$$(44.18) \quad \lambda_{\mu} = \langle \gamma^{\lambda}, \gamma_{\mu} \rangle = \frac{1}{2} [\gamma^{\lambda} \cdot \gamma_{\mu} + \gamma_{\mu} \cdot \gamma^{\lambda}] \quad (1)$$

$$(44.19) \quad \gamma^{\lambda} \cdot \gamma_{\lambda} = \gamma_{\lambda} \cdot \gamma^{\lambda} = n \mathbf{1}_E \quad (n = \text{dimension de } \Gamma) \quad (2)$$

On sait que tout espace euclidien possède une base *orthonormale*, telle que les vecteurs de base soient deux à deux orthogonaux, et que leurs carrés scalaires soient ± 1 , le nombre de signes $+$ étant l'*indice d'inertie* de l'espace (29.34); par suite :

Soit Γ une algèbre de Dirac, n sa dimension, p son indice d'inertie; Γ possède une base $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ telle que

$$(44.20) \quad \begin{cases} \gamma_{\lambda} \cdot \gamma_{\mu} + \gamma_{\mu} \cdot \gamma_{\lambda} = 0 & \text{si } \lambda \neq \mu \\ [\gamma_{\lambda}]^2 = \pm 1 \end{cases}$$

le nombre de γ_j à carré $+1$ est égal à p .

Un calcul élémentaire permet d'en déduire :

L'opérateur

$$a = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n \quad (\text{notations (44.20)})$$

(44.21) vérifie

$$a \cdot \gamma_{\lambda} = [-1]^{n-1} \gamma_{\lambda} \cdot a \quad (\text{pour } \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

$$a^2 = [-1]^{\frac{n(n+1)}{2} + p}$$

Théorème :

Tout élément de l'algèbre engendrée par Γ (notations (44.20)) est une combinaison linéaire des opérateurs suivants

$$(44.22) \quad \diamond \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{1}_E \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \\ \gamma_1 \gamma_2, \dots, \gamma_1 \gamma_n, \gamma_2 \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1} \gamma_n \\ \dots \\ \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n \end{array} \right.$$

dont le nombre est $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

(1) Avec l'abus de notations qui consiste à identifier un nombre et l'opération scalaire sur E correspondant.

(2) Convention d'Einstein !

En effet, grâce aux formules (44.20), δ le produit de deux opérateurs de ce tableau est encore un opérateur du tableau (au signe près).

C.Q.F.D.

Théorème :

Les éléments du tableau (44.22 \diamond), à l'exception du premier et peut-être du dernier, ont une trace nulle.

La trace de $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n$ est nulle dans chacun des cas suivants :

(44.23)

1) si n est pair ;

2) si $\frac{n(n+1)}{2} + p$ est pair.

Soit $\theta = \gamma_{\lambda_1} \cdot \gamma_{\lambda_2} \cdots \gamma_{\lambda_r}$ un élément du tableau.

Si r est pair (resp. impair), θ anticommute avec γ_{μ} , pourvu que $\mu \in [\text{resp. } \notin] \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$. Soit $\varepsilon \mathbf{1}_E = \gamma_{\mu}^2$ ($\varepsilon = \pm 1$). Alors

$\text{Tr}(\theta) = \varepsilon \text{Tr}(\theta \cdot \gamma_{\mu}^2) = -\varepsilon \text{Tr}(\gamma_{\mu} \cdot \theta \cdot \gamma_{\mu}) = -\varepsilon \text{Tr}(\theta \cdot \gamma_{\mu}^2) = -\text{Tr}(\theta)$, d'où $\text{Tr}(\theta) = 0$.

Dans le cas où $\frac{n(n+1)}{2} + p$ est impair, $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n$ a pour carré $-\mathbf{1}_E$;

δ il en résulte que sa trace est nulle (1).

C.Q.F.D.

Corollaire :

Si $\text{Tr}(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n) = 0$, les éléments du tableau (44.20 \diamond) forment une *base* pour l'algèbre engendrée par Γ (dont la dimension est donc 2^n).

(44.24)

(1) Il s'agit bien entendu de la trace réelle; on peut le constater en construisant une base où cet opérateur est représenté par la matrice

Démonstration :

Cas où $n = 2p - 1$

Ce cas se déduit évidemment de l'énoncé suivant :

Pour tout $p > 0$, il existe des matrices réelles d'ordre 2^{p-1} , $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2^{p-1}}$, vérifiant les relations

$$(44.27) \quad \diamond \quad \begin{cases} \gamma_\lambda \cdot \gamma_\mu + \gamma_\mu \cdot \gamma_\lambda = 0 & \text{pour } \lambda \neq \mu \\ [\gamma_\lambda]^2 = [-1]^{k+1} \\ \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_{2^{p-1}} = 1 \end{cases}$$

et qui engendrent l'algèbre de toutes les matrices réelles d'ordre 2^{p-1} .

♠ La démonstration se fait par récurrence sur p , en posant

$$p' = p + 1, \quad \gamma'_\lambda = \begin{bmatrix} \gamma_\lambda & 0 \\ 0 & -\gamma_\lambda \end{bmatrix}, \quad \gamma'_{2p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma'_{2^{p+1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Indiquons les premières matrices ainsi construites :

$$(44.28) \quad \begin{array}{l} n = p = 1 : \quad \gamma_1 = 1 \\ \hline n = 3, p = 2 : \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{signes des carrés :} \quad \quad \quad + \quad \quad \quad - \quad \quad \quad + \\ \text{Dans ce cas, l'algèbre de Dirac est l'ensemble des matrices de} \\ \text{trace nulle.} \end{array}$$

(44.28)

$n = 5, p = 3$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

+

-

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

+

-

+

Cas $n - 2p = 1, 5$ (M° 8)

En considérant les matrices γ_λ ci-dessus comme complexes, et en multipliant r d'entre elles par i , on obtient évidemment une algèbre de Dirac de dimension impaire n , d'indice d'inertie p arbitraire, composée de matrices complexes.

Si r est impair, c'est-à-dire si $n - 2p = 1$ (M° 4), les matrices γ'_λ obtenues vérifieront $\gamma'_1 \cdot \gamma'_2 \cdots \gamma'_n = \pm i$ (Cf. (44.27) ♠); par suite i fait partie de l'algèbre de Clifford, donc aussi les γ_λ , donc toutes les matrices complexes d'ordre 2; par suite l'algèbre de Dirac obtenue est irréductible (th. (44.11) et th. (44.2 d)).

Indiquons que dans le cas $n = p = 3$, l'algèbre de Dirac est l'ensemble des matrices hermitiennes de trace nulle; on choisit souvent comme base orthonormale les matrices de Pauli

(44.29)

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

qui vérifient $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = i$.

Cas $n = 3, p = 0$

Il suffit de considérer les trois quaternions

$$\gamma_1 = i, \gamma_2 = j, \gamma_3 = k$$

considérés comme opérateurs sur l'ensemble Q des quaternions suivant la convention (43.15):

$$q(q') = qq' \quad (q, q' \in Q)$$

Alors l'algèbre de Dirac est l'ensemble des quaternions de trace nulle; l'algèbre de Clifford est le corps des quaternions; son commutant est le corps des *scalaires quaternioniques* (43.13) q :

$$\underline{q}(q') = q'q \quad (q, q' \in Q)$$

Cas n impair (fin)

1) Supposons que nous ayons construit une algèbre de Dirac Γ , engendrant l'algèbre de toutes les matrices réelles d'ordre $2^{\frac{n-1}{2}}$, avec $n - 2p = 7$ (M^o 8).

Considérons les matrices quaternioniques γ' de la forme

$$\gamma' = \begin{bmatrix} \gamma & \varepsilon \bar{q} \\ q & -\gamma \end{bmatrix}$$

avec $\gamma \in \Gamma^{(4)}$, $q \in Q$, $\varepsilon = \pm 1$.

(¹) γ est une matrice réelle, identifiée à une matrice quaternionique particulière.

Il est clair que $\gamma'^2 = \gamma^2 + \varepsilon|q|^2$, donc que les γ' forment une algèbre de Dirac Γ' de dimension $n' = n + 4$, d'indice d'inertie $p' = p + 4$ (si $\varepsilon = +1$) ou $p' = p$ (si $\varepsilon = -1$); on a donc $n' - 2p' = 3$ (M^o 8). On vérifie que Γ' engendre l'algèbre de toutes les matrices quaternioniques de dimension $2^{\frac{n-3}{2}}$; Γ' est donc irréductible.

Exemple :

En partant de $n = p = 1$, et en prenant $\varepsilon = -1$, on obtient une algèbre de Dirac quaternionique irréductible avec $n = 5, p = 1$ (cas de la relativité à 5 dimensions), ayant une base orthonormale constituée des matrices quaternioniques d'ordre 2:

$$(44.30) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma_5 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2) Supposons que nous ayons construit une algèbre de Dirac Γ , engendrant l'algèbre de toutes les matrices quaternioniques d'ordre $2^{\frac{n-3}{2}}$, avec $n - 2p = 3$ (M^o 8).

