CHAPITRE V

Structures différentielles

§ 24 Racines d'ordre 1

Nous considérons, dans tout ce paragraphe, une variété différentiable V, de dimension n.

— Le noyau à l'origine de la racine canonique D est l'ensemble des changeurs de cartes A vérifiant

$$A(0) = 0, \quad D(A)(0) = 1_R.$$

D'après la formule de Taylor, ceci est équivalent à

$$\lim_{X \to 0} \frac{|A(X) - X|}{|X|} = 0$$

par suite, ce noyau est égal à N_1 (définition (19.26)), les théorèmes (19.28), (14.10), (19.30) permettent d'énoncer :

(24.1) Soit Φ une racine de V.

— Pour que Φ soit une racine d'ordre 1, il faut et il suffit qu'elle soit *subordonnée* à D.

(24.1) — Il existe alors, si Φ est *canonique*, une représentation $\mathcal{R}$ telle que

$$\Phi(A)(X) = \mathcal{R}(D(A)(X))$$

pour tout changeur de carte A et tout $X \in \mathrm{def}(A)$.

— Nous avons longuement étudié la racine D (§§ 20 à 23) ; nous allons dans ce paragraphe étudier diverses racines d'ordre 1, ainsi que les champs correspondants.

Racines triviales.

Soit H un ensemble quelconque. On sait (définition (12.3)) que la racine triviale Φ, de fibre H, est définie sur V par

(24.2) $$\Phi(A)(X) = 1_H \text{ pour tout glissement A de V}$$

(24.3) ȯ On obtient un prolongement canonique de Φ, toujours trivial, en remplaçant dans cette formule V par $V \cup R^n$.

— Le noyau de Φ en un point M de V est le plus grand, à savoir l'ensemble des glissements qui conservent M ; le noyau à l'origine coïncide donc avec N_0 (définition (19.26)), si bien que les racines triviales sont d'ordre 0 ; de façon plus précise :

Soit Φ une racine de V. Les trois conditions suivantes sont équivalentes

ȯ (24.4)

(*a*) Φ est *isomorphe à une racine triviale ;*

(*b*) Φ est une racine d'ordre 0 ;

(*c*) Φ est une racine d'ordre 1, et la représentation $\mathcal{R}$ (24.1) est constante.

— Soit Φ la racine (24.2), f un Φ-champ. (On dit, par abus de langage, que f est un *champ trivial*). On sait (15.4) que l'image de f par un glissement A est donnée par

(24.5) $$A_\Phi(f) = f . A^{-1}$$

(24.6) On en déduit immédiatement d'importantes familles invariantes de champs triviaux :

— Les champs *continus* (si H est un espace topologique) ;

— Les champs p fois différentiables ($p = 1, 2, 3, \ldots \infty$), si V et H sont des variétés C^p ; on rappelle que si f est différentiable, on a $\delta_L[f(X)] = \delta[f(X)]$ pour tout glissement infinitésimal δX.

— L'ensemble des co-cartes de V est une famille *stable* de Φ-champs, avec $H = R^n$ (définition (15.9)). La famille invariante engendrée est constituée par les bornes supérieures de co-cartes, pas nécessairement régulières (th. (15.10)).

(24.7) — H étant donné, la racine Θ des germes de Φ-champs (définition (15.20)) n'est pas triviale dès que H a plus d'un point ; elle peut même avoir le plus petit noyau (par exemple pour H = R). Chaque famille invariante de Φ-champs permet de définir une sous-racine de Θ (th. 16.10)).

Remarque :

(24.8) — On a coutume d'appeler *champs scalaires* réels (resp. complexes) les champs triviaux dont la fibre est la droite réelle (resp. le plan complexe) ; on s'efforce de donner un autre nom aux champs à valeurs scalaires (réelles ou complexes) qui ne sont pas triviaux.

Z

Bases.

Désignons par Θ'' la racine des opérateurs de R^n à D_X (voir (16.21)) :

(24.9) $$\Theta''(A)(X)(S) = D(A)(X) . S$$

où A désigne un glissement de $R^n \cup V$, X un point de def (A), S un opérateur quelconque appliquant R^n dans D_X.

Les opérateurs $\Theta''(A)(X)$ sont visiblement linéaires ; Θ'' est donc une *racine à fibres vectorielles* [de dimension infinie] (12.16). Il est clair que Θ'' est subordonnée à D, donc d'ordre 1 et que Θ'' est canonique.

(24.10) — On obtient une sous-racine Θ' de Θ'' en se restreignant aux opérateurs S qui sont *linéaires ;* S est alors une ligne de n vecteurs (17.12) :

$$S = [S_1\, S_2 \ldots S_n] ;$$

en un point X de R^n, S est une matrice carrée d'ordre n (17.14). Les fibres de la racine Θ' sont des espaces vectoriels de dimension n^2.

(24.11) — On obtient une sous-racine Θ de Θ' en se restreignant aux lignes S qui sont *régulières ;* Θ_X est alors l'*ensemble des bases de l'espace vectoriel tangent à* V *en* X ; nous dirons que Θ est la *racine des bases de* V.

La fibre-type Θ_0 est le *groupe des matrices régulières d'ordre n.*

— Si l'on pose, pour toute matrice M (régulière d'ordre n) :

(24.12) $$\widehat{M}\begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ S.M^{-1} \end{pmatrix}$$

ð la correspondance $M \to \widehat{M}$ est une *représentation régulière du groupe linéaire* Θ_0, qui donne à V^Φ une structure d'*espace fibré principal* (voir le § 9).

— Chaque fibre Θ_X possède une *structure invariante de variété différentiable de dimension* n^2 (comme ouvert de l'espace vectoriel Θ'_X) ; la racine Θ est *continue*, et p fois différentiable si V est C^{p+1} $(p = 1, 2, 3 \ldots \infty)$.

— Le théorème (16.27) (appliqué à l'univers $R^n \cup V$, avec $\Phi = D$) fournit une sous-racine irréductible Ψ de Θ ; on a toujours

(24.13) $$\Psi(A)(X)(S) = D(A)(X).S$$

mais S désigne une *base naturelle*, c'est-à-dire une base S telle qu'il existe une carte F vérifiant

$$S = D(F)(x) \quad , \quad X = F(x)$$

Nous dirons que Ψ est la *racine des bases naturelles* de V.

Ψ est aussi une racine canonique, sa fibre-type Ψ_0 est le groupe des matrices M qui se mettent sous la forme

$$M = D(A)(X)$$

A étant un changeur de cartes de V.

(24.14) — On sait (16.27) que V^Ψ possède une structure d'*univers fibré principal*, dont le groupe principal est isomorphe à Ψ_0.

(24.15) — Pour que les racines Ψ et Θ coïncident, il faut et il suffit que toute matrice régulière soit de la forme D(A)(X), A étant un changeur de cartes de V (c'est le cas notamment si V est une *variété de classe* C^p, avec $p = 1, 2, 3, \ldots \infty$) ; il revient au même de dire que *toutes les bases de* V *sont naturelles*, ou encore que Θ est *irréductible.*

(24.16) — Parmi les *champs de bases* (Θ-champs), indiquons quelques familles invariantes :

— Les champs *continus* (20.37).

— Les champs p *fois différentiables* (si V est C^{p+1}) (20.36) ;

— Les Ψ-champs (champs de bases naturelles) (16.13), en particulier les Ψ-champs continus ou p fois différentiables.

— La famille invariante engendrée (15.10) par le champ φ :

$$\varphi(X) \equiv 1_{R^n} \quad \text{pour} \quad X \in R^n$$

— Soit φ un champ différentiable de bases (Θ-champ) ; φ est en particulier un Θ'-champ différentiable ; pour tout glissement infinitésimal δ, φ possède une *dérivée de Lie*, qui est un Θ'-champ (champ de lignes de vecteurs), et qui se calcule à l'aide de (23.23) :

$$[\delta_L S]_j = [\delta_L S].|_j = \delta_L[S.|_j],$$

soit

(24.17) $$\delta_L[S_1\, S_2 \dots S_n] = [\delta_L S_1\, \delta_L S_2 \dots \delta_L S_n]\,;$$

On sait calculer les dérivées de Lie des vecteurs S_j (23.31).

(24.18) — On sait donc aussi calculer les dérivées de Lie des champs de co-bases, inverses de bases (formule 23.27).

Théorème, définition :

Soit V une variété différentiable ; Φ une racine d'ordre 1 de $V \cup R^n$. Pour tout X de V, il existe un opérateur régulier H_X défini par

ô
(24.19) $$[H_X(Z)(S) = \zeta] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{Il existe une } \textit{carte} \text{ F telle que} \\ F(0) = X \\ D(F)(0) = S \\ \Phi(F)(0)(\zeta) = Z \end{bmatrix}$$

on dira que ζ *représente* Z *dans la base naturelle* S.

(24.20) ***Remarques :***

— ζ est un élément de la fibre-type Φ_0, Z un élément de la fibre de Φ au point X.

Z

— Il est clair que la phrase « ζ représente Z dans la base S » n'a pas de sens si S n'est pas une base naturelle, ou si la racine Φ n'est pas d'ordre 1.

— Supposons V disjointe de R^n, et Φ canonique (notations de (24.19)) ; posons

$$F_X = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in R^n \\ H_X & \text{si} \quad X \in V. \end{cases}$$

F_X est, pour tout X de $V \cup R^n$, un opérateur régulier défini sur Φ_X ; c'est donc un *isomorphisme* de Φ à une racine Ω, définie par

(24.21) $$\Omega(A)(X) = F_{A(X)}.\Phi(A)(X).F_X^{-1} \quad \text{(th. (13.5))}$$

Désignons par $\mathcal{R}$ la *représentation* définie (24.1) par :

(24.22) $$\Phi(A)(X) = \mathcal{R}(D(A)(X)) \quad \text{pour tout changeur de cartes A,}$$

et qui opère sur $E = \Phi_0$.

Le calcul montre que :

— La racine Ω définie par (24.21) a les propriétés suivantes :

♣ $$\Omega(F)(X)(\zeta)(S) = \mathcal{R}(S^{-1}.D(F)(X))(\zeta)$$

si F est une carte, $X \in \text{def}(F)$, $\zeta \in E$, et si S est une base naturelle au point F(X).

(24.23) — Ω est une *racine canonique* d'ordre 1 ; sa fibre-type est E ; sa fibre en un point X de V est l'*ensemble des opérateurs f, transformant les bases naturelles en éléments de* E, *et vérifiant :*

◇ $$f(S.M) = \mathcal{R}(M^{-1})(f(S))$$

si S et S.M sont des bases naturelles en X.

— Si A est un glissement de V, et si $X \in \text{def}(A)$

♡ $$\Omega(A)(X)(f) = f.[\Psi(A)(X)]^{-1}$$

Ψ étant la racine des bases naturelles de V (24.13).

— Si A est un changeur de cartes de V, et si $X \in \text{def}(A)$

♠ $$\Omega(A)(X) = \mathcal{R}(D(A)(X))$$

— Donnons-nous inversement une représentation $\mathcal{R}$ du groupe Ψ_0 (24.13), opérant sur un espace E ; ô la formule (24.22) définit une racine Φ de R^n ; celle-ci est prolongeable par une racine Φ' de $R^n \cup V$ (16.3), qui est évidemment canonique.

En lui appliquant les résultats précédents, on peut énoncer :

(24.24) Soit V une variété différentiable à n dimensions, disjointe de R^n ; $\mathfrak{R}$ une représentation du groupe Ψ_0 des matrices D(A)(X) (A changeur de carte quelconque de V) ; E l'espace de la représentation. Il existe alors une racine Ω vérifiant (24.23).

Pseudo-scalaires.

Soit M une matrice régulière d'ordre n ; posons, pour z réel

(24.25) $$\mathfrak{R}(M)(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad \det(M) > 0 \\ -z & \text{si} \quad \det(M) < 0 \end{cases}$$

Il est clair que $\mathfrak{R}$ est une représentation du groupe linéaire d'ordre n, opérant sur R.

(24.26) En appliquant (24.24) à cette représentation, on construit une racine Ω, canonique d'ordre 1, appelée *racine des pseudo-scalaires ;* on voit notamment que la fibre-type Ω_0 est égale à R ; pour tout changeur de carte A, on a :

(24.27) $$\Omega(A)(X)(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad \det(D(A)(X)) > 0 \\ -z & \text{si} \quad \det(D(A)(X)) < 0 \end{cases}$$

les fibres de Ω ont donc une structure invariante d'*espace vectoriel de dimension* 1.

Indices.

(24.28) (24.27) montre que l'on obtient une sous-racine de Ω en restreignant la fibre-type R à Z (ensemble des entiers positifs, négatifs et nuls) ; on l'appellera *racine des indices* de V ; ses fibres possèdent une structure invariante de *groupe abélien additif.*

Orientations.

(24.29) On obtient une sous-racine de Ω en restreignant sa fibre-type à l'ensemble des nombres $+1$, -1. Cette sous-racine s'appelle *racine des orientations.*

— Soit X un point de V ; un élément f de la fibre en X (on dira que f est « une orientation au point X ») est, selon (24.23) un opérateur sur les bases naturelles en X, prenant la valeur ± 1, et vérifiant

(24.30) $$f(S.M) = \begin{cases} f(S) & \text{si} \quad \det(M) > 0 \\ -f(S) & \text{si} \quad \det(M) < 0 \end{cases}$$

— Puisque la fibre-type se compose de ± 1, *il existe en chaque point* X *deux orientations opposées.*

— Un champ d'orientation est un champ pseudo-scalaire ; on sait donc définir les *champs continus d'orientations* (20.38).

Théorème, définition :

δ (24.31)

— Les propositions (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) sont équivalentes :

(*a*) Tout changeur de carte A de V vérifie $\det(D(A)(X)) > 0$ (¹) ;

(*b*) La racine des pseudo-scalaires de V est triviale ;

(*c*) La racine des orientations de V est triviale ;

(*d*) Il existe un champ d'orientation $X \to f$, défini sur V, tel que

$$f(S) = +1 \quad \text{pour toute base naturelle S.}$$

— Lorsque ces propositions sont vraies, on dit que V est une *variété orientée.*

Définition, théorème :

(24.32)

On dit qu'une variété V est *orientable* s'il existe un champ continu d'orientations défini *sur* V.

— Toute variété orientée est orientable.

— Si V est une variété orientable, le recueil des glissements de $V \cup R^n$ possède un sous-recueil qui donne à V une structure de variété orientée.

(¹) On rappelle que le déterminant det (D(A)(X)) s'appelle *jacobien* de A au point X.

En effet :

1) si V est orientée, $\diamond$ le champ défini en (24.31, *d*) est continu sur V.

2) Soit φ un champ continu d'orientations de V, qu'on prolonge en posant $\varphi(X) = 1$ pour $X \in R^n$ (on suppose V disjointe de R^n).

Les glissements de $R^n \cup V$ qui invarient φ forment un sous-recueil R′ (th. (15.12)) ; si V n'est pas déjà orientée, $\diamond$ R′ donne à V une structure de variété orientée.

C.Q.F.D.

— *Il existe des variétés non orientables ;* citons comme exemples classiques le *ruban de Möbius* (qui est plongé dans R^3), l'*espace projectif de dimension* 2 (qui est compact).

Densités :

$\diamond$ On obtient une représentation $\mathcal{R}$ du groupe linéaire d'ordre *n* en posant

(24.33)
$$\mathcal{R}(M)(z) = \frac{z}{|\det(M)|}$$

Nous appellerons *racine des densités* la racine qui s'en déduit par la construction (24.24) ; on constate que la fibre-type est R ; qu'une densité en un point X de V est un opérateur *f* sur les bases naturelles en X, à valeurs réelles, vérifiant :

(24.34)
$$f(S.M) = f(S)\,|\det(M)|\,;$$

que, pour tout changeur de cartes A, on a

(24.35) $\Omega(A)(X)(z) = \dfrac{z}{|\det(D(A)(X))|}$, Ω étant la racine des densités.

(24.36) — On en déduit immédiatement que les fibres de Ω possèdent une structure invariante d'*espace vectoriel ordonné de dimension* 1 ; en particulier, les *densités positives forment une sous-racine de* Ω.

— On sait définir les champs continus de densités ; les champs différentiables (si V est C^2) ; la dérivée de Lie d'un champ différentiable de densités, pour un glissement infinitésimal. Un calcul élémentaire, utilisant les formules (23.30), (21.23), (22.27) conduit à :

(24.37)
$$\delta_L z = \delta z + z\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial X}[\delta X]\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial X}[z\delta X]\right)$$

si $X \to z$ est un *champ de densités* dans un ouvert de R^n, et $X \to \delta X$ un glissement infinitésimal dans cet ouvert.

On en déduit la dérivée de Lie d'un champ de densité défini dans V, en utilisant (23.28 $\diamondsuit$) et la formule (cf. (24.23 $\clubsuit$)) :

(24.38)
$$\Omega(F)(X)(z)(S) = z\,|\det(D(F)(X)^{-1}.S)|$$

(F = carte ; $X \in \mathrm{def}\,(F)$; $z \in R$; S = base naturelle en $F(X)$).

Covecteurs.

Définition :

Soit V une variété différentiable de dimension *n*.

(24.39) Nous appellerons *racine des covecteurs* de V la racine D^* définie par : $[D^*]_X = [D_X]^*$, dual de l'espace vectoriel tangent D_X (si $X \in V \cup R^n$),

$D^*(A)(X)(C) = C.D(A)(X)^{-1}$ (si A est un glissement de $V \cup R^n$, $C \in D_X^*$).

— D^* est une sous-racine de la racine des opérateurs définis sur l'espace vectoriel tangent (16.22) ; la structure d'espace vectoriel de D_X^* est *invariante* (on sait que la dimension de D_X^* est *n*) ; les éléments de D_X^* s'appelleront *covecteurs tangents* à V en X.

— D^* est une *racine canonique ;* sa fibre-type $D_0^* = [R^n]^*$ est l'espace vectoriel des lignes de *n* nombres (17.12).

— D^* est une racine *continue* (resp. *p fois différentiable*, si V est C^{p+1}) ; les champs de covecteurs continus (resp. *p* fois différentiables) forment une famille invariante (th. (20.38), (20.35)).

— Soit X une variable qui parcourt $\mathrm{R}^n \cup \mathrm{V}$; $\mathrm{X} \to \mathrm{C}$ et $\mathrm{X} \to d\mathrm{X}$ un champ de covecteurs et un champ de vecteurs différentiables.

$\mathrm{X} \to \mathrm{C}(d\mathrm{X})$ est un *champ scalaire* différentiable ; on a donc pour tout glissement infinitésimal $\mathrm{X} \to \delta\mathrm{X}$:

$$\delta[\mathrm{C}(d\mathrm{X})] = \delta_{\mathrm{L}}[\mathrm{C}(d\mathrm{X})] \qquad (23.11)$$

$$= [\delta_{\mathrm{L}}\mathrm{C}](d\mathrm{X}) + \mathrm{C}(\delta_{\mathrm{L}}d\mathrm{X}) \qquad (23.23)$$

d'où, grâce à (23.31) :

$$[\delta_{\mathrm{L}}\mathrm{C}](d\mathrm{X}) = \delta[\mathrm{C}(d\mathrm{X})] - \mathrm{C}([\delta, d]_{\mathrm{L}}\mathrm{X}) \tag{24.40}$$

Si X *appartient à* R^n, on en déduit immédiatement la formule

$$\delta_{\mathrm{L}}\mathrm{C} = \delta\mathrm{C} + \mathrm{C}\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{X}}[\delta\mathrm{X}] \tag{24.41}$$

Affineurs. [1]

Définition :

(24.42) Nous appellerons *racine des affineurs* de la variété V la racine Φ définie par

Φ_{X} = espace vectoriel des applications linéaires de D_{X} dans D_{X} ;

$\Phi(\mathrm{A})(\mathrm{X})(\mathrm{M}) = \mathrm{D}(\mathrm{A})(\mathrm{X}).\mathrm{M}.\mathrm{D}(\mathrm{A})(\mathrm{X})^{-1}$ si A est un glissement de $\mathrm{V} \cup \mathrm{R}^n$.

ô La racine des affineurs est *canonique ;* sa fibre-type est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n ; les fibres possèdent une *structure invariante d'algèbre réelle* (de dimension n^2).

— Soit X un point de $\mathrm{V} \cup \mathrm{R}^n$, M et N des *affineurs* en X, U un vecteur, C un covecteur, s un scalaire. Les opérations

[1] Ce mot désigne ici un être qui n'a que des rapport lointains avec le groupe *affine* (19.4) ; nous l'employons faute de terminologie consacrée.

$$\begin{pmatrix}\mathrm{M}\\\mathrm{N}\end{pmatrix} \to \mathrm{M}.\mathrm{N}\,;\ \mathrm{M} \to \mathrm{M}^{-1}\,;\ \begin{pmatrix}\mathrm{M}\\\mathrm{U}\end{pmatrix} \to \mathrm{M}.\mathrm{U}\,;\ \begin{pmatrix}\mathrm{C}\\\mathrm{M}\end{pmatrix} \to \mathrm{C}.\mathrm{M}\,;\ \begin{pmatrix}\mathrm{C}\\\mathrm{M}\\\mathrm{U}\end{pmatrix} \to \mathrm{C}.\mathrm{M}.\mathrm{U} \tag{24.43}$$

$$s \to s.1_{\mathrm{D}_{\mathrm{X}}}\,;\ \mathrm{M} \to \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,;\ \mathrm{M} \to \det\,(\mathrm{M})\,;\ \mathrm{M} \to \mathrm{rang}\,(\mathrm{M})\,;\ \mathrm{M} \to \mathrm{spectre}\,(\mathrm{M})$$

sont des *homomorphismes de racines*, que le lecteur précisera aisément.

— Il en résulte que les affineurs dont la trace (resp. le déterminant, le rang, le spectre, une valeur propre) est donnée forment des *sous-racines ;* ô la racine des affineurs est isomorphe au produit direct de la *racine scalaire triviale* par la racine des *affineurs de trace nulle*, l'isomorphisme F_{X} étant donné par

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}}\begin{pmatrix}s\\\mathrm{N}\end{pmatrix} = s1_{\mathrm{D}_{\mathrm{X}}} + \mathrm{N} \quad [\mathrm{Tr}\,(\mathrm{N}) = 0]$$

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{M}) = \begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}{n}\\[2ex] \mathrm{M} - \dfrac{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})}{n}\,1_{\mathrm{D}_{\mathrm{X}}}\end{bmatrix} \tag{24.44}$$

— Le calcul de la dérivée de Lie d'un affineur s'effectue comme celui d'un covecteur (24.40) ; on trouve :

$$[\delta_{\mathrm{L}}\mathrm{M}]\,(d\mathrm{X}) = \delta_{\mathrm{L}}[\mathrm{M}\,(d\mathrm{X})] - \mathrm{M}\,(\delta_{\mathrm{L}}d\mathrm{X}) \tag{24.45}$$

d'où, si $\mathrm{X} \in \mathrm{R}^n$ (M est alors une *matrice de nombres*) :

$$\delta_{\mathrm{L}}\mathrm{M} = \delta\mathrm{M} + \mathrm{M}.\,\frac{\partial}{\partial\mathrm{X}}[\delta\mathrm{X}] - \frac{\partial}{\partial\mathrm{X}}[\delta\mathrm{X}].\mathrm{M} \tag{24.46}$$

Notons les formules :

$$\mathrm{Tr}\,(\delta_{\mathrm{L}}\mathrm{M}) = \delta[\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})] \tag{24.47}$$

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{-1}.\delta_{\mathrm{L}}\mathrm{M}) = \frac{\delta\,[\det\,(\mathrm{M})]}{\det\,(\mathrm{M})} \tag{24.48}$$

$$\delta_{\mathrm{L}}\,[\mathrm{M}^{-1}] = -\mathrm{M}^{-1}.\delta_{\mathrm{L}}\mathrm{M}.\mathrm{M}^{-1} \tag{24.49}$$

cas particulier de (23.25, 26, 27).

§ 25 Tenseurs

Tenseurs covariants.

Définition :

(25.1) Soit E un espace vectoriel de dimension n.

— Nous appellerons *opérateur covariant d'ordre* p (de E) tout opérateur T, transformant en nombres les lignes

$$U \equiv [U_1\, U_2 \ldots U_p] \quad (U_j \in E)$$

— Nous dirons que T est un *tenseur* (covariant d'ordre p) si l'opérateur T^* :

$$T^*(U_1)(U_2) \ldots (U_p) \equiv T(U)$$

est p fois linéaire.

— Les tenseurs covariants d'ordre 1 sont donc les *covecteurs ;* on peut convenir que les tenseurs d'ordre 0 sont les nombres.

— Pratiquement, nous supprimerons l'astérisque, posant donc

(25.2) $$T(U) = T(U_1)(U_2) \ldots (U_p)$$

sans risque de confusion.

— Rappelons les principales propriétés algébriques des tenseurs ([1]).

(25.3) — On appelle *composantes d'un tenseur covariant* T *dans une base* S les nombres

$$T_{jk\ldots m} = T(S_j)(S_k) \ldots (S_m)$$

on a alors :

(25.4) $$T(U_1)(U_2) \ldots (U_p) \equiv T_{jk\ldots m} \times {}^jS^{-1}.U_1 \times {}^kS^{-1}.U_2 \times \ldots \times {}^mS^{-1}.U_p$$

([1]) Voir Souriau [réf. p. 117].

(Nous employons, sauf mention du contraire, la convention d'Einstein, qui sous-entend le signe $\sum$ pour les indices répétés en position supérieure et inférieure).

(25.5) Ces formules réciproques permettent de résoudre le problème du changement de base pour les tenseurs ; grâce à elles, on voit aussi que, si l'on se donne une base S et des nombres $T_{jk\ldots m}$, il existe un seul tenseur T admettant ces composantes dans S ; il est *défini* par (25.4). Les tenseurs d'ordre p forment donc un *espace vectoriel de dimension* n^p.

Définition, théorème :

(25.6) Soient T et T′ deux tenseurs covariants d'ordres p et p' ; l'opérateur $T \otimes T'$, défini par

$$[T \otimes T'](U_1) \ldots (U_p)(U_{p+1}) \ldots (U_{p+p'}) \equiv T(U_1) \ldots (U_p) \times T'(U_{p+1}) \ldots (U_{p+p'})$$

est un *tenseur* covariant d'ordre $p + p'$, qu'on appelle *produit tensoriel* de T par T′.