Considérons les matrices de la forme

$$\gamma' = \begin{bmatrix} \gamma & \varepsilon \bar{q} \\ q & -\gamma \end{bmatrix}$$

Il est clair que $\gamma'^2 = \gamma^2 + \varepsilon|q|^2$, donc que les γ' forment une algèbre de Dirac Γ' de dimension $n' = n + 4$, d'indice d'inertie $p' = p + 4$ (si $\varepsilon = +1$) ou $p' = p$ (si $\varepsilon = -1$); on a donc $n' - 2p' = 7$ (M^o 8). On vérifie que Γ' engendre l'algèbre de toutes les matrices d'ordre $2^{\frac{n-1}{2}}$ dont les éléments sont des opérateurs R-linéaires sur Q ; c'est-à-dire l'ensemble de tous les opérateurs R-linéaires sur $Q^{2^{\frac{n-1}{2}}}$; Γ' est donc irréductible.

(44.31) — On peut prendre une R-base de Q ⁽¹⁾, ce qui permet de représenter les éléments de la matrice γ' au moyen de matrices réelles d'ordre 4 ; γ' devient alors une matrice réelle d'ordre $2^{\frac{n-1}{2}}$; l'algèbre engendrée est celle de toutes les matrices réelles de cet ordre.

Exemple :

(44.32) En partant du cas $n = 3, p = 0$ traité ci-dessus, et en faisant $\epsilon = -1$, on obtient l'algèbre de Dirac Γ des

$$\begin{bmatrix} q & -\bar{r} \\ r & \bar{q} \end{bmatrix} \quad (q, r \in \mathbb{Q}; \text{Tr}(q) = 0)$$

($n = 7, p = 0$) ; les opérateurs $s + \gamma$ ($s \in \mathbb{R}, \gamma \in \Gamma$) s'appellent *octonions* ou *octaves de Cayley*.

3) δ Les constructions indiquées jusqu'à présent permettent de traiter tous les cas n impair du th. (44.25).

Cas n pair.

Si n est pair, associons à chaque couple (n, p) le cas déjà traité (n', p') donné par le tableau suivant :

(44.33)

$n - 2p$ (M ^o 8)	n'	p'	K'	N'
0	$n + 1$	$p + 1$	R	$2^{\frac{n}{2}}$
2	$n + 1$	p	Q	$2^{\frac{n-2}{2}}$
4	$n + 1$	$p + 1$	Q	$2^{\frac{n-2}{2}}$
6	$n + 1$	p	R	$2^{\frac{n}{2}}$

⁽¹⁾ Si l'on choisit la base $[1 \ i \ j \ k]$, le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ est représenté par la matrice $\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$, le scalaire quaternionique q

Si on s'est donné une base orthonormale $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ de cette algèbre de Dirac, Γ' , il suffira de supprimer l'un des γ_λ pour obtenir une base d'une algèbre de Dirac Γ correspondant au cas (n, p) (on prendra $\gamma_\lambda^2 = +1$ si $n - 2p = 0, 4$ (M^o 8), $\gamma_\lambda^2 = -1$ si $n - 2p = 2, 6$ (M^o 8)). Il résulte de (44.24) que l'algèbre engendrée par Γ a la dimension 2^n ; elle coïncide donc avec l'algèbre engendrée par Γ' , qui a la même dimension. Ce qui achève la démonstration de (44.25).

Exemples :

— $n = 4, p = 1$ (cas de la Relativité).

On est ramené au cas $n = 5, p = 1$ (voir le tableau (44.33)) ; on peut prendre une base formée de matrices quaternioniques, par exemple

$$(44.34) \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4$ est égale à γ_5 (Cf. (44.30)).

— Bien entendu, il est loisible de remplacer les quaternions $1, i, j, k$ par des matrices réelles d'ordre 4 (voir (44.31)) ; les γ_λ deviennent alors des matrices réelles d'ordre 8.

— On peut aussi considérer les quaternions comme formant un espace complexe de dimension 2 (puisque l'on sait multiplier un quaternion par un nombre complexe $a + bi$, quaternion particulier) ; on les remplace alors par des matrices complexes d'ordre 2, et les γ_λ par des matrices complexes d'ordre 4 (*matrices de Dirac*).

En prenant la base $[1 \ j]$, on trouve :

$$\text{par } \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

$$(44.35) \quad \begin{aligned} 1 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i \rightarrow \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad j \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma_1 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \gamma_4 &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_5 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mais ces écritures réelle et complexe ne mettent pas en évidence le commutant de l'algèbre.

— Cas $n = 4, p = 3$.

On expose souvent la Relativité en adoptant un signe opposé pour le tenseur g , ce qui conduit à $p = 3$.

L'algèbre de Dirac irréductible correspondante s'obtient à partir de $n = 5, p = 3$ (Cf. (44.33)), par suppression d'une matrice à carré -1 ; on peut ainsi former une base orthogonale formée de matrices réelles (*matrices de Majorana*), telles que :

$$(44.36) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ &\quad - \quad + \quad + \\ \gamma_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elles engendrent l'algèbre des matrices réelles d'ordre 4.

? Spineurs et groupe de Clifford.

Définition :

On considère un espace euclidien \mathcal{E} , et un espace vectoriel E .

On dit que E est un espace de *spineurs* de \mathcal{E} si l'on a choisi :

(a) Un opérateur linéaire régulier γ , appliquant \mathcal{E} dans $\mathcal{L}(E)$, tel que

$$(44.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(X)^2 = g(X)(X) 1_E; \\ \text{val}(\gamma) \text{ est irréductible;} \end{array} \right.$$

(b) Une structure d'espace K -vectoriel sur E ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{Q}) telle que l'ensemble des K -scalaires soit le commutant de $\text{val}(\gamma)$.

On dira que γ est l'*opérateur de Dirac* de E , que K est le *corps de base* de E .

Théorème :

Soit \mathcal{E} un espace euclidien ; soient n et p sa dimension et son indice d'inertie.

1) \mathcal{E} possède un espace de spineurs.

2) Soient E et E' deux espaces de spineurs de \mathcal{E} ; γ et γ' les opérateurs de Dirac correspondants.

— Alors E et E' ont même corps de base et même dimension (donnés, en fonction de n et p , par le tableau (44.25)).

— Si n est pair, il existe un opérateur K -linéaire régulier Λ , appliquant E sur E' , tel que

$$\diamond \quad \gamma'(X) \equiv \Lambda \cdot \gamma(X) \cdot \Lambda^{-1}$$

— Si n est impair, il existe un opérateur K -linéaire régulier Λ , appliquant E sur E' , et un nombre ε ($\varepsilon = \pm 1$), tels que

$$\heartsuit \quad \gamma'(X) \equiv \varepsilon \Lambda \cdot \gamma(X) \cdot \Lambda^{-1}$$

1) Le théorème (44.25) nous permet de construire une algèbre de Dirac irréductible Γ , de dimension n , d'indice d'inertie p , opérant sur K^N ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{Q}); choisissons une base orthonormale S_λ de \mathcal{E} , une base orthonormale γ_λ de Γ (on donnera le même numéro à des éléments γ_λ et S_λ ayant même carré scalaire), et posons

$$\clubsuit \quad \gamma(X) = [\Lambda S^{-1}(X)] \gamma_\lambda$$

où l'opérateur de Dirac γ et le corps de base K font de K^N un espace de spineurs de \mathcal{E} .

2) Nous allons établir la 2^e partie du théorème dans le cas où E est l'espace de spineurs que nous venons de construire. δ Le cas général s'en déduit.

Considérons toujours la base S_λ , les matrices $\gamma_\lambda = \gamma(S_\lambda)$; posons $\gamma'_\lambda = \gamma(S_\lambda)$

a) $n - 2p = -1$ (M^0 4).

Il résulte alors de (44.23, 24) que l'algèbre de Clifford A' engendrée par $\text{val}(\gamma')$ possède la base

$$\begin{array}{c} 1, \\ \gamma'_1, \dots, \gamma'_n \\ \gamma'_1 \cdot \gamma'_2, \dots, \gamma'_{n-1} \cdot \gamma'_n \\ \dots \dots \dots \\ \gamma'_1 \cdot \gamma'_2 \cdot \dots \cdot \gamma'_n \end{array}$$

dont nous appellerons les éléments a'_l ($l = 1, 2, \dots, 2^n$).

De même, avec les γ_λ , on forme une base de l'algèbre de Clifford A engendrée par $\text{val}(\gamma)$.