— $T \otimes T'$ dépend linéairement de T et de T′ ; l'opération $\otimes$ est *associative.*

Il résulte de (25.3) que l'on a, dans une base S :

(25.7) $$[T \otimes T']_{j\ldots k\, l\ldots m} = T_{j\ldots k} \times T'_{l\ldots m} ;$$

la formule (25.4) pourra s'écrire :

(25.8) $$T = T_{jk\ldots m}\, {}^jS^{-1} \otimes {}^kS^{-1} \otimes \ldots \otimes {}^mS^{-1}.$$

Définition :

(25.9) Soit F une permutation des entiers 1, 2, ... p ; nous appellerons *matrice de la permutation* F la matrice carrée d'ordre p

$$M_F = |_{F(j)}.{}^j| \quad \text{(convention d'Einstein)}$$

♁ on a :

(25.10) $$\mathrm{M}_{\mathrm{F}.\mathrm{F}'} = \mathrm{M}_{\mathrm{F}}.\mathrm{M}_{\mathrm{F}'} \quad ; \quad \mathrm{M}_{\mathrm{F}^-} = [\mathrm{M}_{\mathrm{F}}]^{-1} = |_{j}.^{\mathrm{F}(j)}|$$

ce qui montre que la correspondance $\mathrm{F} \to \mathrm{M}_{\mathrm{F}}$ est une *représentation linéaire* du groupe des permutations de $(1, 2, \ldots p)$ (appelé, on le rappelle, *groupe symétrique* d'ordre p).

— F étant toujours la permutation (25.9), nous poserons

(25.11) $$\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{T})(\mathrm{U}) = \mathrm{T}(\mathrm{U}.\mathrm{M}_{\mathrm{F}})$$

pour tout tenseur T d'ordre p et tout U dans def (T), ce qui s'écrit aussi :

(25.12) $$\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{T})(\mathrm{U}_1)(\mathrm{U}_2) \ldots (\mathrm{U}_p) = \mathrm{T}(\mathrm{U}_{\mathrm{F}(1)})(\mathrm{U}_{\mathrm{F}(2)}) \ldots (\mathrm{U}_{\mathrm{F}(p)})$$

(25.13) — Il est clair que $\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{T})$ est un *tenseur ;* que $\hat{\mathrm{F}}$ est *linéaire*, et que $\widehat{\mathrm{F}.\mathrm{F}'} = \hat{\mathrm{F}}.\hat{\mathrm{F}}'$; la correspondance $\mathrm{F} \to \hat{\mathrm{F}}$ est donc aussi une *représentation linéaire* du groupe symétrique, opérant sur les tenseurs covariants.

(25.14) — Si T est un tenseur covariant d'ordre p, M une matrice carrée d'ordre p, l'opérateur covariant Θ :

$$\Theta(\mathrm{U}) = \mathrm{T}(\mathrm{U}.\mathrm{M})$$

Z

n'est pas nécessairement un tenseur (bien que ce soit vrai si M est une matrice de permutation).

Définition :

(25.15) — On dit qu'un tenseur T possède une *symétrie* s'il existe une permutation F et un nombre s tel que

$$\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{T}) = s\mathrm{T}$$

T est alors *vecteur propre* de l'opérateur $\hat{\mathrm{F}}$ (s'il n'est pas nul).

Exemple :

Un tenseur T est dit *symétrique par rapport à ses deux premiers indices* si ses composantes dans une base S vérifient

(25.16) $$\mathrm{T}_{jkl\ldots m} = \mathrm{T}_{kjl\ldots m}$$

♁ cette propriété prend la forme (25.15), si F désigne la permutation $(1, 2, 3, \ldots p) \to (2, 1, 3, \ldots p)$, et si $s = 1$; la propriété (25.16) est donc *indépendante du choix de la base* S.

— De même un tenseur T sera dit *antisymétrique par rapport à ses indices* 1 *et* 3 (pour fixer les idées) si

(25.17) $$\mathrm{T}_{jkl\ldots m} = -\mathrm{T}_{lkj\ldots m}$$

on fait les mêmes remarques : cette propriété prend la forme (25.15), avec $s = -1$, si F désigne la permutation qui échange les numéros 1 et 3 ; (25.17) est donc vraie dans toutes les bases.

— Considérons un tenseur *non nul* T, et étudions *l'ensemble des symétries* que possède T. Il est défini par une partie $\mathcal{G}$ du groupe symétrique et une application χ de $\mathcal{G}$ dans R (ou dans C, si T est complexe) tels que

(25.18) $$[\mathrm{F} \in \mathcal{G}] \Rightarrow [\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{T}) = \chi(\mathrm{F}) \times \mathrm{T}]$$

— Si F et $\mathrm{F}' \in \mathcal{G}$, on a $\widehat{\mathrm{F}.\mathrm{F}'}(\mathrm{T}) = \hat{\mathrm{F}}.\hat{\mathrm{F}}'(\mathrm{T})$ (25.13)

$$= \hat{\mathrm{F}}(\chi(\mathrm{F}')\mathrm{T}) = \chi(\mathrm{F})\chi(\mathrm{F}')\mathrm{T} ;$$

par suite $\mathrm{F}.\mathrm{F}' \in \mathcal{G}$, $\chi(\mathrm{F}.\mathrm{F}') = \chi(\mathrm{F}).\chi(\mathrm{F}')$.

— Dans un groupe fini, tout élément F est d'*ordre fini* N, ce qui signifie que $\mathrm{F}^{\mathrm{N}} = 1$; on a donc $[\chi(\mathrm{F})]^{\mathrm{N}} = 1$, $\chi(\mathrm{F})$ est une *racine de l'unité ;* on a aussi $\mathrm{F}^{-1} = \mathrm{F}^{\mathrm{N}-1} \in \mathcal{G}$ et $\chi(\mathrm{F}^{-1}) = [\chi(\mathrm{F})]^{-1}$, ce qui montre que

(25.19) $\mathcal{G}$ est un *sous-groupe* du groupe symétrique et χ un *caractère* de $\mathcal{G}$ [1].

[1] On appelle *caractère* d'un groupe $\mathcal{G}$ toute représentation de $\mathcal{G}$ dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

(25.20) Application : il est impossible qu'un tenseur non nul T, d'ordre 3, vérifie simultanément

$$T_{jkl} \equiv T_{kjl} \quad , \quad T_{jkl} \equiv -T_{jlk}$$

car $\mathcal{G}$ contiendrait $F : (1, 2, 3) \to (2, 1, 3)$ et $F' : (1, 2, 3) \to 1, 3, 2)$, avec $\chi(F) = 1$, $\chi(F') = -1$; ce qui est incompatible, si χ est un caractère, avec l'égalité évidente $[F.F']^3 = 1$.

(25.21) — Soit inversement χ un caractère d'un sous-groupe du groupe symétrique d'ordre p ; cherchons tous les tenseurs T qui *possèdent la symétrie* χ, c'est-à-dire qui vérifient (25.18), avec $\mathcal{G} = \operatorname{def}(\chi)$.

A cet effet, posons

(25.22)
$$P_\chi = \frac{1}{\nu} \sum_{F \in \mathcal{G}} \chi(F^{-1}) \widehat{F}$$

ν étant *l'ordre* du groupe $\mathcal{G}$, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

On vérifie immédiatement (en faisant une translation à gauche ou à droite sur l'indice de sommation F) que :

(25.23)
$$[F \in \mathcal{G}] \Rightarrow P_\chi . \widehat{F} = \widehat{F} . P_\chi = \chi(F) P_\chi$$

Par conséquent, pour tout tenseur T, on a

$\widehat{F}(P_\chi(T)) = \chi(F)[P_\chi(T)]$, le tenseur $P_\chi(T)$ *possède la symétrie* χ ; par ailleurs, si T possède la symétrie χ, on a

$$P_\chi(T) = \frac{1}{\nu} \sum_{F \in \mathcal{G}} \chi(F^{-1}) \widehat{F}(T) = \frac{1}{\nu} \sum_{F \in \mathcal{G}} \chi(F^{-1}) \chi(F) T = T$$

(par définition de ν) ; puisque P_χ est linéaire, on voit que :

(25.24) P_χ est un *projecteur*, dont l'ensemble de valeurs est l'espace vectoriel des tenseurs possédant la symétrie χ.

— On sait que *la trace d'un projecteur est égale à son rang*, c'est-à-dire à la dimension de son ensemble de valeurs (voir Souriau [réf. p. 117]) ; connaissant la base des tenseurs définie par (25.3) et (25.8), il vient

$$\mathrm{Tr}(P_\chi) = \sum_{jk\ldots m} P_\chi({}^jS^{-1} \otimes {}^kS^{-1} \otimes \ldots \otimes {}^mS^{-1})(S_j)(S_k) \ldots (S_m)$$
$$= \frac{1}{\nu} \sum_{jk\ldots mF} \chi(F^{-1}) \widehat{F}({}^jS^{-1} \otimes \ldots \otimes {}^mS^{-1})(S_j) \ldots (S_m) ;$$

tous calculs faits, on voit que

La dimension de l'espace vectoriel des tenseurs possédant la symétrie χ est égale à

(25.25) ◇
$$\frac{1}{\nu} \sum_{F \in \mathcal{G}} \chi(F^{-1}) n^{C(F)}$$

ν étant l'ordre du groupe $\mathcal{G} = \operatorname{def}(\chi)$ et C(F) le nombre de classes de transitivité de l'ensemble $(1, 2, \ldots, p)$ suivant le groupe $(1, F, F^2, F^3, \ldots)$ [voir (1.9)].

χ étant donné, l'expression ◇ est un *polynôme* en n (dimension de l'espace) ; son terme de plus haut degré s'obtient en prenant $F = 1$ (puisqu'alors $C(F) = p$) ; ce terme vaut donc $\dfrac{n^p}{\nu}$; ce qui montre que :

(25.26) Si χ est un caractère d'un sous-groupe du groupe symétrique d'ordre p, et si n est assez grand, il existe dans tout espace vectoriel de dimension n, des tenseurs non nuls possédant la symétrie χ.

— Si χ et χ' sont deux caractères différents d'un même groupe $\mathcal{G}$, on vérifie (à l'aide de (25.23)) que

(25.27)
$$P_\chi . P_{\chi'} = P_{\chi'} . P_\chi = 0$$

on en déduit que la somme $P = \sum_\chi P_\chi$, étendue à tous les caractères χ de $\mathcal{G}$, est un projecteur ; on montre que $P = 1$ si $\mathcal{G}$ est un groupe abélien, et si la somme est étendue aux caractères complexes [1].

— Étudions le cas où $\mathcal{G}$ est le groupe symétrique tout entier (le théorème précédent ne s'applique pas si $p \geqslant 3$, puisque $\mathcal{G}$ n'est pas abélien). On montre que $\mathcal{G}$ ne possède que *deux* caractères, à savoir

(25.28)
$$\chi_+(\mathrm{F}) = 1$$
$$\chi_-(\mathrm{F}) = \textit{parité de } \mathrm{F} = \det(\mathrm{M}_{\mathrm{F}}) = [-1]^{p+\mathrm{C(F)}}$$

Un tenseur T est dit *symétrique* ou *antisymétrique* selon qu'il possède la symétrie χ_+ ou la symétrie χ_- :

(25.29) $$[\mathrm{T} \text{ symétrique}] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}\mathrm{T}_{jk\ldots m} = \mathrm{T}_{j'k'\ldots m'} \text{ si les } j, k, \ldots m \text{ sont les} \\ j', k', \ldots m' \text{ à l'ordre près}\end{matrix}\right]$$

L'antisymétrie se reconnaît aussi sur les composantes ; indiquons-le pour le cas $p = 2$ et $p = 3$:

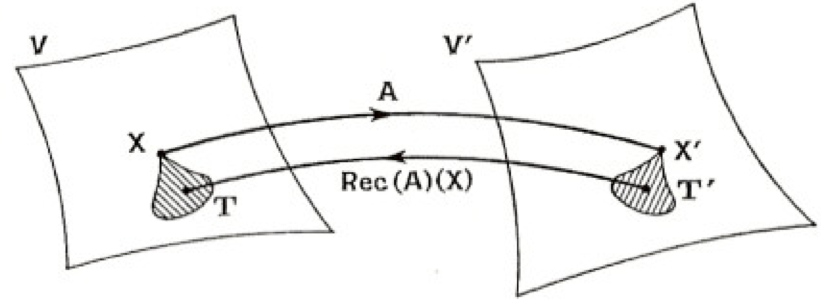
(25.30) $$\boxed{[\mathrm{T} \text{ antisymétrique}] \Leftrightarrow [\mathrm{T}_{jk} = -\mathrm{T}_{kj}]}$$

(25.31) $$\boxed{\begin{aligned}&[\mathrm{T} \text{ antisymétrique}] \Leftrightarrow [\mathrm{T}_{jkl} = -\mathrm{T}_{kjl} = -\mathrm{T}_{lkj}] \\ &\Leftrightarrow [\mathrm{T}_{jkl} = \mathrm{T}_{klj} = \mathrm{T}_{ljk} = -\mathrm{T}_{lkj} = -\mathrm{T}_{jlk} = -\mathrm{T}_{kjl}]\end{aligned}}$$

Nous étudierons à nouveau les tenseurs antisymétriques, ou *p-formes*, au paragraphe 26.

(25.32) Les opérateurs $\mathrm{P}_{\chi+}$ ou $\mathrm{P}_{\chi-}$ s'appellent respectivement projecteur de *symétrisation* et d'*antisymétrisation ;* leur somme ne vaut 1 que si $p \leqslant 2$; tout tenseur d'ordre 2 est d'une seule façon, la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

[1] Ce résultat est évident si $\mathcal{G}$ est engendré par une seule permutation F, en construisant les éléments spectraux de $\widehat{\mathrm{F}}$; le cas général peut s'obtenir en utilisant la structure des groupes abéliens finis.



Considérons deux variétés différentiables V et V′ ; une application différentiable A d'un ouvert de V dans V′ ; un point X de def (A) ; un opérateur covariant T′ de l'espace vectoriel tangent à V′ au point X′ = A(X).

(25.33) Nous appellerons *image réciproque* par A, au point X, de l'opérateur T′ l'opérateur Rec (A)(X)(T′) défini par

◇ $$\mathrm{Rec}\,(\mathrm{A})(\mathrm{X})(\mathrm{T}')(\mathrm{U}) = \mathrm{T}'(\mathrm{D}(\mathrm{A})(\mathrm{X}).\mathrm{U})$$

pour toute ligne U de vecteurs tangents à V en X ;

δ T = Rec (A)(X)(T′) est un *opérateur covariant* de l'espace vectoriel tangent à V en X, de même ordre p que T′, tel que

♣ $$\mathrm{T}(d_1\mathrm{X}) \ldots (d_p\mathrm{X}) = \mathrm{T}'(d_1\mathrm{X}') \ldots (d_p\mathrm{X}')$$

quelles que soient les dérivations $d_1, d_2, \ldots d_p$.

On voit immédiatement que :

(25.34) $$\mathrm{Rec}\,(\mathrm{A}.\mathrm{B})(\mathrm{X}) = \mathrm{Rec}\,(\mathrm{B})(\mathrm{X}).\mathrm{Rec}\,(\mathrm{A})(\mathrm{B}(\mathrm{X}))\ [1]$$
si A et B sont différentiables et si X ∈ def (A.B)

(1) Attention à l'ordre inhabituel des facteurs !

et que :

(25.35)

(*a*) L'opérateur Rec (A)(X) commute avec $\widehat{F}$ (pour toute permutation F de $1, 2, \ldots p$) ;

(*b*) Si T′ est un *tenseur covariant*, Rec (A)(X)(T′) est aussi un *tenseur covariant* (de même ordre) ;

(*c*) Si T′ possède une symétrie χ, Rec (A)(X)(T′) possède la même symétrie.

Considérons maintenant le cas où l'application A (fig. p. 203) est *régulière*, et où A^{-1} est différentiable (ce qui exige que V et V′ aient même dimension).

On peut alors poser

(25.36) $$\mathrm{Im}\,(A)(X) = \mathrm{Rec}\,(A^{-1})(A(X)) = [\mathrm{Rec}\,(A)(X)]^{-1}$$

et on a :

(25.37) $$\mathrm{Im}\,(A.B)(X) = \mathrm{Im}\,(A)(B(X)).\mathrm{Im}\,(B)(X)$$

En particulier, dans le cas où A et B sont des *glissements* de V (qui a été supposée C^1), ces formules (25.36) et (25.37) montrent que Im est une *racine* de V, racine dont la fibre en un point X est l'ensemble des opérateurs covariants en X [1].

Du théorème (25.35), il résulte immédiatement que :

(25.38)

(*a*) pour toute permutation F de $(1, 2, \ldots p)$, l'opérateur $\widehat{F}$ définit un *isomorphisme* de la racine Im des opérateurs covariants d'ordre p *avec elle-même* (définition (13.5)) ;

(*b*) Les *tenseurs* d'ordre p définissent une *sous-racine* de Im ;

(*c*) Les tenseurs d'ordre p *possédant une symétrie* χ forment une *sous-racine* de la précédente.

(1) Abus de langage ; on devrait dire « opérateurs covariants sur l'espace vectoriel tangent à V en X ». Cette racine est d'ailleurs un cas particulier de la racine des opérateurs multiples, définie en (16.25).

(25.39) δ La racine Im, ainsi que les sous-racines définies en (25.38, *b*, *c*) possèdent une *structure vectorielle invariante*.

(25.40) δ Le *produit tensoriel* définit un *homomorphisme* de racines.

(25.41) — La racine des *tenseurs covariants d'ordre* 1 coïncide évidemment avec la racine D* des *covecteurs*, déjà étudiée en (24.39).

— La *dérivée de Lie* d'un tenseur covariant d'ordre p, T, est donnée par la formule (voir (23.24)) :

(25.42) $$\begin{aligned}[\delta_L T](d_1X)\ldots(d_pX) = {} & \delta[T(d_1X)\ldots(d_pX)] \\ & - T(\delta_L d_1X)(d_2X)\ldots(d_pX) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - T(d_1X)\ldots(d_{p-1}X)(\delta_L d_pX)\end{aligned}$$

on en déduit, si $X \in R^n$:

(25.43) $$\begin{aligned}[\delta_L T](d_1X)\ldots(d_pX) = {} & [\delta T](d_1X)\ldots(d_pX) \\ & + T(M.d_1X)(d_2X)\ldots(d_pX) \\ & + \ldots \\ & + T(d_1X)\ldots(d_{p-1}X)(M.d_pX)\end{aligned}$$
$$\text{avec } M = \frac{\partial}{\partial X}[\delta X]$$

formule qui permet par exemple de calculer les composantes du tenseur $\delta_L T$ [1].

— Du fait que l'opérateur Y $(Y(T)(T') = T \otimes T')$ est un homomorphisme bilinéaire (voir (25.40) et (25.6)), il résulte, grâce aux formules (23.17) et (23.24), que

(25.44) $$\delta_L[T \otimes T'] = [\delta_L T] \otimes T' + T \otimes [\delta_L T']$$

ce qui peut aussi se vérifier directement à l'aide de (25.42).

(1) Voir (25.106).

De même, si $\widehat{F}$ désigne l'isomorphisme linéaire associé à une permutation F (th. (25.38)), on a :

(25.45) $$\delta_L[\widehat{F}(T)] = \widehat{F}(\delta_L T) ;$$

Par suite, si P_χ est le projecteur symétrisant associé à un caractère χ (définition (25.22)), on a :

(25.46) $$\delta_L[P_\chi(T)] = P_\chi(\delta_L T)$$

— Considérons un *champ f d'opérateurs covariants,* défini sur un ouvert de V′ (fig. p. 203) ; on peut poser

(25.47) $$A_{\text{Rec}}(f)(X) = \text{Rec}\,(A)(X)(f(A(X))$$

$A_{\text{Rec}}(f)$ est un champ de V, appelé *image réciproque de f par* A ; on a évidemment, grâce à (25.34),

(25.48) $$[A.B]_{\text{Rec}} = B_{\text{Rec}}.A_{\text{Rec}} ;$$

Dans le cas où A est un glissement, $A_{\text{Rec}}(f)$ est d'ailleurs l'image du champ f par le glissement A^{-1}, que nous avons déjà appelée image réciproque de f par A (21.2).

— Considérons le cas où V est une variété *plongée* dans V′ (20.13). L'image réciproque f^* d'un champ covariant f de V par le *plongement* 1_V est un champ de V ; il résulte de (25.47), (25.33) et (20.13) que

$$f^*(X)(U) = f(X)(U)$$

(25.49) ou $$f^*(X)(U_1) \dots (U_p) = f(X)(U_1) \dots (U_p)$$

si $U_1, \dots U_p$ sont *tangents à* V *en* X ;

Z si la dimension de V est inférieure à celle de V′, il ne faut pas confondre f avec la *restriction* φ de f à V ; $\varphi(X)(U_1) \dots (U_p)$ est défini *même si les* U_j *ne sont pas tangents à* V.

Tenseurs contravariants.

Nous nous contentons ici de donner des résultats et des formules ; les raisonnements peuvent se rétablir aisément par analogie avec le cas des tenseurs covariants.

Définition :

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

— Nous appellerons *opérateur contravariant d'ordre p* (de E) tout opérateur T, transformant en nombres les colonnes de covecteurs :

(25.50) $$C = \begin{bmatrix} {}^1C \\ {}^2C \\ \dots \\ {}^pC \end{bmatrix} \qquad {}^jC \in E^*$$

— Nous dirons que T est un *tenseur* (contravariant d'ordre p) si l'opérateur T*

$$T^*({}^1C)({}^2C) \dots ({}^pC) = T(C)$$

est p fois linéaire.

— Pratiquement, nous supprimerons l'astérisque, posant donc

(25.51) $$T(C) = T({}^1C)({}^2C) \dots ({}^pC)$$

sans risque de confusion.

Exemple :

Les tenseurs *contravariants d'ordre* 1 sont les opérateurs linéaires sur les covecteurs ; ils constituent donc le *bi-dual* E** de E ; on sait qu'il existe une application linéaire régulière de E sur E**, faisant correspondre à tout vecteur V de E le tenseur $\widetilde{V}$ défini par

(25.52) $$\widetilde{V}(C) = C.V \qquad \text{pour tout covecteur C.}$$

(25.53) — Pratiquement, nous pourrons *identifier* le vecteur V avec le tenseur contravariant $\widetilde{V}$; on dit parfois que V est un « vecteur contravariant », pour le distinguer des covecteurs, ou « vecteurs covariants ».

(25.54) — On appelle *composantes* d'un tenseur contravariant T dans une base S les nombres

$$T^{jk\dots m} = T({}^{j}S^{-1})({}^{k}S^{-1})\dots({}^{m}S^{-1})$$

(on rappelle que S^{-1} est une colonne de n covecteurs ; voir (17.17)).

On a alors :

(25.55)
$$T({}^{1}C)({}^{2}C)\dots({}^{p}C) = T^{jk\dots m} \times {}^{1}C.S_j \times {}^{2}C.S_k \times \dots \times {}^{p}C.S_m$$
(convention d'Einstein).

Définition, théorème :

(25.56) Soient T et T′ deux tenseurs contravariants d'ordres p et p' ; l'opérateur $T \otimes T'$, défini par

$$[T \otimes T']({}^{1}C)\dots({}^{p}C)({}^{p+1}C)\dots({}^{p+p'}C) = T({}^{1}C)\dots({}^{p}C) \times T'({}^{p+1}C)\dots({}^{p+p'}C)$$

est un *tenseur* contravariant d'ordre $p + p'$, qu'on appelle *produit tensoriel de* T par T′.

— $T \otimes T'$ dépend linéairement de T et T′ ; l'opération $\otimes$ est *associative.*

En choisissant une base S de E, on trouve :

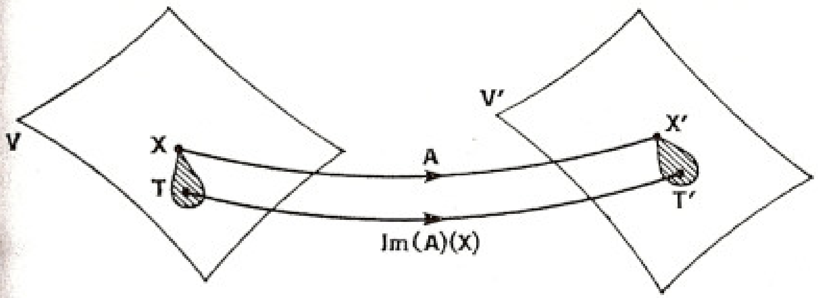
(25.57)
$$[T \otimes T']^{j\dots k\, l\dots m} = T^{j\dots k} \times T'^{\,l\dots m};$$

remarquons que l'on peut aussi écrire (24.104) sous la forme

(25.58)
$$T = T^{jk\dots m}\, S_j \otimes S_k \otimes \dots \otimes S_m$$

grâce à l'identification des vecteurs S_j avec des tenseurs contravariants (25.53).

— On peut étudier les symétries des tenseurs contravariants en les considérant comme tenseurs covariants sur le dual E* de E, et on arrive donc aux mêmes résultats et à des notations analogues.



(25.59) — Considérons deux variétés différentiables V et V′ ; une application différentiable A d'un ouvert de V dans V′ ; un point X de def (A) ; un opérateur contravariant d'ordre p de l'espace vectoriel tangent à V en X, T.

Nous appellerons *image de* T *par* A l'opérateur T′ = Im (A)(X)(T) défini par

(25.60)
$$\mathrm{Im}\,(A)(X)(T)(C) = T(C.D(A)(X))$$

pour toute colonne C formée, de p covecteurs tangents à V′ en A(X).

(25.61) — Alors Im (A)(X)(T) est un opérateur contravariant d'ordre p sur l'espace vectoriel tangent à V′ en A(X) ; on a

$$\mathrm{Im}\,(1_\Omega)(X)(T) = T \quad \text{si X appartient à l'ouvert } \Omega;$$
$$\mathrm{Im}\,(A.B)(X) = \mathrm{Im}\,(A)(B(X)).\mathrm{Im}\,(B)(X) \quad \text{si} \quad X \in \mathrm{def}\,(A.B)$$

— En restreignant Im aux glissements d'une variété V, Im devient une *racine* de V, dont la fibre en un point X est l'ensemble des opérateurs contravariants d'ordre p en X (1).

(1) Abus de langage signifiant « opérateurs contravariants d'ordre p sur l'espace vectoriel tangent à V en X ».

(25.62) — Il importe de remarquer, en comparant avec (25.33), que la terminologie traditionnelle est *menteuse :* les opérateurs *contra-variants* vont dans le *même* sens que les applications (fig. p. 209), les opérateurs covariants en sens *contraire* (fig. p. 203) ;

que si f est un *champ* d'opérateurs contravariants défini dans V, *il n'existe pas toujours* de champ dans V' associant au point A(X) l'opérateur Im (A)(X)(f(X)).

Dans le cas où A *est régulier et où val* (A) *est ouvert,* ce champ existe ; on le notera $A_{\mathrm{Im}}(f)$; il est donné par la formule

(25.63) $$A_{\mathrm{Im}}(f)(X) = \mathrm{Im}\,(A)(A^{-1}(X))(f(A^{-1}(X))) ;$$

si A est un *glissement,* on retrouve d'ailleurs la définition de l'image du champ f par A, telle qu'elle a été donnée en (15.3).

Remarquons qu'on a aussi

(25.64) $$[A.B]_{\mathrm{Im}} = A_{\mathrm{Im}}.B_{\mathrm{Im}}$$

dès que les deux membres existent.

(25.65) — L'opérateur Im (A)(X) est linéaire ; il transforme les tenseurs en tenseurs ; la racine des opérateurs contravariants possède donc la *sous-racine* des tenseurs contravariants d'ordre p, pourvue d'une structure vectorielle invariante. Dans le cas $p = 1$, cette racine se réduit à la racine D, grâce à l'identification des vecteurs avec les tenseurs contravariants d'ordre 1 (25.53).

— La dérivée de Lie d'un tenseur contravariant T est donnée par la formule

(25.66) $$\begin{aligned}[\delta_L T]({}^1C) \ldots ({}^pC) &= \delta[T({}^1C) \ldots ({}^pC)]\\ &\quad - T(\delta_L{}^1C)({}^2C) \ldots ({}^pC)\\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad - T({}^1C) \ldots ({}^{p-1}C)(\delta_L{}^pC)\end{aligned}$$

où l'on peut calculer les dérivées de Lie $\delta_L{}^jC$ par la formule (24.40) ; en un point X de R^n, on a

(25.67) $$\begin{aligned}[\delta_L T]({}^1C) \ldots ({}^pC) &= [\delta T]({}^1C) \ldots ({}^pC)\\ &\quad - T({}^1C.M)({}^2C) \ldots ({}^pC)\\ &\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad - T({}^1C) \ldots ({}^{p-1}C)({}^pC.M)\\ \text{avec}\quad M &= \frac{\partial}{\partial X}[\delta X]\end{aligned}$$

formule qu'il est utile de comparer avec (25.43).

— On a, comme pour les tenseurs covariants :

(25.68) $$\delta_L[T \otimes T'] = [\delta_L T] \otimes T' + T \otimes [\delta_L T']$$

Tenseurs mixtes.

(25.69) Plus généralement, on appelle *tenseur mixte* d'un espace vectoriel E (de dimension n) tout opérateur multilinéaire T défini sur E et sur son dual E*.

En convenant d'écrire en premier les variables prises dans E*, on aura donc

$$T({}^1C) \ldots ({}^pC)(U_1) \ldots (U_q) \in R$$

si ${}^1C, \ldots {}^pC \in E^*$, $U_1, \ldots U_q \in E$; nous dirons alors que T est un tenseur d'*ordre* $p + q$, p *fois contravariant*, q *fois covariant*, ou plus brièvement, que T est un tenseur de variance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ (1).

En particulier

- les tenseurs *covariants d'ordre* q ont la variance $\begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}$;
- les tenseurs *contravariants d'ordre* p ont la variance $\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$;
- les *nombres* seront considérés comme tenseurs de variance $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(1) Nous verrons plus loin comment cette expression se rattache à la notion générale de variance, définie au § 13.

— On appelle *composantes* d'un tenseur T dans une base S les nombres

(25.70) $$\mathrm{T}^{j\ldots k}_{l\ldots m} = \mathrm{T}({}^j\mathrm{S}^{-1}) \ldots ({}^k\mathrm{S}^{-1})(\mathrm{S}_l) \ldots (\mathrm{S}_m)\,;$$

les composantes d'un tenseur de variance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ sont donc numérotées au moyen de p indices supérieurs, q indices inférieurs.

ỏ Un tenseur est défini par ses composantes dans une base S ; ceci résulte de la formule inverse :

(25.71) $$\mathrm{T}({}^1\mathrm{C}) \ldots ({}^p\mathrm{C})(\mathrm{U}_1) \ldots (\mathrm{U}_q) = \mathrm{T}^{j\ldots k}_{l\ldots m} \times {}^1\mathrm{C}.\mathrm{S}_j \times \ldots \times {}^p\mathrm{C}.\mathrm{S}_k \times {}^l\mathrm{S}^{-1}.\mathrm{U}_1 \times \ldots \times {}^m\mathrm{S}^{-1}.\mathrm{U}_q$$

— Ces formules montrent que

(25.72) Les tenseurs de variance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ sur un espace vectoriel de dimension n forment un espace vectoriel de dimension n^{p+q} ;

ces formules donnent aussi la solution du problème de *changement de base* (calcul des composantes de T dans une base S′ en fonction des composantes dans une base S et de la matrice $\mathrm{S}^{-1}.\mathrm{S}'$).

— Le *produit tensoriel* de deux tenseurs T et T′, de variances respectives $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix}$, noté $\mathrm{T} \otimes \mathrm{T}'$, est le tenseur de variance $\begin{bmatrix} p+p' \\ q+q' \end{bmatrix}$ défini par

(25.73) $$\begin{aligned} &[\mathrm{T} \otimes \mathrm{T}')({}^1\mathrm{C}) \ldots ({}^{p+p'}\mathrm{C})(\mathrm{U}_1) \ldots (\mathrm{U}_{q+q'}) \\ &= \mathrm{T}({}^1\mathrm{C}) \ldots ({}^p\mathrm{C})(\mathrm{U}_1) \ldots (\mathrm{U}_q) \times \mathrm{T}'({}^{p+1}\mathrm{C}) \ldots ({}^{p+p'}\mathrm{C})(\mathrm{U}_{q+1}) \ldots (\mathrm{U}_{q+q'})\,; \end{aligned}$$

ỏ l'opération $\otimes$ est *associative* et *bilinéaire ;* en choisissant une base S, les composantes du produit tensoriel sont données par la formule

(25.74) $$[\mathrm{T} \otimes \mathrm{T}']^{j\ldots k\, j'\ldots k'}_{l\ldots m\, l'\ldots m'} = \mathrm{T}^{j\ldots k}_{l\ldots m} \times \mathrm{T}'^{j'\ldots k'}_{l'\ldots m'}$$

— Notons que la formule (25.71) peut aussi s'écrire

(25.75) $$\mathrm{T} = \mathrm{T}^{j\ldots k}_{l\ldots m}\, \mathrm{S}_j \otimes \ldots \otimes \mathrm{S}_k \otimes {}^l\mathrm{S}^{-1} \otimes \ldots \otimes {}^m\mathrm{S}^{-1}$$

et que si T est covariant et T′ contravariant, on a

(25.76) $$\mathrm{T} \otimes \mathrm{T}' = \mathrm{T}' \otimes \mathrm{T}$$

— *Soit* A *un opérateur linéaire qui transforme les tenseurs de variance* $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ *en tenseurs de variance* $\begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix}$; considérons des covecteurs ${}^j\mathrm{C}$ et des vecteurs U_k quelconques ; il est clair que l'opérateur $\widetilde{\mathrm{A}}$ défini par

(25.77) $$\begin{aligned} &\mathrm{A}({}^1\mathrm{C} \otimes \ldots \otimes {}^q\mathrm{C} \otimes \mathrm{U}_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{U}_p)({}^{q+1}\mathrm{C}) \ldots ({}^{q+p'}\mathrm{C})(\mathrm{U}_{p+1}) \ldots (\mathrm{U}_{p+q'}) \\ &= \widetilde{\mathrm{A}}({}^1\mathrm{C}) \ldots ({}^{q+p'}\mathrm{C})(\mathrm{U}_1) \ldots (\mathrm{U}_{p+q'}) \end{aligned}$$

est un tenseur, de variance $\begin{bmatrix} q+p' \\ p+q' \end{bmatrix}$; en choisissant une base S, ỏ on a :

(25.78) $$[\mathrm{A}(\mathrm{T})]^{r\ldots s}_{t\ldots u} = \widetilde{\mathrm{A}}^{j\ldots k\, r\ldots s}_{l\ldots m\, t\ldots u} \times \mathrm{T}^{l\ldots m}_{j\ldots k},$$

la convention d'Einstein indiquant une sommation sur les q indices $j \ldots k$ et les p indices $l \ldots m$.

(25.79) — Cette formule peut être considérée comme inverse de (25.77), puisqu'elle définit l'opérateur A en fonction du tenseur $\widetilde{\mathrm{A}}$; la correspondance $\mathrm{A} \to \widetilde{\mathrm{A}}$, qui est visiblement *linéaire*, est donc aussi *régulière.*

On pourra donc, si l'on veut, supprimer le signe $\sim$ *; si l'on adopte cette convention,* et si T et T′ sont des tenseurs de variances respectives $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix}$, l'écriture T(T′) aura un sens pourvu que

$q' \leqslant p$, $p' \leqslant q$, et désignera un tenseur de variance $\begin{bmatrix} p - q' \\ q - p' \end{bmatrix}$, défini par la formule (25.78) (avec suppression du $\sim$).

— Avec cette convention, tout tenseur T est donc considéré comme *borne supérieure d'opérateurs linéaires compatibles ;* si T et T' sont des tenseurs, le produit T.T' est donc aussi une borne supérieure d'opérateurs linéaires (formule (1.16)), *mais ce n'est pas nécessairement un tenseur.*

Z

Exemples :

(25.80) — Soit T un tenseur de variance $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; avec la convention précédente, la restriction A de T à E est un *affineur* (application linéaire de E dans E) ; chaque composante T^j_k de T dans une base S est égale à l'élément de matrice ${}^j[S^{-1}.A.S]_k$; si C est un covecteur de E, on a $T(C) = C.A$: T prolonge donc simultanément A et l'opérateur *transposé* A^* (défini sur E^* par $A^*(C) = C.A$).

— Soient A et B deux affineurs de E ; le prolongement précédent conduit à l'identité

(25.81)
$$[A \otimes B](U \otimes V) = A(U) \otimes B(V) \qquad [U, V \in E] ;$$

cette formule est la *définition du produit tensoriel* $A \otimes B$, dans le cas plus général où A et B sont deux opérateurs linéaires quelconques (définis sur des espaces de dimensions finies).

(25.82) — Si T est un tenseur de variance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, la convention (25.79) rend équivalentes les notations

$$T({}^1C) \ldots ({}^pC)(U_1) \ldots (U_q)$$

et

$$T({}^1C \otimes \ldots \otimes {}^pC \otimes U_1 \otimes \ldots \otimes U_q)$$

(25.83) — Soit F une permutation des entiers 1, 2, … p ; l'opérateur linéaire $\widehat{F}$, défini en (25.11), est prolongé par un tenseur de variance

$\begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix}$, que nous noterons encore $\widehat{F}$ [1]. Les composantes de ce tenseur dans une base S se calculent immédiatement ; on trouve par exemple, pour $p = 1$ ou 2 :

F	$\widehat{F}$
$1 \to 1$	$\widehat{F}^j_k = {}^j\vert_k$
$(1, 2) \to (1, 2)$	$\widehat{F}^{jk}_{lm} = {}^j\vert_l \times {}^k\vert_m$
$(1, 2) \to (2, 1)$	$\widehat{F}^{jk}_{lm} = {}^j\vert_m \times {}^k\vert_l$

et, en général :

(25.84)
$$\widehat{F}^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{k_1 k_2 \ldots k_p} = {}^{j_1}|_{k_{F(1)}} \times {}^{j_2}|_{k_{F(2)}} \times \ldots \times {}^{j_p}|_{k_{F(p)}}$$

Définition :

(25.85) On dit qu'un tenseur T est *invariant* si ses composantes sont les mêmes dans toutes les bases.

Le tenseur $\widehat{F}$ ci-dessus est donc invariant (puisque les composantes sont données par la formule (25.84) où n'intervient pas le choix de S) ; de même le tenseur

(25.86)
$$\sum_{F \in \mathfrak{G}} s_F \widehat{F}$$

où $\mathfrak{G}$ désigne le *groupe symétrique d'ordre p*, et où les s_F sont des scalaires.

(1) Mais la formule $\widehat{F.F'} = \widehat{F}.\widehat{F'}$ *cesse d'être vraie ;* on a notamment

$$\widehat{F.F'}(T) = [\widehat{F'}.\widehat{F}](T)$$

si T est un tenseur *contravariant* d'ordre p.

Ainsi, le *tenseur de Kronecker* d'ordre p, δ, défini par

(25.87) $$\delta = \sum_{F \in \mathcal{G}} \chi_-(F)\hat{F}$$

où χ_- désigne le caractère défini en (25.28), est *invariant* ; on peut le définir directement par la formule

(25.88) $$\delta({}^1C) \ldots ({}^pC)(U_1) \ldots (U_p) = \det\left(\begin{bmatrix} {}^1C \\ \ldots \\ {}^pC \end{bmatrix} . [U_1 \ldots U_p]\right)$$

d'où se déduisent ses composantes ; pour $p = 2$, on a

(25.89) $$\delta^{jk}_{lm} = {}^j|_l \times {}^k|_m - {}^j|_m \times {}^k|_l$$

De même, sont invariants les tenseurs correspondants aux opérateurs de symétrisation P_χ (25.22) ; on a d'ailleurs $P_{\chi_-} = \dfrac{\delta}{p\,!}$.

Définition :

(25.90) Soit A un opérateur linéaire, transformant les tenseurs de variance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ en tenseurs de variance $\begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix}$; on dira que A est une *contraction* si le tenseur $\tilde{A}$ correspondant (25.78) est *invariant*.

Si A et B sont deux contractions, on calcule aisément les composantes de $\widetilde{A.B}$ en fonction de celles de $\tilde{A}$ et de $\tilde{B}$; ces composantes sont donc indépendantes du choix de la base ; par conséquent :

(25.91) Le produit de deux contractions est une contraction.

En particulier, si F est une permutation de $1, 2, \ldots p$, la restriction de $\hat{F}$ aux tenseurs de variance $\begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix}$ est une contraction (pourvu que $p \geqslant q$, $p \geqslant r$) ; ♁ on en déduit l'énoncé :

(25.92) Soient G et H des permutations [de $(1, 2, \ldots q)$ et $(1, 2, \ldots r)$ respectivement] ; il existe des contractions A, B telles que

$$[A(T)]^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_r} = T^{j_{G(1)} \ldots j_{G(q)}}_{k_{H(1)} \ldots k_{H(r)}}$$

$$B(T)^{s \ldots t}_{u \ldots v} = T^{js \ldots t}_{ju \ldots v}$$

(25.93) — On a l'habitude de réserver le mot *contraction* aux opérateurs définis en (25.92), et ceux qui s'en déduisent par produit ; notre définition (25.90) est donc *plus générale*, ainsi que le montrent certains des exemples suivants :

Z

(25.94)

F	Variance de T	$\hat{F}(T)$
$1 \to 1$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	T
$1 \to 1$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{F}(T) = T^j_j$
$(1, 2) \to (1, 2)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{F}(T)^p_q = T^j_j\,{}^p\vert_q$
$(1, 2) \to (2, 1)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	T
$(1, 2, 3) \to (1, 2, 3)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\hat{F}(T)_{pq} = T^j_{jpq}$

Les opérateurs P_χ (25.22) sont aussi des *contractions*, au sens (25.90).

— Si T et T′ sont deux tenseurs de variances données, ♁ il existe une contraction A telle que

$$T(T') \equiv A(T \otimes T')$$

c'est pourquoi le calcul de T(T'), qui se ramène à celui d'un produit tensoriel suivi d'une contraction, s'appelle parfois « multiplication contractée ».

(25.95) — Soit V une variété différentiable de dimension n.

Nous avons déjà défini sur V deux racines, désignées toutes deux par Im, dont les fibres sont constituées de *tenseurs covariants* (resp. *contravariants*) [(25.36), resp. (25.60)].

Ces deux définitions se prolongent au cas des tenseurs de variance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, grâce à l'algorithme des *racines d'opérateurs multiples* (16.25) ; il vient :

(25.96)
$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}(A)(X)(T)({}^1C)\ldots({}^pC)(U_1)\ldots(U_q) = \\ &T({}^1C.D(A)(X))\ldots({}^pC.D(A)(X))(D(A)(X)^{-1}.U_1)\ldots(D(A)(X)^{-1}.U_q) \end{aligned}$$

avec les désignations

A : glissement de $R^n \cup V$

$X \in \mathrm{def}\,(A)$

T : tenseur de l'espace vectoriel D_X, de variance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$;

${}^jC \in D^*_X$, $U_k \in D_{A(X)}$.

Notons que :

(25.97) — Im est une *racine canonique, d'ordre* 1, à *fibre vectorielles*.

— Si A est une *carte* de V, T un tenseur au point A(X), ô les composantes de T dans la *base naturelle* S = D(A)(X) sont données par la formule

(25.98)
$$T^{j\ldots k}_{l\ldots m} = \mathrm{Im}(A)(X)^{-1}(T)({}^j|)\ldots({}^k|)(\,|_l)\ldots(\,|_m)$$

(25.99) — On en déduit que la correspondance $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \to$ variance (Im) est *régulière* si V possède *assez de bases naturelles* (par exemple si

toutes les bases sont naturelles, ce qui a lieu si V est de classe C^m, $m = 1, 2, \ldots \infty, \omega$).

— ô on en déduit aussi le théorème suivant :

Soit Θ un *tenseur invariant* (25.85) d'un espace à n dimensions ; $\Theta^{j\ldots k}_{l\ldots m}$ ses composantes.

(25.100) Il existe alors un *champ invariant f* [déf. (15.14)] tel que, pour tout X de $R^n \cup V$, $f(X)$ soit un *tenseur invariant* de D_X, dont les composantes dans toute base S de D_X sont données par

$$[f(X)]^{j\ldots k}_{l\ldots m} = \Theta^{j\ldots k}_{l\ldots m}$$

(25.101) — Soit par exemple F une permutation des entiers $1, 2, \ldots p$; $\widehat{F}_E$ le tenseur de l'espace E qui lui correspond par la définition (25.83) (nous l'avions désigné par $\widehat{F}$, sans rappeler E) et qui est invariant (25.85) ; ô le champ invariant f correspondant (théorème précédent) est défini par

$$f(X) \equiv \widehat{F}_{D_X} ;$$

Z on écrira le plus souvent $f(X) \equiv \widehat{F}$, *en omettant de rappeler que l'espace où opère F varie avec X.*

Il en est de même pour le « champ de Kronecker d'ordre p » $f(X) \equiv \delta$ (25.87), etc.

Théorème :

la correspondance $A \to \widetilde{A}$ (25.77) est un *isomorphisme de racine ;*

Les correspondances

ô (25.102)
$\begin{bmatrix} T \\ T' \end{bmatrix} \to T \otimes T'$ (25.73)

$\begin{bmatrix} T \\ T' \end{bmatrix} \to T(T')$ (25.79)

sont des *homomorphismes de racines.*

Il s'agit bien entendu d'un isomorphisme *d'une racine d'opérateurs* (16.20) *à une racine de tenseurs* dans le premier cas ; d'un *produit direct de racines de tenseurs* (16.17) *à une racine de tenseurs* dans le deuxième cas ; le point X considéré est *sous-entendu* ; pour retrouver la définition d'un homomorphisme F_X (13.1), il faudrait écrire $F_X(A) = \widetilde{A}$, ou $F_X\left(\begin{bmatrix} T \\ T' \end{bmatrix}\right) = T \otimes T'$.

Corollaire :

(25.103) A chaque *contraction* A d'un espace de dimension n correspond un *champ invariant* $f(X) = A$, défini sur toute variété de dimension n [1].

Par application du théorème (16.23), on en déduit que :

(25.104) Toute *contraction* définit un *homomorphisme de racines ;*

le lecteur précisera sans peine cet énoncé elliptique.

— La dérivée de Lie des champs de tenseurs se calcule à partir des formules générales du § 23 ; le lecteur pourra, s'il le désire, généraliser les formules concernant les tenseurs covariants (25.42 à 25.46) et contravariants (25.66 à 25.68). Résolvons par exemple l'exercice suivant :

(25.105) Soit A une carte de la variété V ; x une variable parcourant R^n ; X la variable $A(x)$; S la base naturelle $D(A)(x)$; $\delta X = F(X)$ un glissement infinitésimal de V ; $T = f(X)$ un champ de tenseurs défini sur V.

Calculer les composantes dans S de la dérivée de Lie $\delta_L T$.

On trouve successivement :

$$[\delta_L S]_j = \delta_L[S_j] = \delta_L[\partial_j X] = [\delta, \partial_j]_L X = S.[\delta, \partial_j]_L x = -S\partial_j \delta x$$
$$= -S.M.\,|_j, \quad \text{en appelant M la matrice } \frac{\partial[\delta x]}{\partial x} ;$$

[1] Avec le même abus de notations que précédemment (25.101).

d'où

$$\delta_L S = -S.M \quad , \quad \delta_L[S^{-1}] = M.S^{-1} \quad , \quad \delta_L[{}^j S^{-1}] = {}^j|.M.S^{-1}$$

puis

$$\delta[T^{j\ldots k}_{l\ldots m}] = \delta_L[T({}^j S^{-1}) \ldots (S_m)]$$
$$= [\delta_L T]^{j\ldots k}_{l\ldots m} + T(\delta_L {}^j S^{-1}) \ldots (S_m) + \ldots + T({}^j S^{-1}) \ldots (\delta_L S_m)$$

d'où finalement :

(25.106)
$$[\delta_L T]^{j\ldots k}_{l\ldots m} = \delta[T^{j\ldots k}_{l\ldots m}] - {}^j M_{j'} \times T^{j'\ldots k}_{l\ldots m} - \ldots - {}^k M_{k'} \times T^{j\ldots k'}_{l\ldots m}$$
$$+ {}^{l'} M_l \times T^{j\ldots k}_{l'\ldots m} + \ldots + {}^{m'} M_m \times T^{j\ldots k}_{l\ldots m'}$$

avec $M = \dfrac{\partial}{\partial x}[\delta x]$

(25.107) — On sait que $\delta_L T = 0$ si T est un *tenseur invariant* (23.15) ; les théorèmes d'homomorphisme (25.102, 104) permettent donc, grâce à (23.22), d'écrire :

(25.108) $$\delta_L[T \otimes T'] = [\delta_L T] \otimes T' + T \otimes [\delta_L T']$$

(25.109) $$\delta_L[T(T')] = [\delta_L T](T') + T(\delta_L T') \quad \text{(notation (25.79)}$$

(25.110) $$\delta_L[A(T)] = A(\delta_L T) \quad \text{si A est une contraction [1].}$$

§ 26 Algèbre extérieure

Définition :

(26.1) On appelle *p-forme*, ou encore *forme homogène de degré p*, tout tenseur covariant antisymétrique d'ordre p.

[1] Au sens large que nous avons donné en (25.90).

Rappelons la définition de l'antisymétrie (25.28), (25.18), (25.12) ; le tenseur covariant ω sera une p-forme s'il vérifie

(26.2) $$\omega(U_{F(1)})(U_{F(2)}) \ldots (U_{F(p)}) \equiv \chi_-(F) \times \omega(U_1)(U_2) \ldots (U_p)$$

pour toute permutation F de $1, 2, \ldots p$, $\chi_-(F)$ désignant la *parité* de F, $U_1, U_2, \ldots U_p$ des vecteurs.

— Dans le cas $p = 1$, la formule (26.2) est vérifiée trivialement quel que soit ω ; donc :

(26.3) les « formes homogènes de degré 1 » sont les covecteurs.

Par définition :

(26.4) On appellera « formes homogènes de degré 0 » les *scalaires.*

Il résulte de (26.2) que $\omega(U_1) \ldots (U_p)$ est nul dès que deux des vecteurs U_j sont égaux (il suffit de choisir pour F la permutation qui échange leurs deux numéros et conserve les autres) ; en utilisant la multilinéarité, on en déduit le théorème :

(26.5) Si ω est une p-forme, et si les vecteurs $U_1, U_2, \ldots U_p$ ne sont pas linéairement indépendants, on a

$$\omega(U_1)(U_2) \ldots (U_p) = 0$$

par conséquent :

(26.6) Les p-formes sur un espace de dimension n sont nulles si $p > n$.

— On sait que les p-formes sur un espace de dimension n forment un espace vectoriel, dont la dimension est (pour chaque p) un *polynôme en* n, polynôme qui ne possède pas de terme de de degré 0 et dont le terme de plus haut degré est $\dfrac{n^p}{p!}$ (théorème (25.25)) ; il résulte de (26.6) que ce polynôme s'annule pour

$n = 1, 2, \ldots p - 1$; ce polynôme est donc *divisible* par le polynôme $n[n-1] \ldots [n-p+1]$; donc :

(26.7) Les p-formes sur un espace de dimension n forment un espace vectoriel Ω_p dont la dimension (¹) est

$$C_n^p = \frac{n[n-1] \ldots [n-p+1]}{1 \times 2 \ldots \times p} = \frac{n!}{p![n-p]!}$$

(26.8) — On appelle *formes de degré maximum* les formes dont le degré est égal à la dimension de l'espace (à cause du théorème (26.6)) ; il résulte de (26.7) que ces formes constituent un espace vectoriel de dimension 1 ; donc :

(26.9) Sur un espace vectoriel de dimension n, il existe une n-forme non nulle ; toutes les autres lui sont proportionnelles.

(26.10) — On appelle parfois *jauge,* ou encore *élément de volume,* toute forme non nulle de degré maximum.

Théorème :

(26.11) Soit ω une jauge d'un espace E de dimension n ; $U_1, U_2, \ldots U_p$ des vecteurs de E ($p \leqslant n$) ; on a

$$[\omega(U_1)(U_2) \ldots (U_p) \neq 0] \Leftrightarrow [U_1, U_2 \ldots U_p \text{ linéairement indépendants}]$$

Ce théorème résulte trivialement de (26.5), et du fait que des vecteurs indépendants sont toujours extraits d'une base.