Posons

$$\Phi \left(\sum_i a_i \cdot i_x \right) = \sum_i a'_i \cdot i_x \quad (i_x \in \mathbb{R})$$

On a en particulier

$$\Phi(\gamma(X)) = \gamma'(X);$$

Comme les tables de multiplication des a'_p et des a_p sont les mêmes, δ Φ est une *représentation irréductible d'algèbre irréductible*; il résulte de (44.6) l'existence d'un opérateur linéaire régulier Λ , appliquant E sur E' , tel que

$$[a \in A] \Rightarrow \Phi(a) = \Lambda \cdot a \cdot \Lambda^{-1}$$

d'où

$$\gamma'(X) = \Lambda \cdot \gamma(X) \cdot \Lambda^{-1}.$$

Soient K et K' les corps de base respectifs de E et E' ; l'ensemble des K -scalaires de E est le commutant de A ; son transmuté par Λ est le commutant de A' , donc l'ensemble des K' -scalaires; par suite $\dim(K) = \dim(K')$, d'où $K = K'$.

a_1) $K = \mathbb{R}$.

Alors Λ résout le problème.

a_2) $K = \mathbb{C}$.

Alors n est impair (tableau (44.25)); $a'_{2^p} = \gamma'_1 \dots \gamma'_n$ appartient au commutant de A' et a le carré -1 (44.21); donc $a'_{2^p} = \pm i$; en changeant au besoin γ' en $-\gamma'$, on peut réaliser

$$a'_{2^p} = \varepsilon i_{E'} \quad , \quad a_{2^p} = \varepsilon i_E$$

d'où $\Lambda \cdot i_E \cdot \Lambda^{-1} = i_{E'}$; Λ est \mathbb{C} -linéaire, il résout le problème.

a_3) $K = \mathbb{Q}$.

Alors n est pair (Cf. (44.25)); formons le tableau des $a'_i, a'_j, a'_k, a'_l, a'_m, a'_n$; comme dans le cas des théorèmes (44.23, 24), on constate que ce tableau est une *base* pour l'algèbre engendrée par $\text{val}(\gamma')$ et par son commutant; on peut donc préciser l'opérateur Φ en supposant

$$\Phi \left(\sum_i a_i \cdot i_q \right) = \sum_i a'_i \cdot i_q \quad (i_q \in \mathbb{Q})$$

L'opérateur Λ correspondant vérifie toujours

$$\gamma'(X) = \Lambda \cdot \gamma(X) \cdot \Lambda^{-1}$$

et, en plus

$$\Lambda \cdot q_E \cdot \Lambda^{-1} = q_{E'}$$

Λ est \mathbb{Q} -linéaire.

b) $n - 2p = -1$ (M^0 4).

Alors n est impair; δ en changeant éventuellement γ' en $-\gamma'$, on peut réaliser $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \dots \gamma_n = \varepsilon 1_E, \gamma'_1 \cdot \gamma'_2 \dots \gamma'_n = \varepsilon 1_{E'}$; si on considère l'espace $\tilde{\mathcal{E}}$ sous-tendu par S_1, S_2, \dots, S_{n-1} , on est ramené à l'un des cas précédents (a_1) ou (a_2); on forme ainsi un opérateur Λ , K -linéaire, tel que

$$\Lambda \cdot \gamma_\lambda \cdot \Lambda^{-1} = \gamma'_\lambda \quad (\text{pour } \gamma \leq n-1);$$

δ on a aussi $\Lambda \cdot \gamma_n \cdot \Lambda^{-1} = \gamma'_n$; donc Λ résout le problème.

C.Q.F.D.

Définition, théorème :

Soit \mathcal{E} un espace euclidien de dimension n ; E un espace de spineurs de \mathcal{E} (K et γ désigneront son corps de base et son opérateur de Dirac).

1) L'ensemble \mathcal{G} des opérateurs A tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(E), A \text{ régulier} \\ A \text{ est } K\text{-linéaire} \\ [X \in \mathcal{E}] \Rightarrow [A \cdot \gamma(X) \cdot A^{-1} \in \text{val}(\gamma)] \end{array} \right.$$

est un groupe, appelé *groupe de Clifford* de E .

2) L'opérateur \mathcal{R} défini par

$$(44.39) \quad \left[\begin{array}{l} X \in \mathcal{E} \\ A \in \mathcal{G} \end{array} \right] \Rightarrow [A \cdot \gamma(X) \cdot A^{-1} = \gamma(\mathcal{R}(A)(X))]$$

est une représentation de \mathcal{G} dans le groupe orthogonal $O(\mathcal{E})$, appelée *représentation de spin*.

3)

$$\text{val}(\mathcal{R}) = \begin{cases} O(\mathcal{E}) & \text{si } n \text{ est pair} \\ SO(\mathcal{E}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

4) Le *noyau* de la représentation de spin \mathcal{R} est l'ensemble des scalaires s tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} s \in R \text{ si } K = R \text{ ou } Q \\ s \in C \text{ si } K = C \end{array} \right.$$

a) La vérification de (1) et (2) est immédiate.

b) Supposons n pair ; soit B un élément de $O(\mathcal{E})$. δ L'opérateur γ' :

$\gamma'(X) = \gamma(B(X))$ est un opérateur de Dirac ; le théorème précédent montre qu'il existe un A , appliquant E sur E , K -linéaire, tel que

$$\gamma'(X) = A \cdot \gamma(X) \cdot A^{-1}; \quad \delta \quad A \in \mathcal{G}, \quad B = \mathcal{R}(A).$$

c) Supposons n impair ; le même raisonnement montre que

$$\diamond \quad [B \in O(\mathcal{E})] \Leftrightarrow [\pm B \in \text{val}(\mathcal{R})]$$

— Considérons le tenseur θ défini par

$$\theta(X_1)(X_2) \dots (X_n) = \text{Tr}(\varepsilon \gamma(X_1) \cdot \gamma(X_2) \dots \gamma(X_n))$$

avec

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } K = R \text{ ou } Q, \\ i & \text{si } K = C \end{cases}$$

le tenseur antisymétrisé $\omega = P_{\varepsilon}(\theta)$ (Cf. (25.32)) est une n -forme non nulle : δ on le voit en prenant pour X_1, X_2, \dots, X_n les vecteurs d'une base orthonormale de \mathcal{E} .

Si $B = \mathcal{R}(A)$, $A \in \mathcal{G}$, δ on a :

$$\theta(B(X_1)) \dots (B(X_n)) = \theta(X_1) \dots (X_n)$$

d'où

$$\omega(B(X_1)) \dots (B(X_n)) = \omega(X_1) \dots (X_n),$$

soit $\det(B) = +1$ (26.13). Donc

$$\text{val}(\mathcal{R}) \subset SO(\mathcal{E}) \quad (29.31)$$

— Si $B \in SO(\mathcal{E})$, — $B \notin SO(\mathcal{E})$ (puisque n est impair) ; donc — $B \notin \text{val}(\mathcal{R})$; par conséquent $B \in \text{val}(\mathcal{R})$ (cf. \diamond). D'où le (3).

d) Si $\mathcal{R}(A) = 1_{\mathcal{E}}$, la définition de \mathcal{R} montre que A appartient au commutant de $\text{val}(\gamma)$; donc A est un K -scalaire (44.37, b). Comme A est K -linéaire (par définition de \mathcal{G}), A commute avec les K -scalaires. D'où (4).

C.Q.F.D.

— Supposons $K = R$ ou Q (1).

Si $B = \mathcal{R}(A)$ ($A \in \mathcal{G}$), l'image réciproque $\mathcal{R}^{-1}(B)$ est l'ensemble des sA , $s \in R$ (44.39,4). On peut « normer » A par la condition $|\det(A)| = 1$, définissant ainsi le *groupe de Clifford restreint* \mathcal{G}_1 ;

$$(44.40) \quad [A \in \mathcal{G}_1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \in \mathcal{G} \\ |\det(A)| = 1 \end{array} \right]$$

(44.41) — δ en restreignant \mathcal{R} à \mathcal{G}_1 , $\text{val}(\mathcal{R})$ reste égal à $O(\mathcal{E})$ ou à $SO(\mathcal{E})$, suivant la parité de n ; le noyau de la représentation de spin se

(1) Pour fixer les idées : avec quelques complications, les considérations suivantes s'étendent au cas $K = C$.

réduit à $\pm 1_E$; on peut alors définir sur \mathfrak{G}_1 une structure de variété de classe C^∞ , de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, par la condition que \mathfrak{R} est une projection de \mathfrak{G}_1 dans $O(\mathfrak{E})$ (voir (7.1); on sait que $O(\mathfrak{E})$ est déjà pourvu d'une telle structure de variété (29.32)). Le groupe discret $[A \rightarrow \pm A]$, la projection \mathfrak{R} font de \mathfrak{G}_1 un revêtement du groupe $O(\mathfrak{E})$ ($SO(\mathfrak{E})$ si n est impair) ⁽¹⁾.