C.Q.F.D.

(¹) On a donc (notations de (25.25) :

$$n(n-1) \ldots (n-p+1) = \sum_{F \in \mathfrak{G}} \chi_-(F)\, n^{\mathrm{C}(F)}$$

$\mathfrak{G}$ étant le groupe symétrique d'ordre p. Compte tenu de la formule $\chi_-(F) = [-1]^{p+\mathrm{C}(F)}$ (25.28), on en déduit la *dimension de l'espace des tenseurs symétriques d'ordre* p :

$$\frac{1}{p!} \sum_{F \in \mathfrak{G}} n^{\mathrm{C}(F)} = \frac{n[n+1] \cdots [n+p-1]}{p!}$$

En particulier, ω est un opérateur *régulier*, appliquant linéairement E dans l'espace Ω_{n-1} des $[n-1]$-formes ; comme la dimension de cet espace est n (th. 26.7)), ω applique E *sur* Ω_{n-1} :

(26.12) Si ω est une jauge, θ une $[n-1]$-forme, il existe un vecteur U, et un seul, tel que

$$\theta = \omega(U)$$

ce qui s'écrit encore

$$\theta(U_1) \ldots (U_{n-1}) = \omega(U)(U_1) \ldots (U_{n-1})$$

Soit A un affineur de l'espace E (application linéaire de E dans E) ; des théorèmes précédents résultent les formules [1] :

(26.13) $$\omega(A.U_1)(A.U_2) \ldots (A.U_n) \equiv \det(A) \times \omega(U_1)(U_2) \ldots (U_n)$$

(26.14) $$\omega(U_1)(A.U_2) \ldots (A.U_n) \equiv \omega(\mathrm{Adj}(A).U_1)(U_2) \ldots (U_n)$$

(26.15) $$\begin{aligned} &\omega(A.U_1)(U_2) \ldots (U_n) \\ &+ \omega(U_1)(A.U_2) \ldots (U_n) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \equiv \mathrm{Tr}(A) \times \omega(U_1)(U_2) \ldots (U_n) \\ &+ \omega(U_1) \ldots (U_{n-1})(A.U_n) \end{aligned}$$

formules que l'on peut d'ailleurs considérer comme des *définitions* des nombres det (A) et Tr (A), de l'affineur Adj (A). On en déduit immédiatement la formule (21.21)

$$\delta[\det(A)] = \mathrm{Tr}(\mathrm{Adj}(A).\delta A)$$

Définition :

(26.16) Soit E un espace vectoriel de dimension n ; Ω_p l'espace des p-formes sur E.

On appellera *forme (non homogène)* de E tout élément du produit direct

$$\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

[1] Voir Souriau [réf. p. 117].

En appliquant (26.7), et en remarquant que

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = [1+1]^n,$$

on voit que

(26.17) Les formes non homogènes sur E forment un espace vectoriel de dimension 2^n.

Une forme non homogène ω s'écrit par définition,

(26.18) $$\omega = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \ldots \\ \omega_n \end{bmatrix}$$

les ω_p étant des formes homogènes de degré p, appelées *composantes homogènes* de ω ; *il est commode d'identifier une forme non homogène dont toutes les composantes sont nulles, sauf une, avec cette composante* (ce qui n'entraîne pas d'erreurs, parce que les espaces Ω_0, Ω_1, ... Ω_n sont deux à deux disjoints) ; grâce à cette identification, on écrira donc (26.18) sous la forme :

(26.19) $$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_n ;$$

On dit que Ω est la *somme directe* des espaces Ω_0, Ω_1, ... Ω_n.

Définition :

(26.20) Soit ω une *forme* de E, V un *vecteur* de E. On appellera *produit intérieur* de ω par V la forme

$$\mathrm{Int}(V)(\omega) = \omega_1(V) + \ldots \omega_n(V)$$

(notations (26.19)) [1].

On peut noter que Int (V)(ω) est *nul* si ω est une 0-forme ; c'est une $[p-1]$-forme si ω est une p-forme ; la composante homogène de degré n de Int (V)(ω) est *toujours nulle.*

[1] On rappelle que $\omega_p(V)$ est la forme de degré $p-1$ définie par l'identité
$$[\omega_p(V)](V_1) \cdots (V_{p-1}) = \omega_p(V)(V_1) \cdots (V_{p-1})$$

— En choisissant une base S de E, et en supposant ω homogène, on trouve immédiatement :

(26.21) $$[\mathrm{Int}\,(V)(\omega)]_{jk\ldots m} = V^r \times \omega_{rjk\ldots m}$$

Enfin il est clair que

(26.22) Int est un opérateur *bi-linéaire,*

et, grâce à (26.5), que

(26.23) $$[\mathrm{Int}\,(V)]^2 = 0$$

Définition, théorème :

Soit C un covecteur de E ; ω une p-forme de E ; on appelle *produit extérieur de* C *par* ω l'opérateur Ext (C)(ω) défini par

(26.24) $$\begin{aligned}\mathrm{Ext}\,(C)(\omega)(V)(V_1)\ldots(V_p) = {} & C.V \times \omega(V_1)\ldots(V_p)\\ & - C.V_1 \times \omega(V)(V_2)\ldots(V_p)\\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & - C.V_p \times \omega(V_1)\ldots(V_{p-1})(V)\,;\end{aligned}$$

Ext (C)(ω) *est une* $[p+1]$*-forme.*

— Il est évident que Ext (C)(ω) est un tenseur covariant d'ordre $p+1$, et que Ext (C)(ω)(V)(V_1) ... (V_p) s'annule si V est égal à l'un des vecteurs $V_1, V_2, \ldots V_p$; il en résulte que Ext (C)(ω) est *antisymétrique.* C.Q.F.D.

Application :

Si ω est une forme de degré maximum n (26.8), Ext (C)(ω) est nulle (th. 26.6)) quel que soit C ; d'où la *formule de Cramer :*

(26.25) $$\begin{aligned}V \times \omega(V_1)\ldots(V_n) = {} & V_1 \times \omega(V)(V_2)\ldots(V_n) + \ldots\\ & + V_n \times \omega(V_1)\ldots(V_{n-1})(V)\end{aligned}$$

intéressante notamment lorsque ω est une *jauge* et $[V_1 \ldots V_n]$ une *base.*

— On calcule immédiatement, grâce à (26.24), les composantes du tenseur Ext (C)(ω) dans une base S :

(26.26) $$\begin{aligned}&[\mathrm{Ext}\,(C)(\omega)]_{j\,k_1\ldots k_p}\\ &\quad = C_j \times \omega_{k_1\ldots k_p} - C_{k_1} \times \omega_{j\,k_2\ldots k_p} - \ldots - C_{k_p} \times \omega_{k_1\ldots k_{p-1}j}\end{aligned}$$

qui montre que la correspondance

$$[C \otimes \omega] \rightarrow \mathrm{Ext}\,(C)(\omega)$$

est une *contraction* (25.90).

Le théorème (26.24) reste vrai pour $p = 1$; ω est alors un *covecteur* (26.3) ; en le notant C′, on a

(26.27) $$\mathrm{Ext}\,(C)(C')(V)(V') = C.V.C'.V' - C.V'.C'.V$$

ou

(26.28) $$\mathrm{Ext}\,(C)(C') = C \otimes C' - C' \otimes C$$

ou encore

(26.29) $$[\mathrm{Ext}\,(C)(C')]_{jk} = C_j \times C'_k - C_k \times C'_j\,;$$

le théorème (26.24) reste vrai pour $p = 0$, en précisant que

(26.30) $$\mathrm{Ext}\,(C)(s) = sC \quad \text{si} \quad s \text{ est un scalaire}$$

— Nous pourrons définir Ext (C)(ω) dans le cas où la forme est *non homogène* en posant

(26.31) $$\mathrm{Ext}\,(C)(\omega) = \mathrm{Ext}\,(C)(\omega_0) + \mathrm{Ext}\,(C)(\omega_1) + \ldots + \mathrm{Ext}\,(C)(\omega_n)$$
(notations (26.19)) ;

alors

(26.32) Ext est un opérateur *bi-linéaire.*

Théorème :

Si ω est une p-forme ($p \geqslant 1$), on a

(26.33) $$\mathrm{Ext}\,(C)(\omega(V)) + \mathrm{Ext}\,(C)(\omega)(V) = C.V\ \omega$$

Le premier membre de cette formule s'écrit

$$[\mathrm{Ext}\,(C).\mathrm{Int}\,(V) + \mathrm{Int}\,(V).\mathrm{Ext}\,(C)](\omega)\ ;$$

après vérification du cas $p = 0$, on en déduit donc la formule :

(26.34) $$\mathrm{Ext}\,(C).\mathrm{Int}\,(V) + \mathrm{Int}\,(V).\mathrm{Ext}\,(C) = C.V\ 1_\Omega$$

Ω désignant l'espace des formes non homogènes.

Théorème :

(26.35) $$[\mathrm{Ext}\,(C)]^2 = 0$$

— En multipliant l'égalité (26.34) à droite, puis à gauche par Ext (C), et en soustrayant, on trouve

$$\mathrm{Int}\,(V).\mathrm{Ext}\,(C)^2 - \mathrm{Ext}\,(C)^2.\mathrm{Int}\,(V) = 0$$

Si ω est une p-forme ($p \geqslant 1$), on en tire :

$$\mathrm{Ext}\,(C)^2(\omega)(V) = \mathrm{Ext}\,(C)^2(\omega(V))\ ;$$

puisque $\omega(V)$ est une forme $[p-1]$-forme, on en tire $\mathrm{Ext}\,(C)^2(\omega) = 0$ *par récurrence sur p*, après vérification du cas $p = 0$. C.Q.F.D.

— On doit remarquer que les trois formules (26.23), (26.34), (26.35) se groupent en *une seule identité*, à savoir

(26.36) $$[\mathrm{Ext}\,(C) + \mathrm{Int}\,(V)]^2 = C.V\ 1_\Omega$$

— Désignons par $[A, B]_+$ l'*anticommutateur* [1] de deux opérateurs linéaires A et B :

(26.37) $$[A.B]_+ = A.B + B.A$$

[1] On rappelle que le *commutateur* de A et B est
$$[A, B]_- = A.B - B.A$$

on tire alors de (26.36) les trois identités :

(26.38) $$\begin{aligned} [\mathrm{Int}\,(V),\ \mathrm{Int}\,(V')]_+ &= 0 \\ [\mathrm{Ext}\,(C),\ \mathrm{Ext}\,(C')]_+ &= 0 \\ [\mathrm{Ext}\,(C),\ \mathrm{Int}\,(V)]_+ &= C.V\,1_\Omega \end{aligned}$$

— Soit S une base de E ; ω une p-forme de E ; il résulte de (26.24) que :

(26.39) $$[\mathrm{Ext}\,({}^jS^{-1}).\mathrm{Int}\,(S_j)](\omega) = p\omega \qquad \text{(convention d'Einstein sur } j)$$

donc :

L'opérateur

(26.40) $$N = \mathrm{Ext}\,({}^jS^{-1}).\mathrm{Int}\,(S_j)$$

est indépendant du choix de la base S ; il opère sur une forme non homogène ω en multipliant chaque composante homogène de ω par son degré [1].

Théorème :

(26.41)

1) Il existe une opération sur les formes, appelée *multiplication extérieure*, notée $\wedge$, caractérisée par les propriétés (*a*), (*b*), (*c*) :

(*a*) si s est un scalaire, ω une forme : $s \wedge \omega = s\omega$

(*b*) si C est un covecteur, ω une forme : $C \wedge \omega = \mathrm{Ext}\,(C)(\omega)$

(*c*) L'opération $\wedge$ est *bi-linéaire* et *associative*.

[1] Les formules précédentes peuvent encore s'appliquer au cas d'espaces E de *dimension infinie* ; c'est le cas notamment en théorie quantique des champs (champs de *fermions*) ; on utilise alors la terminologie suivante (voir Kastler « Introduction à l'Electrodynamique Quantique » (Dunod éd.)) :

vide : 1 (considéré comme 0-forme)
créateurs : opérateurs Ext (C)
annihilateurs : opérateurs Int (V)
nombre de particules : opérateur N

les relations (26.38) s'appellent *relations de commutation*.

(26.41) 2) Une forme ω sera dite *monôme* si elle est scalaire ou s'il existe des covecteurs $C_1, C_2 \ldots, C_p$ tels que

$$\omega = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_p\,;$$

toute forme est une *somme de monômes.*

— L'opération $\wedge$ donne donc à l'espace des formes une structure d'*algèbre*, que l'on appelle *algèbre de Grassmann.*

Théorème :

Si ω est une forme homogène de degré p, on a

(26.42) $$\text{Int}\,(V)(\omega \wedge \omega') = [\text{Int}\,(V)(\omega)] \wedge \omega' + [-1]^p\, \omega \wedge [\text{Int}\,(V)(\omega')]\,;$$

si ω et ω' sont homogènes, de degrés p et p', on a

$$\omega \wedge \omega' = [-1]^{pp'}\, \omega' \wedge \omega$$

Ces formules s'établissent immédiatement lorsque ω est monôme (par récurrence sur p) ; le cas général en résulte par linéarité (th. (26.41, 2)).

C.Q.F.D.

Indiquons enfin les formules

(26.43) $$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_r = \frac{[p_1 + p_2 + \ldots + p_r]!}{p_1!\,p_2!\,\ldots\,p_r!}\, P_{\chi}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \ldots \otimes \omega_r)$$

valable si $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ sont des formes *homogènes* de degrés respectifs $p_1, p_2, \ldots p_r$; P_{χ} désigne le projecteur d'antisymétrisation pour les tenseurs d'ordre $p_1 + p_2 + \ldots + p_r$ ((25.22), (25.28)) ;

(26.44) $$[{}^1C \wedge {}^2C \wedge \ldots {}^pC](V_1)(V_2) \ldots (V_p) = \det\left(\begin{bmatrix} {}^1C \\ {}^2C \\ \vdots \\ {}^pC \end{bmatrix} [V_1 V_2 \ldots V_p]\right)$$

valable quels que soient les covecteurs ${}^jC$, les vecteurs V_j.

§ 27 Dérivation extérieure

Soit V une variété différentiable de dimension n.

Nous avons défini sur V une racine dont les fibres sont constituées de tenseurs covariants ayant une symétrie donnée (25.38 *c*) ; nous pouvons donc considérer en particulier la *racine des p-formes ;* en la désignant par Im_p, elle est définie par :

(27.1) $$\text{Im}_p\,(A)(X)(\omega)(U_1) \ldots (U_p) = \omega(D(A)(X)^{-1}U_1) \ldots (D(A)(X)^{-1}\,U_p)$$

A étant un glissement de V, X un point de def (A), ω une p-forme sur l'espace vectoriel D_X tangent à V en X, $U_1, \ldots U_p$ des éléments de $D_{A(X)}$.

Si $p = 1$, cette racine coïncide avec la racine D^* des covecteurs ; par convention, la racine des 0-formes sera la *racine triviale de fibre* R (voir (26.4)).

En effectuant le *produit direct* des racines $\text{Im}_0, \text{Im}_1, \ldots \text{Im}_n$ (16.18), on obtient une racine (appelons-la Im) telle que :

1) La fibre de Im en un point X est l'ensemble des *formes non homogènes* sur l'espace vectoriel tangent D_X.

(27.2) 2) Si la forme ω est homogène de degré p, on a [1]

$$\text{Im}\,(A)(X)(\omega) = \text{Im}_p\,(A)(X)(\omega)$$

3) Im (A)(X) est linéaire.

Inversement, (27.2) définit la racine Im ; on en tire en effet :

(27.3) $$\text{Im}\,(A)(X)(\omega) = \text{Im}_0\,(A)(X)(\omega_0) + \text{Im}_1\,(A)(X)(\omega_1) + \ldots + \text{Im}_n\,(A)(X)(\omega_n)$$

les ω_p étant les composantes homogènes de ω. Rappelons que, par définition, $\text{Im}_0\,(A)(X)(\omega_0) = \omega_0$.

[1] Par suite de l'identification des p-formes avec les formes non homogènes à une seule composante (26.18).

Nous savons définir et calculer la dérivée de Lie d'un champ différentiable de p-formes — comme cas particulier d'un champ de tenseurs covariants ; on en déduit immédiatement la dérivée de Lie d'un champ de formes non homogènes :

(27.4) $$\delta_L\omega = \delta_L\omega_0 + \delta_L\omega_1 + \ldots + \delta_L\omega_n$$

(formules (26.18) et (23.19)) ;

notons aussi que l'on a :

(27.5) $$\begin{aligned}
&\delta_L[\omega + \omega'] = \delta_L\omega + \delta_L\omega' \,;\ \delta_L[s\omega] = [\delta s]\omega + s\delta_L\omega \\
&\delta_L[\mathrm{Ext}\,(C)(\omega)] = \mathrm{Ext}\,(\delta_L C)(\omega) + \mathrm{Ext}\,(C)(\delta_L\omega) \\
&\delta_L[\mathrm{Int}\,(V)(\omega)] = \mathrm{Int}\,(\delta_L V)(\omega) + \mathrm{Int}\,(V)(\delta_L\omega) \\
&\delta_L[\omega \wedge \omega'] = [\delta_L\omega] \wedge \omega' + \omega \wedge [\delta_L\omega'] \,;
\end{aligned}$$

le lecteur pourra déduire ces formules du fait que la structure vectorielle des formes est invariante (27.2, 3), et que les applications $[C \otimes \omega] \to \mathrm{Ext}\,(C)(\omega)$, $[V \otimes \omega] \to [\mathrm{Int}\,(V)(\omega)]$ sont des contractions.

Théorème :

Soient :

V une variété différentiable C^2 ;
X une variable qui parcourt V ;
f un champ différentiable de p-formes défini sur un ouvert de V ;
ω la p-forme variable $f(X)$.

(27.6) Il existe alors une $[p + 1]$-forme variable $\nabla\omega$, appelée *dérivée extérieure* de ω, caractérisée par l'identité :

$$\lozenge \left\{ \begin{aligned}
[\nabla\omega](\delta X)(\delta_1 X) \ldots (\delta_p X) = {} & \delta[\omega(\delta_1 X) \ldots (\delta_p X)] \\
& - \delta_1[\omega(\delta X)(\delta_2 X) \ldots (\delta_p X)] \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - \delta_p[\omega(\delta_1 X) \ldots (\delta_{p-1} X)(\delta X)]
\end{aligned} \right.$$

valable si les dérivations δ, δ_1, $\ldots$ δ_p *commutent deux à deux.*

Le champ $X \to \nabla\omega$ est continu, et défini sur le même ouvert que f.

Démonstration :

(a) Considérons le cas où V est un espace vectoriel. On peut alors écrire

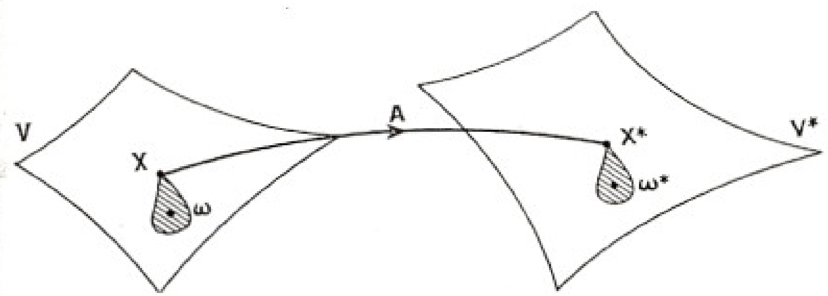
$$\delta[\omega(\delta_1 X) \cdots (\delta_p X)] = [\delta\omega](\delta_1 X) \cdots (\delta_p X) + \omega(\delta\delta_1 X) \cdots (\delta_p X) + \cdots + \omega(\delta_1 X) \cdots (\delta\delta_p X)$$

(21.20) ; en développant de même les différents termes du second membre de (27.6 $\lozenge$), ò les expressions contenant des dérivations secondes disparaissent deux à deux, grâce à la commutation de δ, δ_1, $\cdots$ δ_p ; il reste donc

(27.7) $$\begin{aligned}
[\nabla\omega](\delta X)(\delta_1 X) \ldots (\delta_p X) = {} & [\delta\omega](\delta_1 X) \ldots (\delta_p X) \\
& - [\delta_1\omega](\delta X)(\delta_2 X) \ldots (\delta_p X) \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - [\delta_p\omega](\delta_1 X) \ldots (\delta_{p-1} X)(\delta X) \,;
\end{aligned}$$

en écrivant $\delta_j\omega$ sous la forme $\dfrac{\partial\omega}{\partial X}(\delta_j X)$, on voit que $\nabla\omega$ est $[p + 1]$-fois linéaire ; il est clair que le second membre de (27.7) change de signe si on échange δ avec δ_1, δ_2, $\cdots$ δ_p ; ò $\nabla\omega$ est donc antisymétrique, c'est bien une $[p + 1]$-forme ; elle est continue, puisque $\dfrac{\partial\omega}{\partial X}$ est fonction continue de X.

b) Supposons que le théorème soit vrai pour une variété V^*, et que le champ $X \to \omega$ soit l'image réciproque, par une application deux fois différentiable A, d'un champ différentiable $X^* \to \omega^*$ de V [on a posé $X^* = A(X)$].



Par définition d'une image réciproque (25.33 ♣), on a

$$\omega(d_1 X) \ldots (d_p X) \equiv \omega^*(d_1 X^*) \ldots (d_p X^*)$$

quelles que soient les dérivations $d_1, d_2, \cdots d_p$; par suite, le second membre de (27.6, ◇) ne change pas si on écrit ω^* et X^* à la place de ω et X ; le théorème étant supposé vrai pour V^*, ce second membre est donc égal à

$$[\nabla\omega^*](\delta X^*)(\delta_1 X^*) \cdots (\delta_p X^*)$$

$\nabla\omega^*$ étant une $[p+1]$-forme continue de V^*, soit encore à

$$\theta(\delta X)(\delta_1 X) \cdots (\delta_p X)$$

θ étant la $[p+1]$-forme continue, *image réciproque* de $\nabla\omega^*$ par A.

c) La démonstration s'achève en considérant, dans le cas général, l'image réciproque ω^* de la forme donnée ω par une *carte* F ; alors ω prolonge l'image réciproque de ω^* par $A = F^{-1}$; il suffit d'appliquer le résultat (*b*), en remarquant que le théorème est vrai, selon (*a*), pour la variété $V = R^n$.

C.Q.F.D.

Remarques :

(27.8) — Nous avons préféré la notation $\nabla\omega$ à la notation $d\omega$, souvent utilisée, mais qui peut conduire à diverses confusions.

— Les dérivations ∂_j associées à une carte d'une variété V commutent deux à deux (21.33) ; en appliquant (27.6 ◇), on en déduit immédiatement les *composantes d'une dérivée extérieure*

(27.9)
$$[\nabla\omega]_{jk_1\ldots k_p} = \partial_j[\omega_{k_1\ldots k_p}] - \partial_{k_1}[\omega_{jk_2\ldots k_p}] - \ldots \partial_{k_p}[\omega_{k_1\ldots k_{p-1}j}]$$

soit, pour $p = 0, 1, 2$:

(27.10)
$$\begin{cases} [\nabla\omega]_j = \partial_j\omega \\ [\nabla\omega]_{jk} = \partial_j\omega_k - \partial_k\omega_j \\ [\nabla\omega]_{jkl} = \partial_j\omega_{kl} + \partial_k\omega_{lj} + \partial_l\omega_{jk} \end{cases}$$

— On voit en particulier que l'on est amené à convenir que :

(27.11) La dérivée extérieure d'un scalaire s (considéré comme 0-forme) est

$$\nabla s = \frac{\partial s}{\partial X}.$$

— Revenons au cas où V est un espace vectoriel (démonstration de (27.6), (*a*)). Il est clair que les deux membres de la formule (27.7) ne dépendent que de la valeur des vecteurs $\delta X, \delta_1 X \ldots \delta_p X$ au point X considéré ; cette formule est donc valable si on peut définir des champs de vecteurs $dX, d_1X, \ldots d_pX$ qui coïncident avec $\delta X, \delta_1 X, \ldots \delta_p X$ au point X, *et qui commutent deux à deux ;* or c'est toujours possible (par exemple en prenant des vecteurs *constants*) ; donc :

(27.12) *Sur un espace vectoriel* V, la dérivée extérieure d'une p-forme ω est donnée par la formule (27.7), valable quels que soient les vecteurs $\delta X, \delta_1 X, \ldots \delta_p X$.

— En considérant d'abord le cas d'un champ sur un espace vectoriel, on vérifie le théorème :

(27.13) Soit ω une p-forme différentiable ($p \geqslant 1$).

a) Si δ commute avec $\delta_1, \ldots \delta_p$, on a

$$\{\nabla[\omega(\delta X)] + [\nabla\omega](\delta X)\}(\delta_1 X) \ldots (\delta_p X) = \delta[\omega(\delta_1 X) \ldots (\delta_p X)]$$

b) Si δ est un *glissement infinitésimal*, on a

$$\nabla[\omega(\delta X)] + [\nabla\omega](\delta X) = \delta_L\omega$$

Cette formule (*b*) peut encore s'écrire [1]

(27.14)
$$\nabla . \mathrm{Int}\,(\delta X) + \mathrm{Int}\,(\delta X) . \nabla = \delta_L$$

puisque les deux membres donnent le même résultat si on les applique à une p-forme différentiable (même dans le cas $p = 0$).

[1] Au prix d'un léger abus de notations ; en effet, le symbole ∇ *n'est pas un opérateur.*

Théorème :

(27.15) (*a*) $\nabla[s\omega] = [\nabla s]\wedge\omega + s\nabla\omega$

(*b*) $\nabla[C\wedge\omega] = \nabla C\wedge\omega - C\wedge\nabla\omega$

(*c*) $\nabla[\omega\wedge\omega'] = [\nabla\omega]\wedge\omega' + [-1]^p\,\omega\wedge\nabla\omega'$

s, C, ω, ω' désignant respectivement un scalaire, un covecteur, une p-forme et une p'-forme différentiables.