(44.42) — Soit \mathfrak{L} l'espace vectoriel tangent à \mathfrak{G}_1 au point 1_E ; $\delta \mathfrak{L}$ est un espace vectoriel de K -affineurs de E , caractérisé par les propriétés

$$\left[\begin{array}{l} \lambda \in \mathfrak{L} \\ X \in \mathfrak{E} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Tr}(\lambda) = 0 \\ [\lambda, \gamma(X)] \in \text{val}(\gamma) \end{array} \right]$$

— \mathfrak{L} possède la base

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2, \dots, \gamma_1 \cdot \gamma_n, \quad \gamma_2 \cdot \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1} \cdot \gamma_n \quad (\text{notations (44.20)})$$

$$- [\lambda \in \mathfrak{L}, A \in \mathfrak{G}_1] \Rightarrow [A \cdot \lambda \cdot A^{-1} \in \mathfrak{L}]$$

Théorème :

$$(44.43) \quad [\lambda, \lambda' \in \mathfrak{L}] \Rightarrow [[\lambda, \lambda'] \in \mathfrak{L}]$$

$[\lambda, \lambda']$ désignant le commutateur $\lambda \cdot \lambda' - \lambda' \cdot \lambda$.

Ce théorème est un corollaire des formules élémentaires :

$$(44.44) \quad \langle a, p \rangle q - \langle a, q \rangle p = \frac{1}{2} [a, pq] = \frac{1}{4} [a, [p, q]]$$

$$(44.45) \quad \begin{aligned} & [a, q] \langle b, p \rangle + [p, a] \langle b, q \rangle + [q, b] \langle a, p \rangle + [b, p] \langle a, q \rangle \\ &= [ab, pq] = \frac{1}{2} [[a, b], pq] = \frac{1}{2} [ab, [p, q]] = \frac{1}{4} [[a, b], [p, q]] \end{aligned}$$

⁽¹⁾ On appelle généralement revêtement d'un groupe topologique un revêtement qui est aussi un groupe topologique, la projection étant un homomorphisme : c'est bien le cas ici.

valables si a, b, p, q appartiennent à une algèbre de Dirac quelconque. On peut aussi le déduire de la théorie des groupes de Lie (\mathfrak{L} est l'algèbre de Lie du groupe \mathfrak{G}_1). Signalons aussi le théorème :

— Il existe un opérateur régulier \mathfrak{S} , appliquant \mathfrak{L} sur l'ensemble des opérateurs antisymétriques de \mathfrak{E} ⁽¹⁾, défini par

$$[\lambda \in \mathfrak{L}, X \in \mathfrak{E}] \Rightarrow [\gamma(\mathfrak{S}(\lambda)(X)) = [\lambda, \gamma(X)]];$$

$$\text{on a } \mathfrak{S}([\gamma(Y), \gamma(Z)]) = 4[Y \cdot \bar{Z} - Z \cdot \bar{Y}] \quad (Y, Z \in \mathfrak{E}).$$

(44.46) — Si A est une variable qui parcourt \mathfrak{G}_1 , et δ une dérivation, on a

$$A^{-1} \cdot \delta A \in \mathfrak{L}$$

$$\delta[\mathfrak{R}(A)(X)] = \mathfrak{R}(A)(\mathfrak{S}(A^{-1} \cdot \delta A)(X)) + \delta X$$

— Si $\lambda \in \mathfrak{L}$, on a :

$$e^\lambda \in \mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{R}(e^\lambda) = e^{\mathfrak{S}(\lambda)}$$

Théorème (notations précédentes)

(44.47) Supposons toujours $K = R$ ou Q .

1) Il existe un nombre ϵ (donné par le tableau \heartsuit) et un opérateur R -bilinéaire régulier g tels que :

$$\diamond \quad \left[\begin{array}{l} \psi, \theta \in E \\ X \in \mathfrak{E} \\ s \in K \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a) \ g(\psi)(\theta) \in R \\ (b) \ g(\gamma(X) \cdot \psi)(\theta) = \epsilon g(\psi)(\gamma(X) \cdot \theta) \\ (c) \ g(\psi s)(\theta) = g(\psi)(\theta s) \end{array} \right]$$

n —multiple de 4 :	0	1	2	3
\heartsuit ϵ	± 1	$+ 1$	± 1	$- 1$

⁽¹⁾ On rappelle qu'un affineur H d'un espace euclidien est dit antisymétrique si $\bar{H} = -H$ (29.30).

(44.47) 2) ε étant donné, tout autre opérateur g' bilinéaire régulier vérifiant \diamond est le produit de g par un nombre réel non nul.

3) g est symétrique ou antisymétrique.

4) Soit A un élément du groupe de Clifford \mathcal{G} de E ; soit \mathcal{G}_1 le groupe de Clifford restreint.

Alors :

(a) Il existe un nombre réel non nul ρ tel que

$$g(A\psi)(A\theta) = \rho g(\psi)(\theta)$$

(b) $[A \in \mathcal{G}_1] \Leftrightarrow [|\rho| = 1]$.

a) Soit E^* le dual réel de E . Si l'on pose (pour $\varphi \in E^*$, $s \in K$, $X \in \mathcal{E}$):

$$\begin{cases} \varphi s = \varphi \cdot \bar{s} \\ \gamma'(X)(\varphi) = \varepsilon \varphi \cdot \gamma(X) \end{cases}$$

δ γ' et K font de E^* un nouvel espace de spineurs de \mathcal{E} . Il suffit d'appliquer le théorème (44.38) au couple E, E^* (en posant $A = g$) pour trouver \diamond .

b) On sait que ε est arbitraire si n est pair; si n est impair, on note que $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \dots \gamma_n = \pm 1$, donc que

$$\pm g(\psi)(\theta) = g(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \dots \gamma_n \psi)(\theta) = \varepsilon^n g(\psi)(\gamma_n \dots \gamma_1 \theta),$$

et $\gamma_n \dots \gamma_1 = \varepsilon \gamma_1 \dots \gamma_n$. δ D'où \heartsuit .

c) Si g' vérifie aussi \diamond , δ $g^{-1} \cdot g'$ commute avec les $\gamma(X)$ et avec les K -scalaires; c'est donc un R -scalaire.

d) δ L'opérateur $g'[g'(\psi)(\theta) = g(\theta)(\psi)]$ vérifie aussi \diamond ; d'où $g' = \lambda g$. δ $\lambda^2 = 1$; d'où le (3).

Si $A \in \mathcal{G}$, δ l'opérateur $g'[g'(\psi)(\theta) = g(A\psi)(A\theta)]$ vérifie \diamond ; il existe donc ρ , réel, tel que $g' = \rho g$. D'où (4, a).

e) Quel que soit l'aflineur A de E , δ l'opérateur \bar{A} défini par

$$g(A\psi)(\theta) = g(\psi)(\bar{A}\theta)$$

vérifie $\text{Tr}(\bar{A}) = \text{Tr}(A)$ (généralisation de (29.29) au cas où g peut être antisymétrique); on en déduit ⁽¹⁾ $\det(\bar{A}) = \det(A)$.

Si $A \in \mathcal{G}$, on a $\bar{A} \cdot A = \rho$; d'où $[[\det(A)] = 1] \Leftrightarrow [|\rho| = 1]$.

C.Q.F.D.

⁽¹⁾ Voir par exemple Souriau (réf. p. 117), § 15, formules 42.

Terminons sur l'exemple suivant :

On considère un espace euclidien \mathcal{E} , de dimension 5, d'indice d'inertie 1; un espace de spineurs E de \mathcal{E} ; soit γ l'opérateur de Dirac. Alors :

— Le corps de base de E est celui des *quaternions*;

— L'opérateur g (44.47) donne à E une structure d'espace euclidien quaternionique, de Q -dimension 2, de Q -indice d'inertie 1 (voir le § 43); E possède une Q -base T telle que

$$\bar{T} \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

— L'algèbre de Dirac $\text{val}(\gamma)$ est l'ensemble des Q -aflineurs symétriques de trace nulle;

(44.48) δ

$$[A \in \text{val}(\gamma)] \Leftrightarrow [A = T \cdot \begin{bmatrix} r & -\bar{q} \\ q & -r \end{bmatrix} \cdot T^{-1}, r \in R, q \in Q] \\ \Rightarrow [A^2 = r^2 - |q|^2] \text{ (1)}$$

— Le groupe de Clifford restreint \mathcal{G}_1 est l'ensemble des Q -aflineurs A vérifiant $\bar{A} \cdot A = \pm 1_E$.

— $[A \in \mathcal{G}, \bar{A} \cdot A = +1]$

$$\Leftrightarrow [A = T \begin{bmatrix} \sqrt{1+|a|^2} & \bar{a} \\ a & \sqrt{1+|a|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} T^{-1}; a, u, v \in Q, |u|=|v|=1] \\ \Rightarrow [\mathcal{R}(A) = \text{rotation orthochrone (2)}]$$

— $[A \in \mathcal{G}, \bar{A} \cdot A = -1] \Rightarrow [\mathcal{R}(A) = \text{rotation antichrone}]$.

⁽¹⁾ $\text{val}(\gamma)$ possède donc une base orthonormale transmutée par T des matrices γ_i écrites en (44.30).

⁽²⁾ On voit que la correspondance $\begin{bmatrix} a \\ u \\ v \end{bmatrix} \rightarrow A$ est biunivoque; le groupe $\bar{A} \cdot A = 1$ est

donc homéomorphe au produit direct $R^4 \times S_2 \times S_2$ (S_2 désignant la sphère à 3 dimensions), donc simplement connexe (Voir la note II à la fin de l'ouvrage); la représentation \mathcal{R} , limitée à ce sous-groupe, définit donc le revêtement universel du groupe restreint (cf. (29.45)) de \mathcal{E} .

(44.49) — On passe au cas $n = 4$, $p = 1$ (spineurs de Dirac) en se limitant à la partie de l'algèbre de Dirac val (γ) qui anticommute avec $\alpha = T \cdot \gamma_5 \cdot T^{-1}$, c'est-à-dire au cas $\bar{q} = -q$; on obtient le nouveau groupe de Clifford restreint en se limitant aux Q-affineurs A tels que $\bar{A} \cdot A = \pm 1$, $A\alpha = \pm \alpha A$; les choix de ces deux signes correspondent, dans la représentation \mathcal{R} , aux quatre nappes du groupe de Lorentz.

§ 45 Équation de Dirac.

Dérivation covariante des spineurs.

(45.1) Soit U une variété riemannienne (de dimension n , d'indice d'inertie p), telle que le champ $[X \rightarrow g]$ soit différentiable (§ 30).

Soit d'autre part Γ une algèbre de Dirac irréductible, de dimension n , d'indice d'inertie p , opérant sur un espace E (th. (44.25)).

— X_0 étant un point de U, on peut aisément construire, dans un voisinage de X_0 , un champ différentiable de bases orthonormales, $[X \rightarrow T]$.

Soit d'autre part $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ une base orthonormale de Γ ; si nous posons, pour tout vecteur V tangent à U en X :

$$(45.2) \quad \gamma(V) = \sum_{\mu} \gamma_{\mu} [T^{-1}(V)]$$

$\delta \gamma$ est un opérateur de Dirac, qui fait de E un espace de spineurs de D_X (*) :

$$(45.3) \quad [V, W \in D_X] \Rightarrow [\gamma(V) \cdot \gamma(W) + \gamma(W) \cdot \gamma(V) = 2g(V)(W) 1_E]$$

δ le champ $X \rightarrow \gamma$ est différentiable.

(*) On rappelle que D_X désigne l'espace vectoriel tangent à U en X. — On a supposé, bien entendu, que les signes des carrés scalaires des T_{μ} et des γ_{μ} se correspondaient dans la numérotation.

— Inversement, si on a défini, dans un ouvert de U, un champ différentiable $[X \rightarrow \gamma]$ d'opérateurs de Dirac de D_X , tel que $\text{val}(\gamma) \equiv \Gamma$, et si l'on pose

$$(45.4) \quad T_{\mu} = \gamma^{-1}(\gamma_{\mu})$$

$T = [T_1, T_2, \dots, T_n]$ est une base orthonormale; le champ $[X \rightarrow T]$ est différentiable, et l'on a (45.2).

— Soit $[X \rightarrow V]$ un champ différentiable de vecteurs; δ une dérivation. En dérivant (45.2), il vient

$$(45.5) \quad \delta^T[\gamma(V)] = \gamma(\delta V)$$

δ^T désignant la dérivation covariante dans la base T (voir (28.10)).

En désignant par $\hat{\delta}V$ la dérivée covariante de V dans la connexion riemannienne de U (30.13), et par H la différence entre la connexion de la base T et la connexion riemannienne (th. (28.34)), on a donc

$$(45.6) \quad \delta[\gamma(V)] = \gamma(\hat{\delta}V + H(\delta X) \cdot V)$$

En dérivant (45.3), et en notant que

$$\delta[g(V)(W)] = g(\hat{\delta}V)(W) + g(V)(\hat{\delta}W)$$

puisque $\hat{\delta}g = 0$, il vient

$$g(H(\delta X)V)(W) + g(V)(H(\delta X)W) = 0$$

d'où, V et W étant arbitraires au point X :

$$(45.7) \quad \overline{H(\delta X)} \equiv -H(\delta X) \text{ (notations (29.3)).}$$

— Supposons désormais que le corps de base K de l'espace E est R ou Q (*) ; adoptons les notations (44.40, 44.42), \mathcal{L} désignant en particulier l'algèbre de Lie du groupe de Clifford restreint \mathcal{G}_1 ,

(*) Le tableau (44.26) montre que l'on peut toujours se ramener à ce cas, en changeant g en $-g$.

l'opérateur S défini en (44.46) applique \mathcal{L} sur l'ensemble des affineurs antisymétriques de D_X ; on peut donc poser

$$(45.8) \quad \lambda(\delta X) \equiv -S^{-1}(H(\delta X)) \quad [\lambda(\delta X) \in \mathcal{L}]$$

d'où, grâce à (44.46),

$$(45.9) \quad \delta[\gamma(V)] = \gamma(\widehat{\delta V}) + [\gamma(V), \lambda(\delta X)]$$

$[\gamma(V), \lambda(\delta X)]$ désignant le commutateur $\gamma(V) \cdot \lambda(\delta X) - \lambda(\delta X) \cdot \gamma(V)$.

— Soit $[X \rightarrow \psi]$ une application différentiable de U dans E (« champ de spineurs »); nous conviendrons de définir la *dérivation covariante des spineurs* en posant :

$$(45.10) \quad \widehat{\delta}\psi = \delta\psi + \lambda(\delta X)\psi$$

de sorte que (45.9) peut s'écrire (*) :

$$(45.11) \quad \widehat{\delta}[\gamma(V)\psi] \equiv \gamma(\widehat{\delta V}) \cdot \psi + \gamma(V) \cdot \widehat{\delta}\psi$$

— Écrivons les formules précédentes à l'aide d'une *carte* $[x \rightarrow X]$; désignons par S la base $\frac{\partial X}{\partial x}$; posons

$$(45.12) \quad \gamma_\mu = \gamma(S_\mu) \equiv \gamma(\partial_\mu X); \quad \lambda_\mu = \lambda(S_\mu) \quad (**)$$

et, conformément à (44.16)

$$(45.13) \quad \gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu$$

Si $l \in \mathcal{L}$, on vérifie à l'aide de (44.44) que

$$(45.14) \quad l = \frac{1}{8} [\gamma^\mu, [\gamma_\mu, l]]$$

(*) Cette formule montre que la dérivation covariante des spineurs ne dépend que de l'opérateur γ (et pas du choix de la base T).

(**) Ne pas confondre avec les γ_μ choisis en (45.2).

d'autre part la formule (45.9), appliquée au cas $\delta = \partial_\mu$, $V = S$, donne

$$(45.15) \quad \partial_\mu \gamma_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \gamma_\rho + [\gamma_\nu, \lambda_\mu]$$

compte tenu de (28.56);

d'où

$$(45.16) \quad \lambda_\mu = \frac{1}{8} [\gamma^\nu, \partial_\mu \gamma_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \gamma_\rho]$$

Un calcul élémentaire permet d'en déduire les formules :

$$(45.17) \quad \gamma^\mu \cdot \lambda_\mu + \lambda_\mu \cdot \gamma^\mu = -\frac{1}{4} \gamma^\mu [\partial_\mu \gamma_\nu - \partial_\nu \gamma_\mu] \gamma^\nu$$

$$(45.18) \quad \gamma^\mu \cdot \lambda_\mu - \lambda_\mu \cdot \gamma^\mu = \partial_\mu \gamma^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \gamma^\nu = \frac{1}{u} \partial_\mu [u \gamma^\mu]$$

u étant la racine carrée du déterminant de Gram.

— Supposons que nous changions le champ $[X \rightarrow \gamma]$ en $[X \rightarrow \gamma^*]$, en conservant le champ $[X \rightarrow g]$. Il existe alors un champ différentiable d'affineurs orthogonaux, $[X \rightarrow B]$, tel que

$$(45.19) \quad \gamma^*(V) = \gamma(BV)$$

Sur un ouvert *simplement connexe*, il existe donc un nombre ε ($\varepsilon = \pm 1$) et un champ différentiable $[X \rightarrow A]$ ($A \in \mathcal{G}_1$) tels que

$$\gamma^*(V) \equiv \varepsilon A \cdot \gamma(V) \cdot A^{-1}$$

(Cf. (44.41) et (10.24); on peut prendre $\varepsilon = +1$ si n est pair).