Ces formules se démontrent par récurrence sur p, en utilisant les formules (27.5) et (27.13 *b*), ainsi que le théorème :

(27.16) Toute p-forme r fois différentiable est une somme de formes monômes r fois différentiables.

qui s'établit aussi par récurrence sur p, en utilisant la formule (26.39)

$$[\text{Ext}\,({}^t S^{-1}).\,\text{Int}\,(S_j)](\omega) = p\omega$$

et en choisissant pour S la base naturelle associée à une carte (voir (24.13)).

Théorème :

(27.17) Soient

$X^* \to \omega^*$ un champ différentiable de p-formes d'une variété V* ;

A[X → X*] une application deux fois différentiable d'un ouvert d'une variété V dans V* ;

$X \to \omega$ l'image réciproque du champ ω^* par A.

Alors $\nabla\omega$ est l'image réciproque de $\nabla\omega^*$ par A.

— Ce théorème, qui a déjà été démontré (paragraphe (*b*) de la démonstration de (27.6)), a de très nombreuses applications ; donnons en quelques-unes :

Théorème :

Soit V une variété différentiable *plongée* dans une variété V* (le plongement étant 2 fois différentiable).

Si ω^* est une p-forme différentiable de V, et si l'on pose, en tout point X de V

(27.18)
$$\omega(\delta_1 X)\ldots(\delta_p X) \equiv \omega^*(\delta_1 X)\ldots(\delta_p X)$$

pour tous vecteurs $\delta_1 X, \ldots \delta_p X$ *tangents* à V, ω est une p-forme différentiable de V, dont la dérivée extérieure est donnée par

$$[\nabla\omega](\delta X)(\delta_1 X)\ldots(\delta_p X) \equiv [\nabla\omega^*](\delta X)(\delta_1 X)\ldots(\delta_p X)$$

Il suffit d'appliquer (27.17) avec $A = 1_V$. C.Q.F.D.

— Soit φ [X → ω] un champ différentiable de p-formes ; le champ ψ [X → $\nabla\omega$] vérifie évidemment $\psi(X) \equiv \nabla[\varphi(X)]$; nous poserons donc (avec un léger abus de notations, car le symbole ∇ n'est pas un opérateur)

(27.19)
$$\psi = \nabla.\varphi$$

ce qui permettra d'écrire le théorème (27.17) sous la forme

(27.20)
$$\nabla.[A_{\text{Rec}}(\varphi)] = A_{\text{Rec}}(\nabla.\varphi)$$

— Supposons que A soit l'inverse d'un glissement B ; on sait que $A_{\text{Rec}}(\varphi) = B_{\text{Im}}(\varphi)$ (voir (25.48)) ; la formule

(27.21)
$$\nabla.[B_{\text{Im}}(\varphi)] = B_{\text{Im}}(\nabla.\varphi)$$

est donc valable pour tout champ différentiable φ de p-formes, et pour tout glissement B [1].

[1] La dérivée extérieure n'a été définie que sur les variétés C^2, dont tous les glissements sont deux fois différentiables.

— Notons aussi que la correspondance $\varphi \to \nabla . \varphi$ est *linéaire* ; il suffit de vérifier

(27.22) $\nabla[\omega + \omega'] = \nabla\omega + \nabla\omega'$

$\nabla[s\omega] = s\nabla\omega$ si s est un scalaire *constant*

(voir (27.15)).

— Soit $\varphi[X \to \omega]$ un champ différentiable de p-formes ; $f[X \to \delta X]$ un glissement infinitésimal. D'après (27.21), on a

$$\nabla[[e^{-tf}]_{\text{Im}}(\varphi)(X)] = [e^{-tf}]_{\text{Im}}(\nabla . \varphi)(X)$$

En dérivant par rapport à t, puis en faisant $t = 0$, il vient

(27.23) $$\nabla[\delta_L \omega] \equiv \delta_L[\nabla\omega]$$

cette formule est donc l'équivalent différentiel du théorème (27.21).

Mais nous n'avons pas justifié les opérations de dérivation effectuées, notamment la dérivation sous le signe ∇.
En prenant une carte, on constate que *la formule* (27.23) *est vraie si* δX *et* ω *sont deux fois différentiables* (et par conséquent si V est C^3).

Théorème de Poincaré :

(27.24) Si les formes ω et $\nabla\omega$ sont différentiables sur une variété C^2, on a :

$$\nabla[\nabla\omega] = 0$$

(a) Supposons ω deux fois différentiable, sur une variété C^3.

Si U est un vecteur quelconque tangent en un point à la variété, on sait qu'il existe un glissement infinitésimal deux fois différentiable $X \to \delta X$, qui coïncide avec U au point considéré (par exemple l'image par une carte d'un vecteur constant). Dans la formule (27.23)

$$\delta_L[\nabla\omega] = \nabla[\delta_L\omega]$$

remplaçons les deux dérivations de Lie δ_L par leur expression tirée de (27.13, b) ; il vient :

$$[\nabla^2\omega](\delta X) = \nabla^2[\omega(\delta X)]$$

d'où $\nabla^2\omega = 0$ (δX coïncidant avec tout vecteur U au point choisi) si le théorème est applicable à la $[p - 1]$-forme $\omega(\delta X)$, qui est deux fois différentiable.

On est ainsi ramené, par récurrence, au cas $p = 0$, qui se vérifie directement (par exemple au moyen des formules (27.10)).

b) Le cas général (27.23) se ramène, grâce à (27.17), au cas d'une forme ω définie sur un ouvert de R^n. La formule (27.9) montre que ∇ est alors un opérateur différentiel à coefficient constants, donc prolongeable aux *distributions* (1) ; la formule à démontrer, vraie pour les formes 2 fois différentiables d'après (a), s'étend alors à toutes les formes distributions ; ô le théorème en résulte.

C.Q.F.D.

« Réciproque » du théorème de Poincaré :

Soit ω une p-forme différentiable ($p \geqslant 1$), définie au voisinage d'un point X_0.

Si $$\nabla\omega = 0$$

(27.25) il existe une $[p - 1]$-forme θ, différentiable, telle que

$$\omega = \nabla\theta$$

dans un voisinage de X_0.

(a) Étudions d'abord le cas où ω est définie dans un ouvert *convexe* E de R^n, contenant l'origine, et cherchons à déterminer θ en ajoutant, à l'équation

$$\nabla\theta = \omega$$

l'équation

$$\text{Int}\,(X)(\theta) = 0.$$

Si l'on considère le glissement infinitésimal

$$\delta X = X$$

on devra avoir (formule (27.14)) :

$$\delta_L\theta = \nabla[\text{Int}\,(\delta X)(\theta)] + \text{Int}\,(\delta X)(\nabla\theta) = \text{Int}\,(X)(\omega) = \omega(X) ;$$

(1) Voir L. Schwartz, « Théorie des distributions », tome I (Hermann éd.).

La formule (25.43) montre que la $[p-1]$-forme θ vérifie

$$\delta_L \theta = \delta\theta + [p-1]\theta$$

on en tire, à une constante additive près [1] :

$$\clubsuit \qquad \theta = \int_0^1 t^{p-1}\varphi(tX)(X)dt$$

φ étant le champ $[X \to \omega]$.

— Inversement, si l'on définit θ par cette formule $\clubsuit$, θ est une $[p-1]$-forme, définie dans E tout entier à cause de la convexité, qui vérifie $\mathrm{Int}(X)(\theta) = 0$; l'intégrande $t^{p-1}\varphi(tX)(X)$ étant différentiable en $\begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix}$ (puisque $p \geqslant 1$), on peut dériver sous le signe $\int$; θ est donc différentiable, et l'on a notamment

$$\diamondsuit \qquad \nabla\theta = \int_0^1 t^{p-1}\nabla[\varphi(tX)(X)]dt$$

Appelons d'autre part ω_t l'image réciproque de ω par l'homothétie $[X \to tX]$; on a $\nabla\omega_t = 0$, puisque $\nabla\omega = 0$ (th. (27.17)) ; en appliquant la définition d'une image réciproque, on trouve

$$\omega_t = t^p\varphi(tX) ;$$

par suite, on a, pour le glissement infinitésimal $\delta X = X$, et grâce à (27.13 b) :

$$\heartsuit \qquad \delta_L\omega_t = [\nabla\omega_t](\delta X) + \nabla[\omega_t(\delta X)] = \nabla[\omega_t(X)] = t^p\nabla[\varphi(tX)(X)]$$

et d'autre part (25.43) :

$$\spadesuit \qquad \delta_L\omega_t = \delta\omega_t + p\omega_t = t^p[D(\varphi)(tX)(t\delta X) + p\varphi(tX)]$$
$$= t\frac{\partial}{\partial t}\ [t^p\varphi(tX)] ;$$

[1] On suppose X fixe, et on étudie, comme fonctions de t, les grandeurs θ, ω au point tX. θ vérifie une équation différentielle linéaire, dont l'intégration classique conduit à $\clubsuit$.

en comparant $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, il vient

$$\nabla\theta = [t^p\varphi(tX)]_0^1 = \omega.$$

(b) Dans le cas général (27.25), considérons une carte F telle que $F(0) = X_0$. L'image réciproque ω^* de ω par F est une p-forme, vérifiant $\nabla\omega^* = 0$ (th. (27.17)) ; il existe un ouvert convexe E^* de R^n, tel que $0 \in E^* \subset \mathrm{def}(F)$; d'après (a), il existe une $[p-1]$-forme θ^*, différentiable dans E^*, vérifiant $\nabla\theta^* = \omega^*$; son image θ par F répond à la question.

C.Q.F.D.

Définition :

(27.26) Soit E un ouvert d'une variété V.

Nous dirons que E est un *morceau* de V s'il existe une carte F telle que

$$\mathrm{val}(F) = E \quad , \quad \mathrm{def}(F) \text{ convexe } [1]$$

On voit que la démonstration de (27.25) conduit en fait au résultat plus précis :

(27.27) Soit ω une p-forme différentiable vérifiant $\nabla\omega = 0$ ($p \geqslant 1$).

Si ω est définie dans un *morceau* E, il existe une $[p-1]$-forme θ vérifiant $\nabla\theta = \omega$ dans E.

Bien entendu, θ n'est pas déterminée par l'équation $\nabla\theta = \omega$; on obtient une autre solution de cette équation en ajoutant à θ la dérivée extérieure d'une $[p-1]$-forme (si $p \geqslant 2$).

Dans le cas $p = 0$, le théorème (27.27) se remplace évidemment par l'énoncé :

(27.28) Soit ω un scalaire vérifiant $\nabla\omega = 0$ dans un ouvert ; E un morceau de cet ouvert.

Il existe alors un *scalaire constant* ω_0 tel que $\omega = \omega_0$ dans E.

[1] On rappelle que l'ensemble de définition d'une carte est un *ouvert* de R^n.

On voit donc que l'ensemble où est défini ω se décompose en ouverts disjoints dans chacun desquels ω est constant ; par conséquent :

(27.29) Si E est un ouvert connexe [1] d'une variété V, tout champ scalaire ω vérifiant $\nabla\omega = 0$ dans E est *constant* dans E.

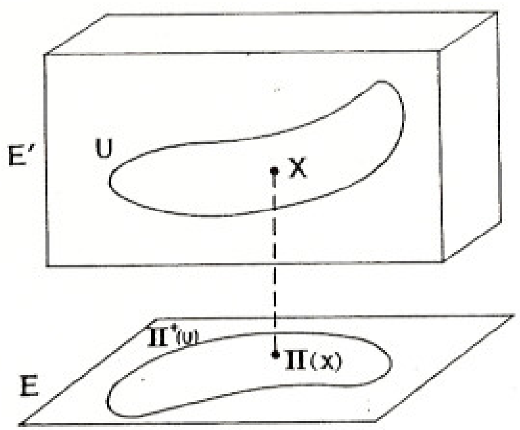
(27.30) — Étudions maintenant le cas $p = 1$: soit ω une 1-forme (champ de covecteurs) vérifiant $\nabla\omega = 0$ dans un ouvert E d'une variété V. On peut recouvrir E par des *morceaux* E_λ ; définir dans chaque E_λ une fonction différentiable θ_λ, telle que $\nabla[\theta_\lambda(X)] = \omega$ (th. (27.27)).

Dans chaque intersection $E_\lambda \cap E_\mu$, on a $\nabla[\theta_\lambda(X) - \theta_\mu(X)] = 0$; $E_\lambda \cap E_\mu$ se partage donc en ouverts où $\theta_\lambda(X) - \theta_\mu(X)$ est constant (27.28) ; en d'autres termes, les ensembles $[\lambda, a, \mu]$ définis, pour tout a réel, par

$$X \in [\lambda, a, \mu] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X \in E_\lambda \cap E_\mu \\ \varphi_\lambda(X) - \varphi_\mu(X) = a \end{bmatrix}$$

sont des *ouverts ;* ils remplissent évidemment les conditions ♡ du théorème (10.16) [en notant $a.b$ la somme de deux nombres réels a et b] ; le théorème (10.17) s'applique donc ; on construit ainsi un *revêtement* E' de E, dont le *groupe principal* se déduit du groupe additif des nombres réels par un isomorphisme $\wedge$:

$$\widehat{a+b} = \hat{a}\,.\,\hat{b}$$



(1) Voir la définition (10.21).

et une fonction Θ, continue sur E', vérifiant

$$\Theta(\hat{a}(X)) = a + \Theta(X)$$

et telle que, si Π est la *projection* de E', U un *feuillet* de E', la fonction $\theta_U = \Theta[\Pi.1_U]^{-1}$ vérifie $\nabla\theta_U = \omega$ sur la projection de ce feuillet ; inversement, si une fonction θ_0 vérifie $\nabla\theta_0 = \omega$ dans un ouvert de E, l'ensemble des X de E' tels que $\Theta(X) = \theta_0(\Pi(X))$ est un *feuillet* U, et l'on a $\theta_0 = \theta_U$: les θ_U sont donc *toutes* les solutions de l'équation $\nabla\theta = \omega$; pour qu'il existe une solution de $\nabla\theta = \omega$ dans un ouvert Ω de E, il faut et il suffit que Ω soit *relevable* dans le revêtement E'.

On peut appliquer les différents résultats du § 10 ; on trouve ainsi (voir la définition (10.20)) :

(27.31) Si une 1-forme ω vérifie $\nabla\omega = 0$ dans un ouvert *simple* E, il existe un champ scalaire θ vérifiant $\nabla\theta = \omega$ dans E.

(27.32) — Indiquons brièvement les résultats de l'application du théorème (10.28) ; si E possède un revêtement universel, E' *se décompose en revêtements connexes disjoints ;* les nombres a tels que $\hat{a}$ conserve l'un d'entre eux forment un *groupe additif,* qui est un *quotient du groupe de Poincaré de* E, et qui s'appelle *groupe des périodes* de la forme ω.

— Dans un autre ordre d'idées, remarquons que la dérivation extérieure s'étend aux *formes non homogènes,* en posant

(27.33)
$$\nabla\omega = \nabla\omega_0 + \nabla\omega_1 + \ldots + \nabla\omega_{n-1}$$

les ω_p étant les composantes homogènes de ω [1].

Alors les formules (27.5, 14, 22, 23, 24) restent applicables ; indiquons que les formules (27.14) et (27.24) entraînent l'identité remarquable

(27.34)
$$[\nabla + \mathrm{Int}\,(\delta X)]^2\,\omega = \delta_L\omega$$

valable par exemple si ω est deux fois différentiable.

(1) $\nabla\omega_n$ est une $[n + 1]$-forme, donc identiquement nulle.

§ 28 Dérivation covariante

Toutes les variétés de ce paragraphe seront supposées différentiables C^2.

(28.1) Soient :

V une variété de dimension n ;

X un point variable de V ;

Φ une racine *canonique d'ordre* 1 de V ;

Z un point de la fibre Φ_X ;

[X → S] un champ différentiable de bases naturelles (voir (24.13)).

On sait que Z est représenté dans la base S par un élément ζ de la fibre-type Φ_0 (24.19), et que la correspondance entre ζ et Z, que nous noterons $\underline{S}$, est régulière ; si bien que l'on aura :

(28.2)
$$[Z = \underline{S}(\zeta)] \Leftrightarrow [\zeta = \underline{S}^{-1}(Z)] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{Il existe une carte F telle que} \\ F(0) = X \\ D(F)(0) = S \\ \Phi(F)(0)(\zeta) = Z \end{bmatrix}$$

Définition :

(28.3) Nous poserons, pour toute dérivation δ :

$$\overset{s}{\delta}Z = D(\underline{S})(\zeta)(\delta\zeta)$$

avec

$$Z = \underline{S}(\zeta)$$

le symbole $\overset{s}{\delta}$ s'appellera une *dérivation covariante.*

(28.4) — Cette notation suppose que X, S, Z sont des *variables liées ;* mais il n'est pas nécessaire que X soit la variable indépendante (voir ci-dessous (28.63)).

— Dans le cas où X est la variable indépendante, et où il existe donc un Φ-champ [X → Z], la variable $\zeta = \underline{S}^{-1}(Z)$ dépend de X ; on peut donc écrire $\overset{s}{\delta}Z = \left[D(\underline{S})(\zeta).\frac{\partial\zeta}{\partial X}\right](\delta X)$; donc :

(28.5) Nous noterons $\frac{\overset{s}{\partial}Z}{\partial X}$ l'opérateur linéaire tel que

◇
$$\overset{s}{\delta}Z = \frac{\overset{s}{\partial}Z}{\partial X}(\delta X)$$

quel que soit la dérivation δ.

$\frac{\overset{s}{\partial}Z}{\partial X}$ s'appelle *dérivée covariante* du champ [X → Z] (selon le champ X → S).

(28.6) — $\overset{s}{\delta}Z$ est un vecteur tangent à la fibre Φ_X au point Z ; c'est un élément de Φ_X si les fibres de Φ possèdent une *structure vectorielle invariante ;* dans ce cas l'opérateur $\underline{S}$ est linéaire (16.26), et la formule (28.3) peut s'écrire

(28.7)
$$\overset{s}{\delta}Z = \underline{S}(\delta[\underline{S}^{-1}(Z)])$$

(28.8) — En dehors de la structure de variété définie à priori sur V, on sait que V possède une structure de variété de *classe* C^2 (19.17), dont les cartes sont les difféomorphismes deux fois différentiables de R^n à V ; pour cette nouvelle structure, toutes les bases sont naturelles ; on pourra donc définir $\overset{s}{\delta}Z$ pour tout champ différentiable de bases [X → S], à la seule condition que Φ soit prolongeable à la nouvelle structure, ce qui est le cas notamment dans tous les cas envisagés dans le tableau ci-dessous.

	Nature de Z	Expression de $\overset{S}{\delta}Z$
(28.9)	Trivial, pseudoscalaire	$\overset{S}{\delta}Z = \delta Z$
(28.10)	Vecteur, base	$\overset{S}{\delta}Z = S.\delta[S^{-1}.Z]$
(28.11)	Covecteur, cobase ...	$\overset{S}{\delta}Z = \delta[Z.S].S^{-1}$
(28.12)	Affineur	$\overset{S}{\delta}Z = S.\delta[S^{-1}.Z.S].S^{-1}$
(28.13)	Densité	$\overset{S}{\delta}Z(\Sigma) = \lvert \det(S^{-1}.\Sigma)\rvert.\delta[Z(S)]$ pour toute base Σ.
(28.14)	Tenseur	$[\overset{S}{\delta}Z]^{j\ldots k}_{i\ldots m} = \delta[Z^{j\ldots k}_{i\ldots m}]$ si les composantes sont prises dans la base S.

On vérifie immédiatement les formules suivantes :

(28.15) Si $[X \to Z]$ est un *champ invariant*, $\overset{S}{\delta}Z = 0$.

Si F_X est un *homomorphisme de racine* (13.1), on a :

◇ $$\overset{S}{\delta}[F_X(Z)] = D(F_X)(Z)(\overset{S}{\delta}Z)$$

(28.16) soit

♣ $$\overset{S}{\delta}[F_X(Z)] = F_X(\overset{S}{\delta}Z)$$

si de plus F_X est linéaire.

(28.17) $\overset{S}{\delta}(Z + Z') = \overset{S}{\delta}Z + \overset{S}{\delta}Z'$; $\overset{S}{\delta}[uZ] = u\overset{S}{\delta}Z + \delta u\, Z$;

$\overset{S}{\delta}[Z^{-1}] = -Z^{-1}.\overset{S}{\delta}Z.Z^{-1}$ si Z est linéaire ;

$\delta[\mathrm{Tr}(Z)] = \mathrm{Tr}\,(\overset{S}{\delta}Z)$ si Z est un affineur ;

$\dfrac{\delta\,[\det(Z)]}{\det(Z)} = \mathrm{Tr}\,(Z^{-1}.\overset{S}{\delta}Z)$

(28.18) Si Y est un opérateur linéaire :

$$\overset{S}{\delta}[Y(Z)] = [\overset{S}{\delta}Y](Z) + Y(\overset{S}{\delta}Z)$$

Si Y est p fois linéaire :

(28.19)
$$\begin{aligned}\overset{S}{\delta}[Y(Z_1)(Z_2)\ldots(Z_p)] = {} & [\overset{S}{\delta}Y](Z_1)\ldots(Z_p)\\ & + Y(\overset{S}{\delta}Z_1)(Z_2)\ldots(Z_p)\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + Y(Z_1)\ldots(\overset{S}{\delta}Z_p)\end{aligned}$$

(28.20)
$$\overset{S}{\delta}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \ldots \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{S}{\delta}Z_1 \\ \overset{S}{\delta}Z_2 \\ \ldots \\ \overset{S}{\delta}Z_p \end{bmatrix}$$

(28.21) $\overset{S}{\delta}[T \otimes T'] = [\overset{S}{\delta}T] \otimes T' + T \otimes [\overset{S}{\delta}T']$ si T et T′ sont des tenseurs.

$\overset{S}{\delta}[T(T')] = [\overset{S}{\delta}T](T') + T(\overset{S}{\delta}T')$ si T et T′ sont des tenseurs (notations (25.79)).

(28.22) $\overset{S}{\delta}[A(T)] = A(\overset{S}{\delta}T)$ si A est une contraction (25.90).

(28.23) $\overset{S}{\delta}[\omega \wedge \omega'] = [\overset{S}{\delta}\omega] \wedge \omega' + \omega \wedge \overset{S}{\delta}\omega'$ si ω et ω' sont des formes.

— Soit A un glissement de V ; introduisons les variables

$$X^* = A(X)$$
$$Z^* = \Phi(A)(X)(Z)$$
$$S^* = D(A)(X).S$$

(notations de (28.1))

On vérifie immédiatement que $\underline{S}^* = \Phi(A)(X).\underline{S}$, d'où

$$\underline{S}^{*-1}(Z^*) = \underline{S}^{-1}(Z) = \zeta,$$

et par conséquent

$$\overset{S^*}{\delta} Z^* = D(\underline{S}^*)(\zeta)(\delta\zeta) = D(\Phi(A)(X))(\underline{S}(\zeta))(D(\underline{S})(\zeta)(\delta\zeta))$$

soit

(28.24) $$\overset{D(A)(X).S}{\delta}[\Phi(A)(X)(Z)] = D(\Phi(A)(X))(Z)(\overset{S}{\delta}Z)$$

Torsion.

Théorème, définition :

(28.25) (*a*) Soit $[X \to S]$ un *champ différentiable de bases*.

Il existe un champ $[X \to T]$ tel que

$$\diamondsuit \qquad \overset{S}{d}[\delta X] - \overset{S}{\delta}[dX] = [d, \delta]_L X + T(dX)(\delta X)$$

quels que soient les champs de vecteurs différentiables $[X \to dX]$, $[X \to \delta X]$.

(*b*) L'opérateur T, bilinéaire et antisymétrique, s'appelle *torsion* du champ $[X \to S]$.

(*c*) $$[T = 0] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pour tout } X_0 \text{ où S est défini, il existe une carte F} \\ \text{(pour la structure de classe } C^2 \text{ de V) telle que} \\ X_0 \in \mathrm{val}\,(F), \\ \qquad [X \in \mathrm{val}\,(F)] \Rightarrow [D(F^{-1})(X) = S^{-1}, \\ \qquad\qquad D(F)(F^{-1}(X)) = S] \end{array}\right]$$

1) Soit F une carte de V ; posons $x = F^{-1}(X)$, $S_0 = D(F)(x)$. On a évidemment (28.10) $\overset{S_0}{d}[\delta X] = S_0 d[S_0^{-1}.\delta X] = S_0\, d\delta x$, d'où

$$\clubsuit \qquad \overset{S_0}{d}[\delta X] - \overset{S_0}{\delta}[dX] = [d, \delta]_L X,$$

ce qui prouve l'implication (*c*) dans le sens $\Leftarrow$.

2) Soit M la matrice telle que $S = S_0.M$; (28.10) donne

$$\overset{S}{d}[\delta X] = \overset{S_0}{d}[\delta X] + \Gamma(dX)(\delta X)$$

avec $\Gamma(dX) = S.d[M^{-1}].S_0^{-1}$;

grâce à ♣, on a donc ◇, avec

$$T(dX)(\delta X) = \Gamma(dX)(\delta X) - \Gamma(\delta X)(dX) ;$$

il est clair que T est antisymétrique et bilinéaire.

3) Soit L un élément constant de $[R^n]^*$, c'est-à-dire une ligne de n nombres réels. Si d et δ commutent (21.33), on a d'après (28.10)

$$d[L.S^{-1}.\delta X] - \delta[L.S^{-1}.dX] = L.S^{-1}[\overset{S}{d}\delta X - \overset{S}{\delta} dX]$$

d'où, grâce à ◇, et puisque $[d, \delta]_L = 0$ (voir (27.7)) :

$$\nabla[L.S^{-1}](dX)(\delta X) = L.S^{-1}(T(dX)(\delta X)) \text{ (}^1\text{)}.$$

Si donc $T = 0$, la réciproque (27.27) du théorème de Poincaré montre qu'il existe dans tout *morceau* de V une application différentiable $[X \to {}^j x]$, à valeur réelles (0-forme), telle que

$$\nabla[{}^j x] = {}^j|.S^{-1}$$

d'où, en posant $x = |_j.{}^j x$, $\dfrac{\partial x}{\partial X} = S^{-1}$; l'application $A[X \to x]$ est deux fois différentiable puisque $\dfrac{\partial x}{\partial X}$ est différentiable ; $\dfrac{\partial x}{\partial X}$ étant régulier, A possède une restriction B, définie dans un voisinage ouvert de tout point X_0 du morceau, telle que B et D(B)(X) soient réguliers (th. (18.16)) ; $F = B^{-1}$ est deux fois différentiable (18.17), donc carte de V (pour la structure de classe C^2) ; on a $D(F)(x) = S$ (18.18).