En différentiant cette formule, on en déduit la formule de dérivation covariante des spineurs correspondante :

$$\widehat{\delta}^* \psi = \delta\psi + \lambda^*(\delta X)\psi$$

avec

$$(45.20) \quad \lambda^*(\delta X) \equiv A \cdot \lambda(\delta X) \cdot A^{-1} - \delta A \cdot A^{-1}$$

soit

$$(45.21) \quad \widehat{\delta}^* \psi \equiv A \cdot \widehat{\delta}[A^{-1} \cdot \psi]$$

— Considérons l'opérateur différentiel \mathcal{D} , défini sur les champs de spineurs par

$$(45.22) \quad \mathcal{D}\psi = \gamma^\mu \widehat{\delta}_\mu \psi \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \gamma^\mu \lambda_\mu \psi$$

Il est clair que cet opérateur ne dépend pas de la carte choisie, mais seulement du champ $[X \rightarrow \gamma]$; dans le cas où U est un espace euclidien, et où l'on a choisi γ constant, on trouve immédiatement $\mathcal{D}^2\psi = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi = \Delta\psi$; on peut donc définir le laplacien d'un champ de spineurs par la formule (1):

$$(45.23) \quad \Delta\psi = \mathcal{D}^2\psi$$

Par suite, si le champ $[X \rightarrow \psi]$ est solution de l'équation de Dirac :

$$(45.24) \quad \mathcal{D}\psi + a\psi = 0 \quad (a = \text{constante réelle})$$

il vérifie aussi l'équation

$$(45.25) \quad \Delta\psi - a^2\psi = 0.$$

Dans un changement du champ $[X \rightarrow \gamma]$ en $[X \rightarrow \gamma^*]$, il résulte de (45.18) et (45.20) que \mathcal{D} est remplacé par l'opérateur \mathcal{D}^* :

$$(45.26) \quad \mathcal{D}^*\psi \equiv \epsilon A \cdot \mathcal{D}[A^{-1} \cdot \psi]$$

Équation de Dirac en relativité à 5 dimensions.

— Soit E un espace euclidien quaternionique, hyperbolique, de Q -dimension 2; on sait que l'ensemble Γ des Q -affineurs symé-

(1) On peut considérer les formes non homogènes comme des spineurs (non irréductibles), en posant $\gamma(V) = \text{Int}(V) + \text{Ext}(V)$; (45.23) coïncide alors avec la définition (30.49) du laplacien d'une forme.

triques de trace nulle de E est une algèbre de Dirac, de dimension 5, d'indice d'inertie 1 (44.48).

Considérons, sur l'univers pentadimensionnel U (§ 40), un phénomène physique défini par 4 champs différentiables :

$$(45.27) \quad \begin{cases} [X \rightarrow \psi] \quad (\psi \in E); \\ [X \rightarrow \varphi] \quad (\varphi \in E); \\ [X \rightarrow \gamma] \quad (\gamma = \text{opérateur linéaire régulier appliquant } D_X \text{ sur } \Gamma); \\ [X \rightarrow \Theta] \quad (\Theta = \text{tenseur symétrique, contravariant, du second ordre}). \end{cases}$$

Adoptons pour ce phénomène la présence

$$(45.28) \quad p = p_1 + p_2$$

avec

$$(45.29) \quad \begin{cases} p_1 = \Re \left(\bar{\varphi} \cdot \gamma^j \cdot \partial_j \psi - \bar{\delta}_j \bar{\varphi} \cdot \gamma^j \cdot \psi - \frac{1}{4} \bar{\varphi} \cdot \gamma^i \cdot [\partial_j \gamma_k - \partial_k \gamma_j] \cdot \gamma^k \cdot \psi + 2a \bar{\varphi} \cdot \psi \right) \\ p_2 = \frac{1}{2} \Theta^{jk} [g_{jk} - \langle \gamma_j, \gamma_k \rangle] \end{cases}$$

— a désigne une constante réelle; on a posé

$$\gamma_j = \gamma(\partial_j X) \quad , \quad \gamma^j \equiv g^{jk} \gamma_k;$$

$\Re(q)$ désigne la partie réelle d'un quaternion q ; $\langle \gamma_j, \gamma_k \rangle$ le produit scalaire de γ_j et γ_k , défini (44.15) par

$$2\langle \gamma_j, \gamma_k \rangle 1_E = \gamma_j \cdot \gamma_k + \gamma_k \cdot \gamma_j$$

δ Cette présence p est conforme aux principes de la théorie (§ 40). Étudions les diverses équations aux variations.

— L'équation aux variations du tenseur Θ est immédiate :

$$(45.30) \quad g_{jk} \equiv \langle \gamma_j, \gamma_k \rangle$$

Il en résulte que l'opérateur de Dirac γ et le corps Q font de E un espace de spineurs pour D_X ; on peut donc appliquer les considérations précédentes aux champs de spineurs $[X \rightarrow \varphi]$, $[X \rightarrow \psi]$.

On constate en particulier que l'on a

$$(45.31) \quad \bar{\gamma}_j = \gamma_j; \quad \bar{\gamma}^j = \gamma^j; \quad \bar{\lambda}_j = -\lambda_j$$

l'application de la formule (45.17) conduit alors à l'identité

$$(45.32) \quad p_1 = \mathfrak{R}(\bar{\varphi} \cdot \mathcal{D}\psi - \overline{\mathcal{D}\varphi} \cdot \psi + 2a\bar{\varphi} \cdot \psi)$$

Considérons le champ de vecteurs $[X \rightarrow J]$ défini par

$$(45.33) \quad g(J)(V) \equiv \mathfrak{R}(\bar{\varphi} \cdot \gamma(V) \cdot \psi);$$

les composantes de J sont :

$$(45.34) \quad J^k = \mathfrak{R}(\bar{\varphi} \cdot \gamma^k \cdot \psi)$$

et calculons (cf. (30.27))

$$\begin{aligned} \operatorname{div} J &= \partial_k J^k + \Gamma_{ik}^i J^k \\ &= \mathfrak{R}(\bar{\partial}_k \bar{\varphi} \cdot \gamma^k \cdot \psi + \bar{\varphi} \cdot \gamma^k \cdot \partial_k \psi + \bar{\varphi} \cdot [\partial_k \gamma^k + \Gamma_{ik}^i \gamma^k] \cdot \psi); \end{aligned}$$

grâce à (45.18) et (45.31), il vient

$$(45.35) \quad \operatorname{div} J = \mathfrak{R}(\overline{\mathcal{D}\varphi} \cdot \psi + \bar{\varphi} \cdot \mathcal{D}\psi)$$

— Considérons un pavé C (Cf. (33.1)) et une variation δ des seuls champs $X \rightarrow \varphi$, $X \rightarrow \psi$; la formule d'Ostrogradski (composée de la formule de Stokes et de (30.35)), et la formule (45.35), dans laquelle on remplace successivement φ par $\delta\varphi$, ψ par $\delta\psi$, donnent

$$(45.36) \quad \int_C \mathfrak{R}(\overline{\mathcal{D}\delta\varphi} \cdot \psi + \bar{\delta\varphi} \cdot \mathcal{D}\psi) \rho = \int_C \mathfrak{R}(\overline{\mathcal{D}\varphi} \cdot \delta\psi + \bar{\varphi} \cdot \mathcal{D}\delta\psi) \rho = 0$$

ρ désignant la densité riemannienne;

en utilisant l'expression (45.32) de p_1 , on en déduit la formule

$$(45.37) \quad \delta \int_C p_1 \rho = 2 \int_C \{ \mathfrak{R}(\bar{\delta\varphi} \cdot [\mathcal{D}\psi + a\psi]) - \mathfrak{R}(\bar{\delta\psi} [\mathcal{D}\varphi - a\varphi]) \} \rho$$

d'où l'on déduit les équations aux variations de φ et ψ :

$$(45.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}\psi + a\psi \equiv 0 \\ \mathcal{D}\varphi - a\varphi \equiv 0; \end{array} \right. \quad \boxed{\mathcal{D}\psi + a\psi = 0}$$

φ et ψ vérifient chacun une équation de Dirac.