C.Q.F.D.

(28.26) — Le lecteur pourra appliquer la théorie des revêtements à l'étude globale des champs de bases à torsion nulle, en adaptant (27.30), (27.31), (27.32).

---

(1) On peut aussi écrire

$$[\nabla S^{-1}](dX)(\delta X) = S^{-1}(T(dX)(\delta X))$$

si on définit judicieusement la dérivée extérieure d'une forme à valeurs dans R^n.

Connexions.

Théorème :

Soit Φ une racine d'ordre 1, telle que l'application $\binom{S}{Z} \to \underline{S}^{-1}(Z)$ soit différentiable (notation (28.2)).

Il existe alors en tout point X un opérateur linéaire Ψ, tel que

(28.27) $$\overset{S'}{\delta}Z - \overset{S}{\delta}Z \equiv \Psi(S'.\delta[S'^{-1}.S].S^{-1})(Z)$$

quels que soient la dérivation δ, et les champs différentiables [X → Z] (Φ-champ), [X → S] et [X → S'] (champs de bases naturelles).

— Posons $\Theta = \binom{S}{Z}$, $\zeta = \underline{S}^{-1}(Z)$; ȯ l'opérateur $F_X[\Theta \to \zeta]$ est un homomorphisme de racines, à valeurs dans une racine triviale ; en appliquant (28.9), (28.16), (28.20) il vient donc

$$\delta\zeta = \delta F_X(\theta) = \overset{S'}{\delta}[F_X(\theta)] = D(F_X)(\theta)(\overset{S'}{\delta}\theta) = D(F_X)(\theta)\begin{pmatrix}\overset{S'}{\delta}S\\ \overset{S'}{\delta}Z\end{pmatrix}$$

quel que soit le champ [X → S'].

En portant cette valeur de δζ dans la définition $\overset{S}{\delta}Z = D(\underline{S})(\zeta)(\delta\zeta)$, on voit qu'il existe en tout point X, deux opérateurs linéaires A et B tels que

◇ $$\overset{S}{\delta}Z = A\left(\overset{S'}{\delta}Z\right)\binom{S}{Z} + B\left(\overset{S'}{\delta}S\right)\binom{S}{Z} ;$$

on peut évidemment poser $B\left(\overset{S'}{\delta}S\right)\binom{S}{Z} \equiv -C\left(\overset{S'}{\delta}S.S^{-1}\right)\binom{S}{Z}$, C étant aussi linéaire.

— Si M désigne une matrice constante, ȯ on a $\underline{S.M} = \underline{S}\mathcal{R}(M)$, $\mathcal{R}$ étant la représentation (24.1) ; ȯ il en résulte que $\overset{SM}{\delta}Z = \overset{S}{\delta}Z$; ◇ peut donc s'écrire

$$\overset{S}{\delta}Z = A\left(\overset{S'}{\delta}Z\right)\binom{S.M}{Z} - C\left(\overset{S'}{\delta}S.S^{-1}\right)\binom{S.M}{Z}$$

soit, M étant arbitraire :

$$\overset{S}{\delta}Z = \Theta\left(\overset{S'}{\delta}Z\right)(Z) - \Psi\left(\overset{S'}{\delta}S.S^{-1}\right)(Z)$$

Θ et Ψ étant linéaires.

Si l'on fait S = S' dans cette formule, il vient

$$\overset{S'}{\delta}Z = \Theta\left(\overset{S'}{\delta}Z\right)(Z)$$

d'où

$$\overset{S}{\delta}Z = \overset{S'}{\delta}Z - \Psi\left(\overset{S'}{\delta}S.S^{-1}\right)(Z) ;$$

en calculant $\overset{S'}{\delta}S$ par la formule (28.10), on trouve (28.27).

C.Q.F.D.

(28.28) — L'hypothèse de différentiabilité de l'opérateur $\binom{S}{Z} \to \underline{S}^{-1}(Z)$ implique que l'on a donné une structure de variété différentiable à l'ensemble des bases *naturelles* ; cette structure est triviale si toutes les bases sont naturelles, ou encore si l'ensemble des bases naturelles est ouvert dans l'ensemble des bases.

Z

(28.29) — Si Φ est une racine à fibres vectorielles, ȯ Ψ est *bilinéaire*.

Exemple : on trouve grâce à (28.10) :

(28.30) $$\overset{S'}{\delta}Z - \overset{S}{\delta}Z = S'.\delta[S'^{-1}.S].S^{-1}.Z$$

si [X → Z] est un *champ de vecteurs*.

Définition, corollaire :

(*a*) Nous dirons que deux champs de bases [X → S], [X → S'] ont *même connexion* en un point X_0 si, en ce point

$$\overset{S'}{\delta}Z = \overset{S}{\delta}Z$$

(28.31) pour tout champ différentiable de vecteurs X → Z et toute dérivation δ.

(*b*) ǒ Il est pour cela nécessaire et suffisant que

$$\frac{\partial}{\partial X}[S'^{-1}.S] = 0 \quad \text{pour} \quad X = X_0.$$

(*c*) ǒ Si la racine Φ vérifie les conditions (28.27), et si $X \to Z$ est

(28.31) un Φ-champ différentiable, $\overset{S}{\delta}Z$ ne dépend du champ $X \to S$ que par sa connexion Γ au point X ; nous poserons

$$\overset{\Gamma}{\delta}Z = \overset{S}{\delta}Z \quad , \quad \frac{\overset{\Gamma}{\partial}Z}{\partial X} = \frac{\overset{S}{\partial}Z}{\partial X}$$

Une connexion au point X est donc une classe de champs de bases définis au voisinage de X.

(28.32) — Les formules (28.9) à (28.23) restent valables en écrivant $\overset{\Gamma}{\delta}$ au lieu de $\overset{S}{\delta}$; de même (28.25) nous permet d'écrire la définition :

Soit Γ une connexion au point X.

On appellera *torsion de* Γ l'opérateur T (bilinéaire et antisymé-

(28.33) trique) tel que

$$\overset{\Gamma}{d}[\delta X] - \overset{\Gamma}{\delta}[dX] = [d, \delta]_L X + T(dX)(\delta X).$$

— Une connexion sera dite *symétrique* si sa torsion est nulle.

Théorème :

Soient Γ' et Γ deux connexions au point X.

— Il existe un opérateur bilinéaire, noté $\Gamma' - \Gamma$, appelé *différence* des deux connexions, tel que

(28.34) ◇ $$\overset{\Gamma'}{d}[\delta X] - \overset{\Gamma}{d}[\delta X] = [\Gamma' - \Gamma](dX)(\delta X)$$

— Si $[X \to Z]$ est un Φ-champ (hypothèses et notations de (28.27)), on a

♣ $$\overset{\Gamma'}{d}Z - \overset{\Gamma}{d}Z = \Psi([\Gamma' - \Gamma](dX))(Z)$$

Soient en effet $[X \to S]$ et $[X \to S']$ deux champs de bases ayant Γ' et Γ comme connexions respectives au point X ; la formule (28.30) donne ◇, en posant

(28.35) $$[\Gamma' - \Gamma](dX) = S'.d[S'^{-1}.S].S^{-1} ;$$

il suffit de porter dans (28.27) pour trouver ♣.

C.Q.F.D.

On déduit immédiatement de (28.33) et (28.34) la formule :

Si T' et T sont les torsions des connexions Γ' et Γ au point X,

(28.36) on a

$$[\Gamma' - \Gamma](dX)(\delta X) - [\Gamma' - \Gamma](\delta X)(dX) = [T' - T](dX)(\delta X)$$

qui prouve notamment que

(28.37) La différence de deux connexions symétriques est un opérateur symétrique.

Théorème :

Soit F une carte ; posons $X = F(x)$; $S = D(F)(x)$; $\partial_j X = S_j$.

(28.38) Si Γ est une connexion *symétrique*, toute forme ω vérifie :

$$\nabla\omega = \operatorname{Ext}({}^j S^{-1})\overset{\Gamma}{\partial}_j\omega \qquad \text{(convention d'Einstein sur } j).$$

— En effet, si deux dérivations d et δ commutent, et si Γ est symétrique, on a, d'après (28.33), $\overset{\Gamma}{d}\delta X = \overset{\Gamma}{\delta}dX$; en appliquant la définition (27.6) de la dérivation extérieure, compte tenu de cette règle et de (28.19), il vient :

(28.39)
$$\begin{aligned}\nabla\omega(\delta X)(\delta_1 X)\ldots(\delta_p X) = {} & [\overset{\Gamma}{\delta}\omega](\delta_1 X)\ldots(\delta_p X)\\ & - [\overset{\Gamma}{\delta_1}\omega](\delta X)(\delta_2 X)\ldots(\delta_p X)\\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & - [\overset{\Gamma}{\delta_p}\omega](\delta_1 X)\ldots(\delta_{p-1} X)(\delta X)\end{aligned}$$

On voit d'autre part que, pour toute dérivation d

$$\overset{\Gamma}{d}\omega = \frac{\overset{\Gamma}{\partial}\omega}{\partial X}(dX) = \frac{\overset{\Gamma}{\partial}\omega}{\partial X}(S_j . {}^jS^{-1}\, dX) = {}^jS^{-1} . dX\, \overset{\Gamma}{\partial_j}\omega$$

en exprimant de la sorte $\overset{\Gamma}{\delta}\omega$, $\overset{\Gamma}{\delta_1}\omega$, ... $\overset{\Gamma}{\delta_p}\omega$ dans (28.39), on voit que le second membre est égal à Ext $({}^jS^{-1})(\overset{\Gamma}{\partial_j}\omega)(\delta X)(\delta_1 X) \dots (\delta_p X)$ (cf. (26.24)).

C.Q.F.D.

(28.40) — La formule (28.38) a été établie pour les p-formes ; mais on voit, par linéarité, qu'elle est vraie pour les formes non homogènes.

(28.41) — Le symbole $\overset{\Gamma}{\partial_j}$ est souvent noté ∇_j (en sous-entendant la connexion Γ dont il s'agit) ; *nous n'utiliserons pas cette notation.*

Z

Lemme :

(28.42) Soit X une variable qui parcourt R^n ; $S_0 = 1_{R^n}$; alors

$$\overset{S_0}{\delta} Z = \delta Z.$$

Il suffit de remplacer F par une translation de R^n dans (28.2) pour voir que $\underline{S}_0(Z) = Z$, et d'appliquer (28.3).

C.Q.F.D.

Règle :

(28.43) Soit Γ une connexion *en un point* X *de* R^n.

Nous conviendrons d'identifier Γ avec l'opérateur $\Gamma - \Gamma_0$, Γ_0 étant la connexion du champ $[X \to S_0 \equiv 1_{R^n}]$.

Cette identification est évidemment compatible avec la définition de l'égalité de deux connexions, et avec l'emploi de la notation $\Gamma' - \Gamma$ pour désigner la différence de deux connexions (de même qu'on peut identifier tout point M de l'espace classique avec le vecteur $\overrightarrow{OM} = M - 0$, 0 étant un point choisi comme origine).

Elle entraîne immédiatement (cf. (28.35)) la formule :

(28.44)
$$\Gamma(\delta X) = S\delta[S^{-1}] = -[\delta S] . S^{-1}$$

si Γ est la connexion du champ $[X \to S]$ en un point X de R^n.

Théorème :

(28.45) Il existe une *racine canonique d'ordre* 2, dont chaque fibre Ω_X est l'*ensemble des connexions en* X, qui est définie par la formule

$\diamondsuit$ $\Omega(A)(X)$ (connexion de $[X \to S]$ au point X)
$=$ connexion de $[A(X) \to D(A)(X).S]$ au point $A(X)$.

En effet, la formule (28.24), appliquée au cas $\Phi = D$, montre que le second membre de $\diamondsuit$ ne dépend du champ $[X \to S]$ que par sa connexion en X, donc que la définition $\diamondsuit$ de Ω est cohérente ; la vérification des axiomes (12.1) des racines est immédiate ; en appliquant (28.44), on trouve la formule

(28.46)
$$\Omega(A)(X)(\Gamma)(D(A)(X)(Y))(D(A)(X)(Z)) = D(A)(X)(\Gamma(Y)(Z)) - D^2(A)(X)(Y)(Z)$$

[A : *changeur de carte* ; X $\in$ def (A) ; Y, Z $\in R^n$], qui montre que

$$\Omega(A)(X)(\Gamma) = \Gamma \text{ si } D(A)(X) = 1_{R^n},\ D^2(A)(X) = 0,$$

en particulier donc si A est une translation ou si $A \in N_2$ (définition (19.26)) ; Ω est donc une racine canonique (19.22) d'ordre 2 (19.27).

C.Q.F.D.

(28.47) — La fibre-type de la racine des connexions est un espace vectoriel d'opérateurs linéaires ; mais *cette structure vectorielle n'est pas invariante ;* la formule (28.46) montre en effet que $\Omega(A)(X)(0)$ n'est pas nul dès que $D^2(A)(X)(0) \neq 0$. On voit par contre que la *structure affine* de cette fibre est invariante ; ce qui résulte aussi de la formule

Z

(28.48)
$$\Omega(A)(X)(\Gamma') - \Omega(A)(X)(\Gamma) = \mathrm{Im}\,(A)(X)(\Gamma' - \Gamma)$$

Im étant la racine des tenseurs (1) de variance $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$;

(1) On rappelle que la convention (25.79) identifie l'opérateur $\Gamma' - \Gamma$ avec le tenseur θ tel que $\theta(C)(Y)(Z) = C([\Gamma' - \Gamma](Y)(Z))$.

on dit parfois que « la différence de deux connexions a la variance d'un tenseur ».

Théorème :

(28.49) [torsion de Γ en $X = T$] $\Rightarrow$

$$[\text{torsion de } \Omega(A)(X)(\Gamma) \text{ en } A(X) = \mathrm{Im}(A)(X)(T)]$$

Ces deux derniers théorèmes se déduisent de la formule

(28.50)
$$\overset{\Omega(A)(X)(\Gamma)}{\delta}[\Phi(A)(X)(Z)] = D(\Phi(A)(X))(Z)(\overset{\Gamma}{\delta}Z)$$

elle-même transcription de (28.24).

— (28.49) possède le corollaire évident :

(28.51) La racine des connexions possède la *sous-racine* des connexions *symétriques*.

Définition, théorème :

— On appellera *connexion d'une carte* F au point $X = F(x)$ la connexion du champ de bases $[X \to D(F)(x)]$; c'est une connexion symétrique.

(28.52) — Une connexion en un point X sera dite *naturelle* si elle coïncide avec la connexion d'une carte en ce point.

— Les connexions naturelles forment une *sous-racine irréductible* de la racine des connexions symétriques.

La symétrie d'une connexion naturelle résulte de (28.25 *c*) ; on constate que les connexions naturelles constituent la sous-racine engendrée par la connexion Γ_0 (28.43), qui est donc irréductible (th. (16.7)).

C.Q.F.D.

Théorème :

δ Soit Γ une connexion au point X.

(*a*) Il existe une connexion symétrique Γ', et une seule, telle que $\Gamma - \Gamma'$ soit antisymétrique. Γ' s'appelle connexion *symétrisée* de Γ.

(28.53) (*b*) $\Gamma - \Gamma'$ est égal à $\frac{T}{2}$, T étant la torsion de Γ.

(*c*) Soient Ω la racine des connexions ; Ω_{sym} la racine des connexions symétriques (28.51) ; Θ la racine des opérateurs bilinéaires antisymétriques sur D_X, à valeurs dans D_X.

Alors l'opérateur F_X $\Gamma \to \begin{bmatrix} \Gamma' \\ T \end{bmatrix}$ est un *isomorphisme* de la racine Ω à la racine produit direct de Ω_{sym} par Θ.

Symboles de Christoffel.

(28.54) Soit F une carte ; $X = F(x)$ un point de val (F) ; S la base naturelle $D(F)(x)$; Γ une connexion au point X.

Γ est repérée dans la carte par l'image réciproque $\gamma = \Omega(F^{-1})(X)(\Gamma)$; γ est une connexion au point x, donc un opérateur *bilinéaire* sur R^n, à valeurs dans R^n.

On appelle *symboles de Christoffel* de la connexion Γ les nombres

$\diamond$
$$\Gamma^j_{kl} = {}^j[\gamma(|_k)(|_l)$$

Des résultats précédents, on déduit les règles suivantes :

— Si Γ est la connexion du champ $[X \to S']$ au point X, on a

(28.55)
$$\Gamma^j_{kl} = {}^jS^{-1}.S'.\partial_k[S'^{-1}.S_l] = -\partial_k[{}^jS^{-1}.S'].S'^{-1}.S_l$$

S désignant la base définie en (28.54).

◊ Il en résulte que *des nombres Γ^j_k sont toujours les symboles de Christoffel d'une connexion.*

On a

$$\overset{\Gamma}{dS} = [\Gamma - \Gamma_F](dX).S = S.\gamma(dx)$$

(28.56) si Γ_F est la connexion de la carte F au point X ;

les Γ^j_{kl} sont donc les composantes du tenseur $\Gamma - \Gamma_F$ dans la base S.

Soit T la torsion d'une connexion Γ. Les composantes de T dans la base S sont

(28.57)
$$T^j_{kl} = \Gamma^j_{kl} - \Gamma^j_{lk}$$

pour que Γ soit symétrique, il est donc nécessaire et suffisant que $\Gamma^j_{kl} = \Gamma^j_{lk}$.

(28.58) Si Γ' et Γ sont deux connexions au point X, les composantes du tenseur $\Gamma' - \Gamma$ dans la base S sont

$$[\Gamma' - \Gamma]^j_{kl} = \Gamma'^j_{kl} - \Gamma^j_{kl}$$

On peut utiliser les symboles de Christoffel pour calculer les dérivées covariantes des champs tensoriels :

(28.59)

Nature de Z	Composantes de $\overset{\Gamma}{\partial}_j Z$ dans la base S (28.54)
Vecteur	$[\overset{\Gamma}{\partial}_j Z]^k = \partial_j[Z^k] + \Gamma^k_{jk'} Z^{k'}$
Covecteur	$[\overset{\Gamma}{\partial}_j Z]_k = \partial_j[Z_k] - \Gamma^{k'}_{jk} Z_{k'}$
Tenseur	$[\overset{\Gamma}{\partial}_j Z]^{k\ldots l}_{m\ldots n} = \partial_j[Z^{k\ldots l}_{m\ldots n}] + \Gamma^k_{jk'}.Z^{k'\ldots l}_{m\ldots n} + \ldots + \Gamma^l_{jl'}.Z^{k\ldots l'}_{m\ldots n} - \Gamma^{m'}_{jm} Z^{k\ldots l}_{m'\ldots n} - \ldots - \Gamma^{n'}_{jn} Z^{k\ldots l}_{m\ldots n'}$

Si la *densité* Z est représentée dans la carte F par le nombre z,

(28.60) la densité $\overset{\Gamma}{\partial}_j Z$ est représentée par le nombre

$$\partial_j z - \Gamma^k_{jk}.$$

Champs de Connexions.

(28.61) Soit V une variété différentiable C^2 (resp. C^p, $p > 2$).

La formule (28.46) montre que, pour tout changeur de carte A, l'opérateur $\left[\binom{X}{\Gamma} \mapsto \Omega(A)(X)(\Gamma)\right]$ est *continu* (resp. $[p\text{-}2]$ fois différentiable) ; la racine des connexions Ω est donc continue (resp. $[p\text{-}2]$ fois différentiable) (20.30, 37).

Nous savons donc définir la famille des champs continus (resp. $[p\text{-}2]$ fois différentiable) de connexions ; c'est une famille invariante (20.35).

L'existence de champs globaux dans cette famille résulte d'un théorème que nous démontrerons ultérieurement (30.15).

— La dérivée de Lie d'une connexion Γ pour un glissement infinitésimal δ est un *tenseur* $\delta_L \Gamma$, dont on peut calculer les composantes dans une carte en appliquant directement la définition (23.6) à la formule (28.46) ; il vient :

(28.62)
$$\begin{aligned}[\delta_L \Gamma]^j_{kl} = \delta[\Gamma^j_{kl}] & \\ & - \partial_r[\delta x^j]\Gamma^r_{kl} + \partial_k[\delta x^r]\Gamma^j_{rl} + \partial_l[\delta x^r]\Gamma^j_{kr} \\ & + \partial_k \partial_l[\delta x^j].\end{aligned}$$

Géodésiques.

(28.63) Soit $[X \mapsto \Gamma]$ un champ continu de connexions, défini sur un ouvert E d'une variété V ; soit $[s \mapsto X]$ une application deux fois différentiable d'un ouvert de R dans V, définissant une *courbe tracée sur* V.

Appelons *vitesse* le vecteur $\mathrm{U} = \dfrac{d\mathrm{X}}{ds}$, *accélération géodésique* le vecteur $\dfrac{\overset{\Gamma}{d}\mathrm{U}}{ds}$; en utilisant une carte (notations (28.54)) on trouve immédiatement

(28.64) $$\mathrm{U} = \mathrm{S}.\frac{dx}{ds} \qquad \frac{\overset{\Gamma}{d}\mathrm{U}}{ds} = \mathrm{S}\left[\frac{d^2x}{ds^2} + \gamma\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]$$

ou, si l'on préfère

(28.65) $$\left[\frac{\overset{\Gamma}{d}\mathrm{U}}{ds}\right]^j = \frac{d^2x^j}{ds^2} + \Gamma^j_{kl}.\frac{dx^k}{ds}.\frac{dx^l}{ds}$$

(28.66) — On appellera *géodésique* du champ de connexion $[\mathrm{X} \to \Gamma]$ toute application $[s \to \mathrm{X}]$ dont l'accélération géodésique est nulle.

D'après (28.64), les géodésiques sont définies par le système

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -\gamma(u)(u) \end{pmatrix}$$

γ dépendant de x ; c'est une équation différentielle du type standard (22.2) sur l'espace fibré différentiable V^{D} des vecteurs tangents à V.

— Les géodésiques du champ $[\mathrm{X} \to \Gamma]$ sont les mêmes que celles du champ $[\mathrm{X} \to \Gamma']$, Γ' étant la connexion *symétrisée* de Γ (28.53) ; ceci résulte de (28.65) et de la formule

(28.67) $$\Gamma'^j_{kl} = \frac{1}{2}[\Gamma^j_{kl} + \Gamma^j_{lk}]$$

(28.68) — Pour qu'une application $[\sigma \to \mathrm{X}]$ devienne géodésique par changement de paramètre $[s \to \sigma]$, il faut et il suffit qu'il existe pour tout σ un nombre λ tel que $\dfrac{\overset{\Gamma}{d}}{d\sigma}\left[\dfrac{d\mathrm{X}}{d\sigma}\right] = \lambda\dfrac{d\mathrm{X}}{d\sigma}$; le paramètre s est une solution de l'équation différentielle à variables séparées $\dfrac{s''}{s'} = \lambda$.

Courbure.

Théorème:

Soit $[\mathrm{X} \to \Gamma]$ un champ différentiable de connexions, défini sur un ouvert E d'une variété C^3.

(*a*) Il existe en tout point X de E un opérateur tri-linéaire R, appelé *courbure du champ de connexions au point* X, défini par

(28.69) $$\diamond \qquad \overset{\Gamma}{d}[\overset{\Gamma}{\delta}\mathrm{U}] - \overset{\Gamma}{\delta}[\overset{\Gamma}{d}\mathrm{U}] = [d, \overset{\Gamma}{\delta}]_{\mathrm{L}}\mathrm{U} + \mathrm{R}(d\mathrm{X})(\delta\mathrm{X})(\mathrm{U})$$

quels que soient les champs de vecteurs différentiables $[\mathrm{X} \to d\mathrm{X}]$, $[\mathrm{X} \to \delta\mathrm{X}]$, $[\mathrm{X} \to \mathrm{U}]$.

(*b*)

$$\Big[\mathrm{R} = 0\Big] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{pour tout } \mathrm{X}_0 \text{ de E, il existe un } \textit{champ de base } f, \\ \text{différentiable, tel que } \mathrm{X}_0 \in \mathrm{def}\,(f), \text{ et que} \\ \quad [\mathrm{X} \in \mathrm{def}\,(f)] \Rightarrow [\Gamma = \text{connexion de } f \text{ au point X}]\end{array}\right]$$

1) Utilisons une carte F (notations (28.54)) ; en posant $\mathrm{U} = \mathrm{S}.u$, on trouve grâce à (28.59) $\overset{\Gamma}{\delta}\mathrm{U} = \mathrm{S}[\delta u + \gamma(\delta x)(u)]$; en calculant par cette formule $\overset{\Gamma\Gamma}{d\delta}\mathrm{U} - \overset{\Gamma\Gamma}{\delta d}\mathrm{U}$, et en remarquant (21.29 $\diamond$) que

$$[d, \overset{\Gamma}{\delta}]_{\mathrm{L}}\mathrm{U} = \mathrm{S}[d\delta u - \delta du + \gamma(d\delta x - \delta dx)(u)]$$

on trouve la formule (*a*), avec

(28.70) $$\mathrm{R}(d\mathrm{X})(\delta\mathrm{X})(\mathrm{U}) \\ = \mathrm{S}.[d\gamma(\delta x) - \delta\gamma(dx) + \gamma(dx).\gamma(\delta x) - \gamma(\delta x).\gamma(dx)].\mathrm{S}^{-1}.\mathrm{U}$$

2) Si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}'$ est un champ deux fois différentiable de bases. la formule $\overset{\mathrm{S'S'}}{d\,\delta}\,\mathrm{U} = \mathrm{S}'.d\delta[\mathrm{S}'^{-1}\,\mathrm{U}]$ donne immédiatement l'implication (*b*), dans le sens $\Leftarrow$; dans le cas où S' et sa connexion sont différentiables, δ S' est deux fois différentiable.