— Supposons maintenant que l'on donne simultanément une variation δ au champ $[X \rightarrow \gamma]$ (nulle au bord de C). Il résulte de (34.12 c), et de la structure euclidienne de Γ , l'existence de nombres W^{jk} tels que la formule (45.37) se complète en

$$(45.39) \quad \begin{aligned} \delta \int_C p_1 \rho &= \int_C \{ 2\mathfrak{R}(\bar{\delta\varphi} \cdot [\mathcal{D}\psi + a\psi]) - \bar{\delta\psi} \cdot [\mathcal{D}\varphi - a\varphi] + W^{jk} \langle \gamma_j, \delta\gamma_k \rangle \} \rho \end{aligned}$$

Il résulte de (45.32) et (45.26) que la présence p est *invariante* dans toute substitution

$$(45.40) \quad \psi \rightarrow A\psi, \quad \varphi \rightarrow A\varphi, \quad \gamma_j \rightarrow A \cdot \gamma_j \cdot A^{-1}$$

A étant un élément du groupe de Clifford restreint \mathfrak{G}_r . En différenciant, puis en faisant $A = 1$, on voit que δp est nul si l'on a

$$(45.41) \quad \delta\psi = \lambda\psi, \quad \delta\varphi = \lambda\varphi, \quad \delta\gamma_k = [\lambda, \gamma_k]$$

λ étant un élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{L} ; si l'on prend un champ $[X \rightarrow \lambda]$ nul au bord de C , et si l'on porte dans (45.39), il vient

$$(45.42) \quad 0 = \int_C \{ 2\mathfrak{R}(\bar{\lambda} \cdot \bar{\varphi} \cdot [\mathcal{D}\psi + a\psi]) - \bar{\lambda} \cdot \bar{\psi} \cdot [\mathcal{D}\varphi - a\varphi] + W^{jk} \langle \gamma_j, [\lambda, \gamma_k] \rangle \} \rho$$

d'où, compte tenu des équations aux variations (45.38) :

$$W^{jk} \langle \gamma_j, [\lambda, \gamma_k] \rangle = 0 \text{ pour tout } \lambda \in \mathfrak{L}$$

en appliquant (44.46), on peut écrire cette proposition sous la forme

$$(45.43) \quad W^{jk} = W^{kj}.$$

En utilisant (45.39) et (45.29), on trouve immédiatement l'équation aux variations du champ $[X \rightarrow \gamma]$:

$$(45.44) \quad W^{jk} = \Theta^{jk}$$

(on rappelle qu'on a supposé $\Theta^{jk} = \Theta^{kj}$).

(45.45) On voit donc que l'on pourra choisir arbitrairement le champ $[X \rightarrow \gamma]$, pourvu qu'il vérifie la condition (45.30) ; en effet, si les équations aux variations (45.38) des champs φ et ψ sont vérifiées, la condition (45.43) sera automatiquement vérifiée, l'équation aux variations (45.44) du champ γ se vérifiera en choisissant pour le tenseur Θ la valeur

$$\Theta^{jk} = W^{jk}.$$

— Cette détermination de Θ est utile en particulier au calcul du tenseur d'énergie T du phénomène ; en effet, si l'on détermine les nombres A^{jk} tels que

$$(45.46) \quad \delta p_1 = \frac{1}{2} A^{jk} \delta g_{jk} \quad (A^{jk} = A^{kj})$$

dans une variation du tenseur g seul, il vient (Cf. (34.12 \diamond))

$$(45.47) \quad T^{jk} = A^{jk} + \Theta^{jk}$$

compte tenu de l'identité

$$(45.48) \quad p = 0$$

conséquence des équations aux variations (45.38). Conformément à (40.4), T vérifie l'identité

$$(45.49) \quad \operatorname{div} T = 0$$

— Supposons que nous ayons obtenu une solution des équations aux variations avec un champ $[X \rightarrow \gamma]$, vérifiant la condition

$$\langle \gamma_j, \gamma_k \rangle = g_{jk}$$

et que nous nous proposons de chercher une solution avec une autre valeur de ce champ, $[X \rightarrow \gamma^*]$, vérifiant la même condition

$$\langle \gamma_j^*, \gamma_k^* \rangle = g_{jk}.$$

Sur un ouvert simplement connexe, on sait qu'il existe un nombre $\varepsilon (= \pm 1)$ et un champ différentiable $[X \rightarrow A]$ ($A \in \mathfrak{G}$) tels que

$$(45.50) \quad \gamma^*(V) = \varepsilon A \cdot \gamma(V) \cdot A^{-1} \quad (45.19) ;$$

on constate, grâce à (45.26), que l'on obtient une nouvelle solution des équations aux variations en posant

$$(45.51) \quad \begin{cases} \psi^* = \Lambda \psi, \varphi^* = \Lambda \varphi & \text{si } \varepsilon = +1 \\ \psi^* = \Lambda \varphi, \varphi^* = \Lambda \psi & \text{si } \varepsilon = -1 ; \end{cases}$$

ceci peut d'ailleurs se déduire de l'invariance de la présence dans la substitution $\varphi \rightarrow \varphi^*, \psi \rightarrow \psi^*, \gamma \rightarrow \gamma^*, \Theta \rightarrow \Theta$.

— Soit q un quaternion quelconque ; définissons le champ de vecteur $[X \rightarrow J_q]$ par les composantes

$$(45.52) \quad [J_q]^k = \Re(\bar{\varphi} \cdot \gamma^k \cdot \psi \cdot q)$$

le calcul de (45.35) conduit à la formule

$$\operatorname{div} J_q = \Re(\overline{D\varphi} \cdot \psi \cdot q + \bar{\varphi} \cdot D\psi \cdot q)$$

d'où, compte tenu des équations aux variations (45.38) :

$$(45.53) \quad \text{div} [J_\sigma] = 0 \text{ quel que soit } q;$$

Cette formule de conservation peut se déduire, par les méthodes noethériennes, de l'invariance de la présence dans la substitution

$$(45.54) \quad \begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi e^{s\sigma}, \quad \varphi \rightarrow \varphi e^{-s\bar{\sigma}} \quad [s \in \mathbb{R}] \\ \gamma &\rightarrow \gamma \end{aligned}$$

Interprétation quadridimensionnelle des équations.

Plaçons-nous dans l'approximation de Jordan-Thiry ;

Soit $X \rightarrow \delta X$ le champ de vecteurs (41.15) ; Supposons qu'on ait trouvé un champ de bases orthonormales $[X \rightarrow T]$ tel que

$$(45.55) \quad \begin{cases} \delta_L T = 0 \\ T_5 = \xi \delta X. \end{cases}$$

Par la méthode (45.2), on en déduit un champ d'opérateurs de Dirac, $[X \rightarrow \gamma]$, que l'on est libre de choisir pour écrire les équations de Dirac (voir 45.45).

En choisissant une carte standard F de \tilde{U} (41.15), δ on a alors :

$$(45.56) \quad \begin{aligned} \gamma_j \cdot \gamma_k + \gamma_k \cdot \gamma_j &= 2g_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3, 4, 5) \\ \partial_5 \gamma_j &= 0 \\ \gamma_5 &= \xi \beta \quad (\beta = \text{Cte}, \bar{\beta} = \beta, \beta^2 = -1). \end{aligned}$$

Désignons par $\hat{\gamma}_j, \hat{\gamma}^j$ les valeurs de γ_j, γ^j dans les cartes transversales associées à F au point X (41.44) ; les égalités (45.55) conduisent immédiatement aux formules :

$$(45.57) \quad \begin{cases} \gamma_\mu = \hat{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_5 \mathcal{A}_\mu & \left\{ \begin{array}{l} \gamma^\mu = \hat{\gamma}^\mu \\ \gamma^5 = \hat{\gamma}^5 - \hat{\gamma}^\mu \mathcal{A}_\mu \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma}_5 = \xi \beta \\ \hat{\gamma}^5 = -\frac{\beta}{\xi} \end{array} \right. \\ \hat{\gamma}_\mu \cdot \beta + \beta \cdot \hat{\gamma}_\mu = 0 \\ \hat{\gamma}_\mu \cdot \hat{\gamma}_\nu + \hat{\gamma}_\nu \cdot \hat{\gamma}_\mu = 2 \hat{g}_{\mu\nu} \\ \hat{\gamma}^\mu = \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\gamma}_\nu \\ (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

qui montrent que l'opérateur $\hat{\gamma} [V + \hat{\gamma}_\mu V^\mu]$ est un opérateur de Dirac pour la variété quadridimensionnelle \hat{U} , muni de la structure riemannienne définie par \hat{g} ; le champ $[\hat{X} \rightarrow \hat{\gamma}]$ est évidemment différentiable.

Inversement, si on définit les spineurs de \hat{U} au moyen d'un champ différentiable $[\hat{X} \rightarrow \hat{\gamma}]$, il résulte du tableau (44.26) que l'espace des spineurs est quaternionique de dimension 2, et de la construction (44.34) qu'il existe un opérateur Q -linéaire β sur l'espace des spineurs, vérifiant $\hat{\gamma}_\mu \cdot \beta + \beta \cdot \hat{\gamma}_\mu = 0$, $\bar{\beta} = \beta$, $\beta^2 = -1$; β est défini au signe près par ces propriétés.

Prenons alors les formules (45.57) comme définition des γ_j ; δ les formules (45.56) s'en déduisent (grâce aux relations (41.43) entre les g_{jk} et les \hat{g}_{jk}) ; ce qui fournit une méthode pratique pour construire un opérateur γ pentadimensionnel vérifiant ces relations.

(45.58) — On constate donc, en résumé, que les spineurs de U et de \hat{U} sont les mêmes, et que les formules (45.56, 57) permettent de passer de l'interprétation à 5 dimensions à l'interprétation à 4 dimensions, dans le cadre de l'approximation de Jordan-Thiry.