3) Soit F une carte telle que $F(0) = X_0$; prenons les notations (28.54), et définissons dans l'espace vectoriel des couples $\begin{pmatrix} x \\ M \end{pmatrix}$ ($x \in R^n$, M = matrice carrée d'ordre n) les dérivations d_j en posant

$$d_j \begin{pmatrix} x \\ M \end{pmatrix} = \varphi_j \left(\begin{pmatrix} x \\ M \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} |_j \\ -\gamma(|_j).M \end{pmatrix}$$

On trouve immédiatement

$$d_j d_k \begin{pmatrix} x \\ M \end{pmatrix} - d_k d_j \begin{pmatrix} x \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ [-\partial_j \gamma(|_k) + \partial_k \gamma(|_j) + \gamma(|_k).\gamma(|_j) - \gamma(|_j).\gamma(|_k)].M \end{pmatrix};$$

si $R \equiv 0$, (28.70) montre que les d_j commutent deux à deux ; le théorème (22.31) montre qu'il existe alors un voisinage K de l'origine dans R^n tel que $[\xi \in K] \Rightarrow [e^{\xi^j \varphi_j}$ commute avec $e^{\xi^k \varphi_k}]$; si l'on pose

$$\Phi(\xi) = e^{\xi^1 \varphi_1}.e^{\xi^2 \varphi_2} \ldots e^{\xi^n \varphi_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{R^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ M \end{pmatrix},$$

on a donc

$$\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi^j} = \varphi_j(\Phi(\xi)) = \begin{pmatrix} |_j \\ -\gamma(|_j).M \end{pmatrix}$$

par suite $\xi \equiv x$, $\partial_j M \underset{\Gamma}{=} -\gamma(|_j) \underset{\Gamma}{.} M$; $S' = S.M$ est une base (pour x assez voisin de 0) qui $\underset{\Gamma}{\text{vérifie}}$ $\partial_j S' = [\partial_j S.M + S.\partial_j M] \underset{S'}{=} 0$, d'où, pour tout vecteur $U = S'u$, $\partial_j U = S'.\partial_j u = S'.\partial_j[S'^{-1}.U] = \partial_j U$, ce qui montre que le champ $f : [X \to S']$ vérifie (b).

C.Q.F.D.

(28.71) — Soit Γ une connexion à courbure nulle définie sur un ouvert E.

Nous venons de montrer qu'on peut trouver des champs différentiables de bases f_λ, tels $\bigcup_\lambda \operatorname{def}(f_\lambda) = E$, $[X \in \operatorname{def}(f_\lambda)] \Rightarrow [\overset{S_\lambda}{\delta} Z = \overset{\Gamma}{\delta} Z]$ (en posant $S_\lambda \equiv f_\lambda(X)$).

Si $X \in \operatorname{def}(f_\lambda) \cap \operatorname{def}(f_\mu)$, il existe une matrice constante M telle que $S_\mu \equiv S_\lambda.M$ dans un voisinage de X (th. (28.31)) ; les ensembles $[\lambda, M, \mu]$, définis par

$$[X \in [\lambda, M, \mu]] \Leftrightarrow [f_\mu(X) = f_\lambda(X).M]$$

sont donc des ouverts ; ♁ ils vérifient les égalités (10.16 ♡) ; ils définissent donc un *revêtement* de E, ayant un groupe principal isomorphe au groupe linéaire d'ordre n (th. (10.17)).

Si E possède un revêtement universel (donc si E est connexe), le revêtement ainsi construit se décompose en composantes connexes, ayant pour groupe principal une *représentation linéaire d'ordre n du groupe de Poincaré de* E, appelé *groupe d'holonomie* de la connexion (th. (10.28)) ; si ce groupe est trivial, en particulier si E est *simplement connexe*, il existe un champ global $[X \to S]$ admettant Γ comme connexion en tout point.

(28.72) — Dans le cas où la connexion Γ a simultanément une *courbure* et une *torsion* nulles sur E, les théorèmes (28.69) et (28.25) montrent qu'il existe des cartes F_j (pour la structure de classe C^2 de E), ayant Γ comme connexion (28.52), et dont les ensembles de valeurs recouvrent E ; ♁ les changeurs de cartes $F_j^{-1}.F_k$ appartiennent localement au groupe affine de R^n (19.4). E possède donc une structure de *variété affine* (19.12).

— Si $[X \to C]$ est un champ deux fois différentiable de *covecteurs*, on a :

(28.73)
$$\overset{\Gamma\Gamma}{d}[\delta C] - \overset{\Gamma\Gamma}{\delta}[dC] = [d, \overset{\Gamma}{\delta}]_L C - C.R(dX)(\delta X)$$

des formules analogues peuvent s'établir pour les champs de tenseurs.

(28.74) — L'opérateur R est associé par l'algorithme (25.79) à un tenseur de variance $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, appelé *tenseur de Riemann-Christoffel*, ou *tenseur de courbure*.

En prenant une carte (notations de (28.54)), on obtient les composantes de ce tenseur dans la base S, soit

(28.75)
$$R^j_{kl,m} = {}^jS^{-1}.R(S_k)(S_l)(S_m)$$

au moyen de la formule (28.70), il vient [1] :

(28.76) $$\boxed{R^j_{kl,m} = \partial_k \Gamma^j_{lm} - \partial_l \Gamma^j_{km} + \Gamma^j_{kr} \cdot \Gamma^r_{lm} - \Gamma^j_{lr}\Gamma^r_{km}}$$

— Il est clair que

(28.77) $$[R(dX)(\delta X) + R(\delta X)(dX)](U) = 0$$

ce qui s'écrit aussi

(28.78) $$R^j_{kl,m} + R^j_{lk,m} \equiv 0$$

— Soient d_1, d_2, d_3 trois dérivations qui commutent deux à deux (par exemple ∂_j, ∂_k, ∂_l).

Considérons la quantité

$$\diamondsuit \quad \overset{\Gamma}{d_1}[\overset{\Gamma}{d_2}\overset{\Gamma}{d_3}U - \overset{\Gamma}{d_3}\overset{\Gamma}{d_1}U] + \overset{\Gamma}{d_2}[\overset{\Gamma}{d_3}\overset{\Gamma}{d_1}U - \overset{\Gamma}{d_1}\overset{\Gamma}{d_3}U] + \overset{\Gamma}{d_3}[\overset{\Gamma}{d_1}\overset{\Gamma}{d_2}U - \overset{\Gamma}{d_2}\overset{\Gamma}{d_1}U]$$
$$\clubsuit \equiv [\overset{\Gamma}{d_1}\overset{\Gamma}{d_2} - \overset{\Gamma}{d_2}\overset{\Gamma}{d_1}][\overset{\Gamma}{d_3}U] + [\overset{\Gamma}{d_2}\overset{\Gamma}{d_3} - \overset{\Gamma}{d_3}\overset{\Gamma}{d_2}][\overset{\Gamma}{d_1}U] + [\overset{\Gamma}{d_3}\overset{\Gamma}{d_1} - \overset{\Gamma}{d_1}\overset{\Gamma}{d_3}][\overset{\Gamma}{d_2}U]$$

en développant les deux expressions $\diamondsuit$ et $\clubsuit$ au moyen de la formule (28.69 $\diamondsuit$), on trouve une identité, dite *identité de Bianchi*, qui s'écrit

(28.79) $$[\overset{\Gamma}{d_1}R](d_2X)(d_3X) + [\overset{\Gamma}{d_2}R](d_3X)(d_1X) + [\overset{\Gamma}{d_3}R](d_1X)(d_2X) = 0$$

si la connexion est symétrique ;

elle peut aussi s'écrire

(28.80) $$[\overset{\Gamma}{\partial_j}R]^{\rho}_{kl,q} + [\overset{\Gamma}{\partial_k}R]^{\rho}_{lj,q} + [\overset{\Gamma}{\partial_l}R]^{\rho}_{jk,q} = 0$$

— Par une méthode analogue, on trouve l'identité

(28.81) $$R^{\rho}_{jk,l} + R^{\rho}_{kl,j} + R^{\rho}_{lj,k} = 0$$

valable si la connexion est symétrique.

[1] L'usage de mettre une virgule après les deux premiers indices est à rapprocher de la formule (28.78).

— Le tenseur de Riemann-Christoffel permet de construire d'autres tenseurs par *contraction ;* on obtient ainsi la 2-forme ω, de composantes

(28.82) $$\omega_{kl} = R^j_{kl,j} = \partial_k \Gamma^j_{lj} - \partial_l \Gamma^j_{kj}$$

qui vérifie visiblement

(28.83) $$\nabla\omega = 0$$

et, localement, grâce à (28.60) :

(28.84) $$[\omega = 0] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\text{il existe une densité positive } \rho \\ \text{telle que } \dfrac{\overset{\Gamma}{\partial}\rho}{\partial X} = 0\end{array}\right]$$

Le *tenseur de Ricci*, dont les composantes sont par définition

(28.85) $$R_{lm} = R^j_{jl,m} = \partial_j \Gamma^j_{lm} - \partial_l \Gamma^j_{jm} + \Gamma^j_{jr}\Gamma^r_{lm} - \Gamma^j_{lr}\Gamma^r_{jm}$$

En multipliant par $^j|_\rho$ le premier membre de (28.81), on en tire :

(28.86) $$R_{kl} - R_{lk} + \omega_{kl} = 0 \quad \text{si la connexion est symétrique ;}$$

(28.87) on voit donc que le tenseur de Ricci est symétrique si la connexion est symétrique et s'il existe une densité positive de dérivée covariante nulle.

§ 29 Espaces euclidiens (paragraphe de résultats)[1]

Définition :

(29.1) On appellera *espace euclidien* un espace vectoriel réel E de dimension finie, sur lequel on aura défini un tenseur covariant d'ordre 2, noté g_E, tel que

$$\begin{cases} g_E \text{ est régulier : } [g_E(U) = 0] \Rightarrow [U = 0] \\ g_E \text{ est symétrique : } g_E(U)(V) \equiv g_E(V)(U). \end{cases}$$

Le nombre $g_E(U)(V)$ s'appellera *produit scalaire* des vecteurs U et V.

[1] Le lecteur trouvera les démonstrations dans SOURIAU, « Calcul Linéaire », tome II (Presses Univ. de France).

(29.2) — Soit n la dimension de E ; g_E est une application régulière de E dans le dual E* ; comme la dimension de E* est aussi égale à n, val $(g) = E^*$; g_E^{-1} est une application régulière de E* sur E.

Théorème :

Soit A un opérateur linéaire, appliquant un espace euclidien E dans un espace euclidien E′.

— Nous appellerons *transposé* de A [1], et nous noterons $\overline{A}$, l'opérateur linéaire appliquant E′ dans E, défini par

(*a*) $$g_{E'}(A(U))(V) \equiv g_E(U)(\overline{A}(V))$$

pour tout $U \in E$, tout $V \in E'$.

— La transposition vérifie les règles suivantes :

(29.3)

(*b*) $$\overline{A + B} \equiv \overline{A} + \overline{B}$$

(*c*) $$\overline{sA} \equiv s\overline{A} \quad \text{pour } s \text{ réel}$$

(*d*) $$\overline{A.B} \equiv \overline{B}.\overline{A}$$

(*e*) $$\overline{1_E} \equiv 1_E$$

(*f*) $$\overline{\overline{A}} \equiv A$$

(*g*) $$\text{rang}\,(\overline{A}) \equiv \text{rang}\,(A)$$

(*h*) Si E et E′ ont même dimension :

$$[A \text{ régulier}] \Leftrightarrow [\overline{A} \text{ régulier}] \Rightarrow [\overline{A^{-1}} \equiv [\overline{A}]^{-1}]$$

— Nous conviendrons de donner à R une structure euclidienne, en posant

(29.4) $$g_R = 1_R$$

ce qui peut s'écrire (cf. (17.7)) :

(29.5) $$g_R(x)(y) = xy \quad \text{si} \quad x, y \in R$$

[1] Cet opérateur coïncide avec l'opérateur A* (25.80) si l'on fait l'identification (29.11).

L'identification des vecteurs d'un espace euclidien E avec des applications linéaires de R dans E (17.6) nous donne alors les formules

(29.6) $$\overline{V} = g_E(V) \quad \text{si} \quad V \in E$$
$$\overline{C} = g_E^{-1}(C) \quad \text{si} \quad C \in E^*$$

soit, en particulier,

(29.7) $$\bar{x} = x \quad \text{si} \quad x \text{ est réel.}$$

(29.6) nous donne une nouvelle notation pour le produit scalaire de deux vecteurs, soit

(29.8) $$g_E(U)(V) \equiv \overline{U}.V$$

— la symétrie du produit scalaire, écrit sous cette forme, résulte des règles de la transposition :

$$\begin{aligned} \overline{U}.V &\equiv \overline{\overline{\overline{U}.V}} && (29.7) \\ &\equiv \overline{V}.\overline{\overline{U}} && (29.3\ d) \\ &\equiv \overline{V}.U && (29.3\ f). \end{aligned}$$

Changement de variance des tenseurs.

— Soit T un tenseur covariant d'ordre p sur l'espace euclidien E. On peut évidemment associer à T les tenseurs T′, T″, . . ., de variances respectives $\begin{bmatrix} 1 \\ p-1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ p-2 \end{bmatrix}$, . . ., définis par

(29.9)
$$T'(C)(U_1) \ldots (U_{p-1}) \equiv T(\overline{C})(U_1) \ldots (U_{p-1})$$
$$T''(C_1)(C_2)(U_1) \ldots (U_{p-2}) \equiv T(\overline{C_1})(\overline{C_2})(U_1) \ldots (U_{p-2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C, C_1, C_2 \ldots \in E^* ; U_1, \ldots U_{p-1} \in E$$

On passe inversement de T′, T″, ... à T par les formules

(29.10)
$$\begin{aligned} &\mathrm{T}(\mathrm{U}_1)\ldots(\mathrm{U}_p) \equiv \\ &\mathrm{T}'(\overline{\mathrm{U}_1})(\mathrm{U}_2)\ldots(\mathrm{U}_p) \equiv \\ &\mathrm{T}''(\overline{\mathrm{U}_1})(\overline{\mathrm{U}_2})(\mathrm{U}_3)\ldots(\mathrm{U}_p) \equiv \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(29.11) — Il est d'usage d'identifier les divers tenseurs T, T′, T″, ..., ou, comme on dit, d'utiliser la structure euclidienne pour « *changer la variance des tenseurs* ».

— Ceci s'applique en particulier au tenseur g lui-même (nous omettrons ici d'écrire g_{E}) ; en utilisant une base S, on trouve

(29.12)
$$\begin{aligned} &g_{jk} \equiv g_{kj} = g(\mathrm{S}_j)(\mathrm{S}_k) = \overline{\mathrm{S}_j}.\mathrm{S}_k \\ &g^j_k = {}^j|_k \\ &g^{jk} = g^{kj} \equiv {}^j\mathrm{S}^{-1}.g^{-1}({}^k\mathrm{S}^{-1}) = {}^j\mathrm{S}^{-1}.\overline{{}^k\mathrm{S}^{-1}} \end{aligned}$$

on voit notamment que le tenseur contravariant de composantes g^{jk} coïncide avec le tenseur $\widetilde{g^{-1}}$ (notations (25.78)).

— Les formules (29.9), (29.10), s'écrivent à l'aide d'une base :

(29.13)
$$\begin{aligned} &\mathrm{T}^j_{kl\ldots m} = g^{jj'}\mathrm{T}_{j'kl\ldots m}\,;\quad \mathrm{T}^{jk}_{l\ldots m} = g^{jj'}g^{kk'}\mathrm{T}_{j'k'l\ldots m}\,;\quad \ldots \\ &\mathrm{T}_{jkl\ldots m} = g_{jj'}\mathrm{T}^{j'}_{kl\ldots m} = g_{jj'}g_{kk'}\mathrm{T}^{j'k'}_{l\ldots m} = \ldots \end{aligned}$$

On a donc en particulier

(29.14)
$$g^{jl}g_{kl} = {}^j|_k\,;$$

(29.15) si C est un covecteur, les nombres C_j et C^j ($= g^{jk}\mathrm{C}_k$) s'appellent respectivement *composantes covariantes* et *composantes contravariantes* du covecteur C (ou du vecteur $\overline{\mathrm{C}}$).

Transposition des matrices.

Règle :

Soit $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \ldots \times \mathrm{E}_p$ un *produit direct d'espaces euclidiens*.

Nous donnerons à E une *structure euclidienne* en posant

(29.16)
$$g_{\mathrm{E}}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{X}^1 \\ \ldots \\ \mathrm{X}^p \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} \mathrm{Y}^1 \\ \ldots \\ \mathrm{Y}^p \end{bmatrix}\right) = g_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{X}^1)(\mathrm{Y}^1) + \ldots + g_{\mathrm{E}_p}(\mathrm{X}^p)(\mathrm{Y}^p)$$

$$(\mathrm{X}^j,\ \mathrm{Y}^j \in \mathrm{E}_j)$$

Théorème :

Grâce à la convention (29.16), on a

$$\overline{|_j} = {}^j|\ ;\ \overline{{}^j|} = |_j\ ;$$

les transposées d'une colonne, d'une ligne, d'une matrice sont données par les règles :

(29.17)
$$\overline{\begin{bmatrix} {}^1\mathrm{A} \\ {}^2\mathrm{A} \\ \ldots \\ {}^n\mathrm{A} \end{bmatrix}} = [\overline{{}^1\mathrm{A}}\ \overline{{}^2\mathrm{A}} \ldots \overline{{}^n\mathrm{A}}]\,;\ \overline{[\mathrm{A}_1\,\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_n]} = \begin{bmatrix} \overline{\mathrm{A}_1} \\ \overline{\mathrm{A}_2} \\ \ldots \\ \overline{\mathrm{A}_n} \end{bmatrix}\,;$$

$$\overline{\begin{bmatrix} {}^1\mathrm{A}_1 & \ldots & {}^1\mathrm{A}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ {}^{n'}\mathrm{A}_1 & \ldots & {}^{n'}\mathrm{A}_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \overline{{}^1\mathrm{A}_1} & \ldots & \overline{{}^{n'}\mathrm{A}_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{{}^1\mathrm{A}_n} & \ldots & \overline{{}^{n'}\mathrm{A}_n} \end{bmatrix}$$

(29.18) — Ces règles s'appliquent en particulier à l'espace euclidien R^n ((29.5), (29.16)) et aux matrices de nombres ; compte tenu de (29.7), on voit que la transposition d'une matrice réelle coïncide avec l'opération appelée parfois *symétrie*, ou *échange des lignes et des colonnes*.

Définition :

Soit S une base d'un espace euclidien.

On appelle *matrice de Gram* de S la matrice $\overline{S}.S$.

Si on pose $G = \overline{S}.S$, on a :

(29.19)
$$G = \overline{G} = \overline{S}.S\,;\; G^{-1} = \overline{G^{-1}} = S^{-1}.\overline{S}^{-1}\,;$$
$$\overline{S} = G.S^{-1}\,;\; \overline{S}^{-1} = \overline{S^{-1}} = S.G^{-1}\,;$$
$$S = \overline{S}^{-1}.G\,;\; S^{-1} = G^{-1}.\overline{S}\,;$$
$$g_{jk} = {}^{j}G_{k}\,;\; g^{jk} = {}^{j}[G^{-1}]_{k}$$

Orthogonalité.

Soit E un espace euclidien de dimension n.

(*a*) Deux vecteurs U et V de E sont dit *orthogonaux* si leur produit scalaire $\overline{U}.V$ est nul.

(*b*) On appelle *orthogonal* d'une partie E_1 de E l'ensemble orth (E_1) des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de E_1 ; c'est un sous-espace vectoriel de E ; orth (orth (E_1)) est l'espace vectoriel

(29.20) engendré par E_1.

(*c*) Si E_1 est un sous-espace vectoriel de dimension p, orth (E_1) est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$, orth (orth E_1)) $= E_1$.

(*d*) Si l'opérateur linéaire A applique un espace euclidien dans un espace euclidien, on a

$$\text{noyau}\,(\overline{A}) = \text{orth}\,(\text{val}\,(A)).$$

Soit S une base d'un sous-espace vectoriel E_1 d'un espace euclidien E. Les conditions (*a*), (*b*), (*c*) sont équivalentes :

(*a*) E_1 est euclidien (pour le produit scalaire induit de celui de E) ;

(*b*) orth $(E_1) \cap E_1 = \{0\}$.

(29.21) (*c*) $\overline{S}.S$ est régulier.

(29.21) — Dans ce cas, il existe un projecteur P sur E_1 parallèlement à orth (E_1) ; il est donné par la formule $P = S.[\overline{S}.S]^{-1}.\overline{S}$; on l'appelle *projecteur orthogonal* sur E_1.

— Pour qu'un affineur de E, P, soit un projecteur orthogonal, il faut et il suffit qu'il vérifie $P = \overline{P}.P$.

Formes d'un espace euclidien.

Théorème :

Soit E un espace euclidien ; Ω l'espace vectoriel des formes (non homogènes) sur E.

1) Ω possède une *structure euclidienne*, caractérisée par

$$\diamondsuit \quad \begin{cases} g_{\Omega}(\omega)(\omega') = \omega\omega' \text{ si } \omega \text{ et } \omega' \text{ sont des 0-formes (scalaires)} \\ \overline{\text{Int}\,(V)} = \text{Ext}\,(\overline{V}) \text{ pour tout } V \in E. \end{cases}$$

(29.22) 2) Pour cette structure :

— deux formes homogènes de degré différents sont *orthogonales ;*

— si ω et ω' sont des p-formes, on a

$$\clubsuit \quad \begin{aligned} g_{\Omega}(\omega)(\omega') &= \frac{1}{p\,!}\, g^{jj'} \ldots g^{ll'} \omega_{j\ldots l}\, \omega'_{j'\ldots l'} \\ &= \frac{1}{p\,!}\, \omega_{j\ldots l}\, \omega'^{j\ldots l} \text{ [notations (29.13)],} \end{aligned}$$

les composantes étant prises dans une base arbitraire.

(29.23) — Les formes étant des opérateurs, on ne peut pas faire l'identification (17.6), ni employer la notation $\overline{\omega}.\omega'$ pour désigner le produit scalaire $g_{\Omega}(\omega)(\omega')$.

En appliquant (29.22 $\clubsuit$), on voit en particulier que :

Si ω est une forme de degré maximum n,

(29.24) $$g(\omega)(\omega) = \frac{[\omega_{12\ldots n}]^2}{\det(\overline{S}S)}$$

Corollaire :

(29.25) Soit E un espace euclidien de dimension n.

(*a*) Si S est une base de E, le signe de $\det(\overline{S}.S)$ est indépendant du choix de S ; on l'appellera *multiplicateur* de E.

(*b*) On appellera *jauge euclidienne* une n-forme ω vérifiant

$$|g_\Omega(\omega)(\omega)| = 1$$

E possède deux jauges euclidiennes opposées ; le choix de l'une d'elles, que l'on notera vol_E, s'appellera *orientation* de l'espace ; on aura alors

$g_\Omega(\mathrm{vol}_E)(\mathrm{vol}_E) = \varepsilon$, $\varepsilon(=\pm 1)$ étant le multiplicateur de E.

(*c*) Nous orienterons l'espace euclidien R^n en posant

$$\mathrm{vol}_{R^n}(|_1)(|_2)\ldots(|_n) = +1$$

(*d*) Un opérateur linéaire A, appliquant un espace euclidien orienté E dans un espace euclidien orienté E′ *de même dimension n*, possède un déterminant det (A), défini par

$$\mathrm{vol}_{E'}(AX_1)\ldots(AX_n) = \det(A)\,\mathrm{vol}_E(X_1)\ldots(X_n)\,[X_1,\ldots X_n \in E]$$

le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants des facteurs.

(*e*) Si S est une base de E, on a

$$\det(\overline{S}) = \varepsilon \det(S) \quad , \quad |\det(S)| = \sqrt{|\det(\overline{S}.S)|}$$

ε étant le multiplicateur de E.

(*f*) Tout espace euclidien possède une *densité positive* ρ, dite *densité euclidienne*, définie par :

$$\rho(S) = \sqrt{|\det(\overline{S}.S)|} \quad \text{pour toute base S.}$$

Théorème :

Soit E un espace euclidien *orienté* de dimension n.

On appellera *forme adjointe* d'une forme α la forme $*(\alpha)$ définie par

◇ $\quad g_\Omega(\mathrm{vol}_E)(\alpha\wedge\omega) = g_\Omega(*(\alpha))(\omega)$ pour toute forme ω.

— L'opération $*$ est linéaire et régulière (voir ♡).

(29.26) — Quel que soit le vecteur V,

♣ $$\begin{cases} *(\alpha\wedge\overline{V}) = *(\alpha)(V) \\ *(\alpha(V)) = [-1]^{n+1}[*(\alpha)]\wedge\overline{V} \text{ (1)} \end{cases}$$

— Si α est une p-forme, $*(\alpha)$ est une $[n-p]$-forme ; on a

♡ $*[*(\alpha)] = [-1]^{p[n+1]}\varepsilon\alpha$, ε étant le multiplicateur de E

♤ $$[*(\alpha)]_{l\ldots m} = \frac{1}{p!}\,\mathrm{vol}_{j\ldots k\,l\ldots m}\,\alpha^{j\ldots k}$$

— En particulier

(29.27) $$*(1) = \mathrm{vol} \qquad *(\mathrm{vol}) = \varepsilon$$
$$*(\overline{V}) = \mathrm{vol}(V) \qquad *(\mathrm{vol}(V)) = [-1]^{n+1}\varepsilon\overline{V}$$

Indiquons enfin la formule

(29.28) $$g_\Omega(*(\alpha))(*(\beta)) = \varepsilon g_\Omega(\alpha)(\beta) \quad , \quad \text{soit} \quad \overline{*}.* = \varepsilon 1_\Omega$$

Groupe orthogonal.

Théorème :

Soit A un affineur d'un espace euclidien E. Alors :

(29.29) $$\mathrm{Tr}(\overline{A}) = \mathrm{Tr}(A)\,;\ \det(\overline{A}) = \det(A)\,;\ \text{spectre}(\overline{A}) = \text{spectre}(A)\,;$$
$$\mathrm{Adj}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Adj}(A)}\,;\ \exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}\,;\ \mathrm{Log}(\overline{A}) = \overline{\mathrm{Log}(A)}.$$

(1) Dans ces deux formules, $\beta(V)$ est mis pour $\mathrm{Int}(V)(\beta)$; il faut lire $\beta(V) = 0$ si β est une 0-forme.

Définition :

On dit qu'un affineur A d'un espace euclidien E est :

(29.30) *symétrique* si $\overline{A} = A$;

antisymétrique si $\overline{A} = -A$;

orthogonal si $\overline{A} = A^{-1}$ ou, ce qui est équivalent, si $\overline{A}.A = 1_E$.