— Étudions donc l'équation de Dirac à 5 dimensions (45.38) :

$$\mathcal{D}\psi + a\psi = 0$$

qui, grâce à (45.17) et (45.18), peut s'écrire :

$$(45.59) \quad \gamma^j \partial_j \psi + \left\{ \frac{1}{2u} \partial_j [u \gamma^j] - \frac{1}{8} \gamma^j [\partial_j \gamma_k - \partial_k \gamma_j] \gamma^k \right\} \psi + a \psi = 0$$

Grâce à la formule $u = \xi \hat{u}$ (42.5), et en faisant pour simplifier l'approximation de Kaluza-Klein $\xi = \text{Cte}$, il vient

$$(45.60) \quad \hat{\mathcal{D}}\psi - \hat{\gamma}^\mu \mathcal{A}_\mu \partial_5 \psi + a \psi - \frac{\beta}{\xi} \partial_5 \psi + \frac{\xi}{8} [\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu] \beta \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \psi = 0,$$

$\hat{\mathcal{D}}$ désignant l'opérateur \mathcal{D} sur \hat{U} .

Décomposons ψ en série de Fourier suivant x^5 (4) :

$$(45.61) \quad \psi = \sum_n \psi_n(x^\mu) e^{i n x^5}$$

Comme dans le cas du champ scalaire (42.9), on constate que chaque ψ_n vérifie séparément une équation quadridimensionnelle, qui s'écrit (en sous-entendant l'indice n et les \wedge , et en utilisant l'interprétation des \mathcal{A}_μ et de ξ trouvée en (41.65) et (42.15)) :

$$(45.62) \quad \gamma^\mu \left[\hat{\partial}_\mu - \frac{ne}{\hbar} i A_\mu \right] \psi + \left[a - \frac{ne}{\hbar} \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} i \beta \right] \psi + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \beta \psi = 0$$

Cas des particules neutres de masse nulle.

Dans le cas $n = 0$, $a = 0$, cette équation s'écrit :

$$(45.63) \quad \mathcal{D}\psi + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \beta \psi = 0$$

(4) i désigne ici un quaternion particulier (43.1).

— Cette équation est invariante dans le changement de variable

$$(45.64) \quad \psi \rightarrow \psi q$$

q étant un quaternion quelconque (transformation de jauge de Pauli).

— Elle est aussi invariante dans la transformation

$$(45.65) \quad \psi \rightarrow \beta \psi ; F_{\mu\nu} \rightarrow -F_{\mu\nu}$$

ceci résulte de l'identité

$$(45.66) \quad \mathcal{D}\beta\psi = -\beta\mathcal{D}\psi$$

qui se vérifie en écrivant

$$\mathcal{D}\psi = \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \left\{ \frac{1}{2u} \partial_\mu [u \gamma^\mu] - \frac{1}{8} \gamma^\mu [\partial_\mu \gamma_\nu - \partial_\nu \gamma_\mu] \gamma^\nu \right\} \psi$$

et en tenant compte de (45.57).

— En Mécanique Quantique, il est d'usage de choisir une unité de masse telle que $\hbar = 1$; dans ces conditions la constante

$\frac{1}{8} \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}}$ qui intervient dans l'équation (45.63) est de l'ordre de 10^{-33} cm, et peut le plus souvent être négligée. On réduit alors l'équation à

$$(45.67) \quad \mathcal{D}\psi = 0$$

c'est l'équation généralement admise pour décrire les *neutrinos* en relativité restreinte ou générale. Elle conserve évidemment l'invariance (45.64).

— Choisissons alors un quaternion q de carré -1 ; l'opérateur $q\beta$ a pour carré $+1$ et anticommute avec \mathcal{D} ; considérons ses projecteurs propres

$$(45.68) \quad P' = \frac{1}{2} [1 + q\beta] \quad P'' = \frac{1}{2} [1 - q\beta]$$

Planck

et introduisons les variables

$$(45.69) \quad \psi' = P'\psi, \quad \psi'' = P''\psi$$

on a évidemment

$$(45.70) \quad \psi = \psi' + \psi''; \quad q\beta\psi' = \psi'; \quad q\beta\psi'' = -\psi''$$

on dit parfois que ψ' et ψ'' sont des *demi-spineurs*, et on les distingue par leur *hélécité*, à savoir la valeur propre de $q\beta$ à laquelle ils correspondent dans ces formules.

— L'équation (49.67) est alors équivalente au système

$$(45.71) \quad \mathcal{D}\psi' = 0; \quad \mathcal{D}\psi'' = 0$$

on considère que ψ' et ψ'' sont les fonctions d'onde de deux particules distinctes, que l'on appelle *neutrinos à deux composantes*.

— Si l'on tient compte de l'équation (49.63) complète, le système équivalent s'écrit :

$$(45.72) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}\psi' - \frac{q}{8} \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi'' &= 0 \\ \mathcal{D}\psi'' + \frac{q}{8} \sqrt{\frac{\chi}{2\pi}} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi' &= 0 \end{aligned}$$

la théorie à 5 dimensions prévoit donc une sorte de couplage électromagnétique, très faible, entre les demi-neutrinos d'hélécité différente.

Cas des particules neutres de masse non nulle.

On pourrait obtenir les équations d'onde de telles particules en partant d'une équation de Dirac pentadimensionnelle modifiée

$$(45.73) \quad \boxed{\mathcal{D}\psi + ia\psi = 0}$$

nous ne les étudierons pas ici; notons que les particules de ce type (neutrons par exemple) sont soumises à des interactions fortes

Cas des particules chargées.

Supposons $n \neq 0$; l'équation (45.62) s'écrit, en négligeant le dernier terme (1) :

$$(45.74) \quad \gamma^\mu \left[\hat{\delta}_\mu - \frac{ne}{\hbar} iA_\mu \right] \psi + \left[a - \frac{ne}{\hbar} \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} i\beta \right] \psi = 0$$

En multipliant par P' et P'' (notations (45.69), en prenant $q = i$), on peut la remplacer par le système

$$(45.75) \quad \begin{aligned} \gamma^\mu \left[\hat{\delta}_\mu - \frac{ne}{\hbar} iA_\mu \right] \psi'' + \left[a - \frac{ne}{\hbar} \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} \right] \psi' &= 0 \\ \gamma^\mu \left[\hat{\delta}_\mu - \frac{ne}{\hbar} iA_\mu \right] \psi' + \left[a + \frac{ne}{\hbar} \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} \right] \psi'' &= 0 \end{aligned}$$

Ce système s'écrira aussi

$$(45.76) \quad \gamma^\mu \left[\hat{\delta}_\mu - \frac{ne}{\hbar} iA_\mu \right] \tilde{\psi} + \frac{im}{\hbar} \tilde{\psi} = 0$$

avec

$$(45.77) \quad \tilde{\psi} = \psi'' + i\lambda\psi'$$

si l'on peut trouver deux nombres m et λ tels que

$$(45.78) \quad \begin{aligned} m\lambda &= ne \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} - a\hbar \\ \frac{m}{\lambda} &= ne \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} + a\hbar \end{aligned}$$

(1) Ce terme est affecté d'un coefficient extrêmement petit ($\approx 10^{-28}$ cm). Cependant son interprétation soulève certaines difficultés qui méritent d'être éclaircies.

REVÊTEMENT À DEUX FEUILLETS

464

GÉOMÉTRIE ET RELATIVITÉ

ce qui est possible si

$$(45.79) \quad |a| < \left| \frac{ne}{\hbar} \sqrt{\frac{2\pi}{\chi}} \right|$$

(45.80) On reconnaît en (45.76) l'équation proposée par Dirac pour une particule de masse m , de charge ne , en présence du champ électromagnétique.

On voit que la relativité à 5 dimensions impose la *même charge élémentaire* aux particules de Dirac qu'aux particules scalaires, et conduit dans les deux cas à l'expression correcte des actions électromagnétiques.

(45.81) — On peut étudier facilement, comme application de la théorie, l'effet sur les équations précédentes des glissements de U , des transformations de jauge, des conjugaisons de charge, des changements de l'opérateur de Dirac γ , etc.

— En particulier, dans le cas de la Relativité Restreinte, on peut associer à toute solution $\psi = F(X)$ de l'équation de Dirac en l'absence de champ :

$$\mathcal{D}\psi + \frac{im}{\hbar} \psi = 0$$

une autre solution

$$\psi^* = A \cdot F(L(X))$$

A étant un élément du groupe de Clifford restreint, L un glissement de Lorentz, liés par la relation

$$\gamma(\delta X) = A \cdot \gamma(\delta L(x)) \cdot A^{-1} \quad (\text{cf. 44.39, 3}^\circ);$$

on obtient ainsi un groupe qui *conserve l'espace vectoriel des solutions de l'équation de Dirac*, et qui est un revêtement à deux feuillets du groupe des glissements de Lorentz.

C'est la considération de ce groupe qui permet d'attribuer le spin $1/2$ aux particules de Dirac.