Théorème :

1) L'ensemble O(E) des affineurs orthogonaux de E est un groupe, appelé *groupe orthogonal* de E.

2) Si $A \in O(E)$, $\det(A) = \pm 1$; on dira que A est une *rotation* si $\det(A) = +1$, un *retournement* si $\det(A) = -1$; l'ensemble

(29.31) SO(E) des rotations est un sous-groupe distingué de O(E), appelé *groupe spécial orthogonal* de E.

3) Soient S et S′ deux bases de sous-espaces de E, telles que $\overline{S}.S = \overline{S'}.S'$; il existe alors un élément A du groupe orthogonal tel que $S' = A.S$.

Théorème :

(29.32) Désignons par L(E) l'espace vectoriel des affineurs antisymétriques de E.

1) Le groupe orthogonal O(E) possède une structure canonique de variété de classe C^∞ (1), de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, plongée dans l'espace vectoriel des affineurs de E.

2) Si $A \in O(E)$, on a

$$[\delta A \text{ tangent à } O(E)] \Leftrightarrow [A^{-1}.\delta A \in L(E)] \Leftrightarrow [\delta A.A^{-1} \in L(E)]$$

(1) Et même analytique.

(29.32) 3) Les restrictions à L(E) des opérateurs

$$H \to \exp(H) \qquad H \to [1 + H][1 - H]^{-1}$$

sont des applications C^∞ d'ouverts de L(E) dans SO(E).

4) Les restrictions à O(E) des opérateurs

$$A \to \mathrm{Log}(A) \qquad A \to [A + 1]^{-1}.[A - 1]$$

sont des applications C^∞ d'ouverts de O(E) dans L(E), inverses-à-droite des précédentes.

5) L'opérateur

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \to A.B^{-1} \quad (A, B \in O(E))$$

est une application C^∞ de $O(E)^2$ sur O(E).

Indice d'inertie.

Définition :

Soit E_1 un sous-espace d'un espace euclidien E.

E_1 sera dit *isotrope* si $[U \in E_1] \Rightarrow [g(U)(U) = 0]$;

(29.33) *semi-positif* (resp. *semi-négatif*) si $[U \in E_1] \Rightarrow \begin{bmatrix} g(U)(U) \geqslant 0 \\ (\text{resp.} \ \leqslant 0) \end{bmatrix}$;

positif (resp. *négatif*) si $[U \in E_1, U \neq 0] \Rightarrow \begin{bmatrix} g(U)(U) > 0 \\ (\text{resp.} \ < 0) \end{bmatrix}$

Définition, théorème :

(29.34) On appelle *indice d'inertie* d'un espace euclidien E la dimension maximum d'un sous-espace positif.

Soit E un espace euclidien de dimension n, d'indice d'inertie p.

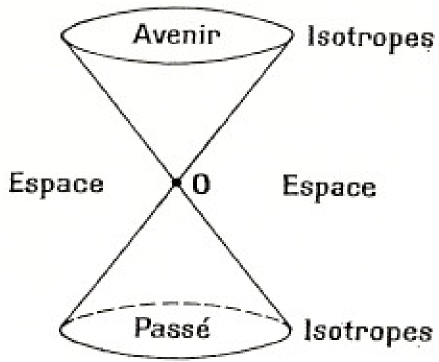
1) La dimension maximum d'un sous-espace semi-positif est p

— — négatif est $n - p$

— — semi-négatif est $n - p$

— — isotrope est $\inf(p, n-p)$.

(29.41) 5) Si U et V sont des vecteurs d'avenir, s un nombre positif, sU, U + V sont des vecteurs d'avenir ; l'ensemble des vecteurs d'avenir est un *ouvert convexe*.



— Soit E un espace hyperbolique normal de dimension n ; S une base de E, telle que (29.34, 2) :

$$\bar{S}.S = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1_{R^{n-1}} \end{array}\right]$$

Alors ô tout affineur orthogonal A de E se met sous la forme SMS^{-1}, avec :

(29.42)
$$M = \exp\left(\varphi \begin{bmatrix} 0 & \bar{U} \\ U & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$\varphi \in R\,; \quad U \in R^{n-1}\,; \quad \bar{U}U = 1\,; \quad \eta = \pm 1\,; \quad B \in 0(R^{n-1})\,;$$

on a

(29.43)
$$\det(A) = \det(M) = \eta \det(B)\,;$$

$$\exp\left(\varphi \begin{bmatrix} 0 & \bar{U} \\ U & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\varphi & \bar{U}\,\mathrm{sh}\,\varphi \\ U\,\mathrm{sh}\,\varphi & 1_{R^{n-1}} + [\mathrm{ch}\,\varphi - 1]\,U.\bar{U} \end{bmatrix}$$

(29.44) — Si $\eta = +1$ (resp. -1), ô A transforme les vecteurs de temps en vecteurs de temps de la même classe (resp. de l'autre classe) ; on dit que A est *orthochrone* (resp. *antichrone*).

(29.45) ô Le groupe orthogonal de E est la réunion de 4 ouverts connexes disjoints (rotations orthochrones, rotations antichrones, retournements orthochrones, retournements antichrones).

E possède les sous-groupes distingués suivants :

— Le groupe SO(E) ;

— Le groupe *orthochrone ;*

— Le groupe *pair* (rotations orthochrones et retournements antichrones) ;

— Le groupe *connexe* ou *restreint* (rotations orthochrones) [1].

§ 30 Variétés riemanniennes

Définition :

Soit V une variété différentiable ; X une variable qui parcourt V.

(30.1) Nous dirons que V est une *variété riemannienne* (d'indice d'inertie k) si nous avons défini, sur chaque espace vectoriel tangent, une structure d'*espace euclidien* (d'indice d'inertie k), et si le champ de tenseurs $[X \to g_{D_X}]$ est *continu*.

(30.2) Par exemple, tout espace euclidien E est une variété riemannienne, puisque $D_X = E$; g_{D_X} est constant.

(30.3) — On dira que V est une *variété riemannienne positive* si les espaces vectoriels tangents à V sont positifs ; on définit de même les *variétés hyperboliques, hyperboliques normales*.

[1] Dans le cas $n = 4$ (transformations de Lorentz), les groupes O(E), SO(E), orthochrone et connexe sont désignés habituellement par les notations respectives L, L_+, $L^{\uparrow}$, $L_+^{\uparrow}$.

(30.4) — Sur toute variété riemannienne, se trouve défini le champ $X \to \rho$, ρ étant la *densité riemannienne* (c'est-à-dire la densité euclidienne de l'espace tangent, définie en (29.25 *f*)) ; si l'on prend une carte F ($X \equiv F(x)$), l'image de ce champ de densité par F^{-1} est (voir (24.38)) :

(30.5)
$$x \to \sqrt{|\det(\bar{S}.S)|}$$

S étant la base D(F)(x) [1] ; ce champ est donc *continu*.

Théorème :

Soit $[X \to f]$ un *champ continu d'orientations* défini sur une variété riemannienne V (V est donc supposée *orientable* (24.32)).

(30.6) On peut définir sur chaque espace vectoriel tangent une *jauge euclidienne* (29.25), caractérisée par la condition

◇ $f(S) = \text{signe}(\det(S))$ pour toute base S de D_X.

le champ $[X \to \text{vol}_{D_X}]$ correspondant est *continu*.

Choisissons une base S au point X ; la condition ◇ et (29.25 *e*) donnent

$$\det(S) = f(S)\sqrt{|\det(\bar{S}.S)|}$$

d'où (29.25 *d*)

(30.7)
$$\text{vol}_{D_X}(U_1)\ldots(U_n) = f(S)\sqrt{|\det(\bar{S}.S)|}\ \text{vol}(S^{-1}.U_1)\ldots(S^{-1}.U_n)$$

Inversement, ◊ l'opérateur vol_{D_X} défini par cette équation est bien une *jauge euclidienne ;* toute base S' vérifie la condition ◇.
En prenant pour S la base naturelle D(F)(x), il vient

(30.8)
$$\text{vol}_{12\ldots n} = z\sqrt{|\det(\bar{S}.S)|}$$

le nombre $z = \pm 1$ étant l'image (continue) de l'orientation par F^{-1} ; la composante $\text{vol}_{12\ldots n}$ est donc continue, ainsi que les autres composantes, qui s'en déduisent trivialement.

C.Q.F.D.

---

[1] On rappelle que $\bar{S}_j.S_k = g_{jk}$: le nombre $\det(\bar{S}.S)$ est souvent désigné par la lettre g.

Théorème :

Soit V une variété différentiable C^p ($p = 1, 2, \ldots \infty$), dénombrable à l'infini.

(30.9) On peut définir sur V une structure de variété *riemannienne positive*, telle que le champ $[X \to g_{D_X}]$ soit $[p\text{-}1]$ *fois différentiable*.

Soient en effet F_j les cartes d'un atlas de V ; φ_j une partition de l'unité subordonnée au recouvrement val (F_j) (th. (19.21)). ◊ il suffit de poser

$$g_{D_X}(dX)(\delta X) = \sum_{j} \varphi_j(X) \cdot g_{R^n}(dF_j^{-1}(X))(\delta F_j^{-1}(X))$$
$$[\varphi_j(X) \neq 0]$$

C.Q.F.D.

(30.10) — On peut montrer qu'il n'existe pas de structure riemannienne hyperbolique normale sur une sphère de l'espace R^3 ; il ne faut donc pas négliger la condition de positivité dans l'énoncé (30.9).

Z

Connexion riemannienne.

Théorème :

Soit V une variété riemannienne C^2 (positive ou non), telle que le champ $[X \to g]$ soit différentiable [1].

Il existe sur V un seul champ de connexions $[X \to \Gamma]$, tel que

(30.11) ◇
$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ est symétrique pour tout } X\,; \\ \overset{\Gamma}{\dfrac{\partial g}{\partial X}} = 0 \end{array} \right.$$

Γ s'appelle *connexion riemannienne* de V ; le champ $[X \to \Gamma]$ est *continu*.

---

[1] Nous écrirons désormais g, en sous-entendant l'indice D_X.

Prenons une carte F ; les formules (28.57), (28.59) permettent d'écrire ◇, dans l'ensemble de valeurs de F, sous la forme

♣ $$\begin{cases} \Gamma^{j}_{kl} = \Gamma^{j}_{lk} \\ \partial_j g_{kl} - \Gamma^{k'}_{jk} g_{k'l} - \Gamma^{l'}_{jl} g_{kl'} = 0 \end{cases}$$

ces formules entraînent (compte tenu de $g_{kl} = g_{lk}$)

$$\partial_k g_{jl} + \partial_l g_{kj} - \partial_j g_{kl} = 2 g_{jr} \Gamma^{r}_{kl}$$

d'où, grâce à (29.14) :

(30.12) $$\boxed{\Gamma^{j}_{kl} = \frac{1}{2} g^{jr} [\partial_k g_{rl} + \partial_l g_{kr} - \partial_r g_{kl}]}$$

inversement, ♢ ces valeurs de Γ^{j}_{kl} vérifient ♣, donc ◇ dans val (F), ce qui montre l'existence et l'unicité de la connexion riemannienne dans tout ouvert de val (F) ; ♢ les champs correspondant aux diverses cartes sont donc compatibles, leur borne supérieure répond à la question. Enfin (30.12) montre que ce champ est continu.

C.Q.F.D.

Notation :

(30.13) Nous désignerons désormais par $\widehat{\ }$ la connexion riemannienne d'une variété V, ce qui nous permettra d'utiliser les notations $\hat{\delta}Z$, $\dfrac{\hat{\partial} Z}{\partial X}$ pour la dérivation covariante ; mais nous resterons fidèles à la notation traditionnelle Γ^{j}_{kl} pour les symboles de Christoffel.

(30.14) — Exemple : dans le cas d'un espace euclidien, toute base S est une carte dans laquelle les g_{jk} sont constants ; par suite on a pour toute dérivation δ : $\quad \hat{\delta}Z = \overset{S}{\delta}Z = \delta Z.$

Corollaire :

(30.15) Sur toute variété C^2 dénombrable à l'infini, il existe un champ continu de connexions symétriques.

Il suffit d'appliquer (30.9) et (30.11).

C.Q.F.D.

Il est évident que tous les champs définis à partir de g par *homomorphisme de racine* ont une dérivée covariante nulle (28.16) ; on trouve ainsi

(30.16) $$\hat{\delta}[g^{-1}] = 0 \quad , \quad \text{soit} \quad [\hat{\partial}_j g]^{kl} = 0$$

d'où :

(30.17) $\hat{\delta}[\overline{Z}] = [\overline{\hat{\delta} Z}]$ pour tout champ différentiable de vecteurs ou de covecteurs $[X \to Z]$

par conséquent,

(30.18) Le changement de variance des tenseurs commute avec la dérivation covariante ; par exemple :

$$[T'^{j}_{k\ldots l} = g^{jj'} T_{j'k\ldots l}] \Rightarrow [[\hat{\delta}T']^{j}_{k\ldots l} = g^{jj'} [\hat{\delta}T]_{j'k\ldots l}]$$

(30.19) L'opérateur g_Ω définissant le produit scalaire de deux formes (29.22) vérifie

$$\hat{\delta} g_\Omega = 0,$$

d'où $\delta[g_\Omega(\omega)(\omega')] = g_\Omega(\hat{\delta}\omega)(\omega') + g_\Omega(\omega)(\hat{\delta}\omega')$.

— Donnons-nous une orientation continue $[X \to f]$ de V (ou d'un ouvert de V) ; nous en déduisons un champ de jauges euclidiennes $[X \to \mathrm{vol}]$ (30.6), qui est différentiable (d'après (30.8)) et qui vérifie (29.25 *b*) :

$$g_\Omega(\mathrm{vol})(\mathrm{vol}) = \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ étant le multiplicateur de } D_X)$$

par dérivation covariante, on trouve donc

(30.20) $\hat{\delta}\, \mathrm{vol} = 0$, vol étant une *jauge euclidienne ;*

on voit de même que

(30.21) $\hat{\delta}\rho = 0$, ρ étant la *densité riemannienne ;*

en prenant une carte, (28.60) et (30.5) montrent que cette formule s'écrit

(30.22) $$\Gamma^k_{jk} \equiv \frac{\partial_j z}{z}, \quad \text{avec} \quad z = \sqrt{|\det(\bar{S}.S)|}$$

— En dérivant la formule de définition de l'opération $*$ (29.26 ◇) :

$$g_\Omega(\text{vol})(\alpha \wedge \omega) \equiv g_\Omega(*(\alpha))(\omega)$$

compte tenu de (30.19) et de (28.23), il vient

(30.23) $$\hat{\delta}[*(\alpha)] = *(\hat{\delta}\alpha)$$

— Soit $[X \to \delta X]$ un glissement infinitésimal de V ; en calculant la *dérivée de Lie* $\delta_L g$ par la formule (25.42), et en tenant compte de (28.25 ◇), il vient

(30.24) $$\begin{aligned}[\delta_L g](d_1X)(d_2X) &\equiv g(\hat{d}_1\,\delta X)(d_2X) + g(d_1X)(\hat{d}_2\,\delta X)\\ &\equiv A(d_1X)(d_2X) + A(d_2X)(d_2X),\\ &\text{avec } A = \frac{\hat{\partial}[\delta X]}{\partial X}\end{aligned}$$

δX sera donc un *vecteur de Killing* de g (23.15) si $\dfrac{\hat{\partial}[\delta X]}{\partial X}$ est antisymétrique, en particulier si cet opérateur est nul.

— Soit $[s \to X]$ une *géodésique* de la connexion riemannienne (28.66) ; U étant le vecteur vitesse $\dfrac{dX}{ds}$, on a évidemment

$$\frac{d}{ds}[g(U)(U)] = g\left(\frac{\widehat{dU}}{ds}\right)(U) + g(U)\left(\frac{\widehat{dU}}{ds}\right) = 0\,;$$

par conséquent :

(30.25) Sur une géodésique connexe $[s \to X]$, on a $g\left(\dfrac{dX}{ds}\right)\left(\dfrac{dX}{ds}\right) = \text{Cte}$; en particulier, si le vecteur tangent à la géodésique est isotrope en un point, il l'est partout (on dit que la géodésique est *isotrope*).

Divergence.

Définition :

(30.26) Soit $[X \to T]$ un champ différentiable de tenseurs covariants d'ordre p.

Nous appellerons *divergence* du tenseur T le tenseur (noté div T), d'ordre $p - 1$, dont les composantes dans une carte sont

$$[\text{div } T]_{l\ldots m} = g^{jk}[\hat{\partial}_j T]_{kl\ldots m}$$

Cette définition est indépendante du choix de la carte ; en effet, div T est un tenseur contracté de $\widetilde{g^{-1}} \otimes \dfrac{\hat{\partial}T}{\partial X}$

Exemple :

Soit $[X \to U]$ un *champ de vecteurs ;* il vient

$$\text{div}\,[\bar{U}] = g^{jk}[\hat{\partial}_j \bar{U}]_k = [\hat{\partial}_j U]^j = \partial_j[U^j] + \Gamma^j_{jk}U^k \text{ (28.59) ;}$$

d'où, grâce à (30.22)

(30.27) $$\text{div}\,[\bar{U}] = \text{Tr}\left(\frac{\hat{\partial}U}{\partial X}\right) = [\hat{\partial}_j U]^j \equiv \frac{1}{z}\,\partial_j[zU^j], \quad \text{avec} \quad z = \sqrt{|\det(\bar{S}.S)|}$$

div $(\bar{U})$ s'appelle aussi divergence du *vecteur* U, et se note aussi div U.

Dans le cas où U est un glissement infinitésimal δX, la comparaison avec (24.37) fournit la formule

(30.28) $\delta_L \rho \equiv \mathrm{div}\,[\delta X].\rho$, ρ étant la densité riemannienne.

— Dans le cas d'une *forme* ω, on trouve

(30.29) $$\mathrm{div}\,[\omega] \equiv \mathrm{Int}\,(\overline{{}^j S^{-1}})(\widehat{\partial}_j \omega) \qquad \left[S \equiv \frac{\partial X}{\partial x}\right]$$

formule qui définira la divergence d'une forme *non homogène*, à condition de convenir que

(30.30) $$\mathrm{div}\,[s] \equiv 0 \quad \text{si} \quad s \text{ est un scalaire (0-forme).}$$

— Soit α une forme de degré p ; alors :

$$\begin{aligned} g_\Omega(\mathrm{div} \divideontimes (\alpha))(\omega) &= g_\Omega(\mathrm{Int}\,(\overline{{}^j S^{-1}})(\widehat{\partial}_j \divideontimes (\alpha)))(\omega) & \\ &= g_\Omega(\divideontimes (\widehat{\partial}_j \alpha))(\mathrm{Ext}\,({}^j S^{-1})(\omega)) && (29.22\ \diamond) \text{ et } (30.23) \\ &\equiv g_\Omega(\mathrm{vol})(\widehat{\partial}_j \alpha \wedge {}^j S^{-1} \wedge \omega) && (29.26\ \diamond) \text{ et } (26.41) \\ &\equiv [-1]^p\, g_\Omega(\divideontimes (\nabla \alpha))(\omega) && (26.42) \text{ et } (28.38) \end{aligned}$$

d'où la formule :

(30.31) $$\mathrm{div}\,[\divideontimes(\alpha)] \equiv [-1]^p \divideontimes (\nabla\alpha) \quad \text{si} \quad \alpha \text{ est une } p\text{-forme ;}$$

en remplaçant α par $\divideontimes(\alpha)$, et en appliquant les formules (29.26), on trouve

(30.32) $$\nabla[\divideontimes(\alpha)] \equiv [-1]^{p+1} \divideontimes (\mathrm{div}\,\alpha) \quad \text{si} \quad \alpha \text{ est une } p\text{-forme.}$$

d'où, en faisant successivement $\alpha \equiv s$, dans (30.31), $\alpha = \overline{U}$ dans (30.32),

(30.33) $$\mathrm{div}\,[s\,\mathrm{vol}] = \mathrm{vol}\,(\mathrm{grad}\,s) \quad \text{pour} \quad s \text{ scalaire}$$

en posant, suivant l'usage :

(30.34) $$\mathrm{grad}\,s = \overline{\nabla s}$$

et

(30.35) $$\nabla\,[\mathrm{vol}\,(U)] = \mathrm{div}\,[U]\,\mathrm{vol}.$$

— Soient α et ω deux formes ; il est clair qu'il existe un vecteur U tel que

(30.36) $$g_\Omega(\alpha)(C \wedge \omega) \equiv C.U \quad \text{pour tout covecteur } C$$

on trouve par dérivation la formule

$$C.\widehat{\delta}U \equiv g_\Omega(\widehat{\delta}\alpha)(C \wedge \omega) + g_\Omega(\alpha)(C \wedge \widehat{\delta}\omega)$$

d'où, en faisant $C = {}^j S^{-1}$, $\delta = \partial_j$

(30.37) $\mathrm{div}\ U \equiv g_\Omega(\mathrm{div}\,\alpha)(\omega) + g_\Omega(\alpha)(\nabla\omega)$, U étant le vecteur défini par (30.36).

Courbure riemannienne.

(30.38) — Supposons maintenant que V soit une variété C^3, et que le champ $[X \to g]$ soit 2 fois différentiable.

La formule (30.12) montre que la connexion riemannienne est *différentiable ;* elle possède donc une courbure, que l'on appelle *courbure riemannienne.*

Nous savons que la densité riemannienne possède une dérivée covariante nulle (30.21) ; par suite (28.84, 28.87) :

(30.39) Sur une variété riemannienne, la 2-forme ω (28.82) est nulle, le tenseur de Ricci (28.85) est symétrique.

— Soient d et δ deux dérivations qui commutent ; $[X \to U]$ un champ de vecteurs deux fois différentiable. Le covecteur $\overline{U}$ vérifie (28.73) :

$$\widehat{d}\,\widehat{\delta}\overline{U} - \widehat{\delta}\,\widehat{d}\overline{U} \equiv -\overline{U}.R(dX)(\delta X)$$

compte tenu de (30.17), le premier membre de cette égalité s'écrit $\widehat{d}\,\widehat{\delta}\,U - \widehat{\delta}\,\widehat{d}\,U$, soit encore $\overline{R(dX)(\delta X)(U)}$ (28.69 ◇) ; d'où la formule

(30.40) $$\overline{R(dX)(\delta X)} \equiv -R(dX)(\delta X) \quad \text{quels que soient } dX \text{ et } \delta X$$

Si l'on pose

(30.41) $$R_{kl,mn} \equiv g_{nj} R^{j}_{kl,m}$$

cette formule s'écrit aussi

(30.42) $$R_{kl,mn} + R_{kl,nm} \equiv 0$$

Avec cette notation, les formules (28.78) et (28.81) s'écrivent

(30.43) $$R_{kl,mn} + R_{lk,mn} \equiv 0$$

et

(30.44) $$R_{kl,mn} + R_{lm,kn} + R_{mk,ln} \equiv 0$$

En échangeant m et n dans cette dernière identité, et en ajoutant, il vient, compte tenu de (30.42) et (30.43) :

$$R_{ln,km} - R_{km,ln} \equiv R_{kn,lm} - R_{lm,kn}$$

le premier membre $F_{ln,km}$ de cette égalité est donc symétrique par rapport aux indices k et l ; il est visiblement antisymétrique par rapport aux indices l et n ; il est donc nul (25.20) ; d'où

(30.45) $$R_{km,ln} \equiv R_{ln,km}$$

(30.46) — Si la courbure riemannienne est identiquement nulle, V possède un atlas F_j, dont toutes les cartes admettent la connexion riemannienne comme connexion (28.72) ; par suite la dérivée de l'image réciproque du tenseur g par ces cartes est nulle (30.11 ◇), les g_{jk} sont constants localement ; on dit que V est *localement euclidienne.*

Laplacien d'une forme.

Faisons toujours les hypothèses de différentiabilité (30.38), et considérons sur V une p-forme α, deux fois différentiable.

En orientant localement la variété, et en remplaçant α par $\nabla\alpha$ dans la formule (30.31), il vient

(30.47) $$\operatorname{div}[\ast(\nabla\alpha)] = 0$$

d'où, en prenant la divergence des deux membres de (30.31), et en remplaçant α par $\ast^{-1}(\alpha)$

(30.48) $$\operatorname{div}\operatorname{div}\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \text{ est une forme}$$

formule qui peut d'ailleurs se vérifier directement, et qui peut devenir fausse si on l'applique à un tenseur α *non antisymétrique.*

On en conclut immédiatement la formule

$$[\operatorname{div} + \nabla]^2\alpha = \operatorname{div}\nabla\alpha + \nabla\operatorname{div}\alpha.$$

Définition :

(30.49) On appellera *laplacien* d'une forme α, et on notera $\Delta\alpha$, la forme [1]

$$\Delta\alpha \equiv [\operatorname{div} + \nabla]^2\alpha = \operatorname{div}\nabla\alpha + \nabla\operatorname{div}\alpha$$

(30.50) — *Dans le cas d'un espace euclidien,* les formules (30.29) et (28.38) donnnent immédiatement (grâce à (26.34) ou (26.36))

$$\Delta\alpha = g^{jk}\partial_j\partial_k\alpha$$

[1] De Rham (réf. p. 132) ; nous adoptons ici un signe contraire, afin de retrouver le laplacien usuel dans le cas de l'espace euclidien.

et l'on voit que chaque composante de $\Delta\alpha$ est le laplacien usuel de la composante correspondante de α ; Δ est bien une généralisation de l'opérateur de Laplace.

— La définition (30.49) s'applique évidemment aux formes *non homogènes ;* le laplacien d'une *p-forme est une p-forme ;* en particulier, dans le cas d'une 0-forme s (scalaire), on trouve grâce à (30.27) :

(30.51) $$\Delta s = \operatorname{div}[\nabla s] = \frac{1}{z}\,\partial_j[z g^{jk}\partial_k s], \quad \text{avec} \quad z \equiv \sqrt{|\det(\bar{S}S)|}$$

— On vérifie immédiatement les formules de commutation

(30.52) $$\begin{gathered} \Delta * (\alpha) = * (\Delta\alpha)\,; \\ \Delta \operatorname{div} \alpha = \operatorname{div} \Delta\alpha \equiv \operatorname{div} \nabla \operatorname{div} \alpha \\ \Delta \nabla\alpha \equiv \nabla\Delta\alpha = \nabla \operatorname{div} \nabla\alpha. \end{gathered}$$

— Exemple : considérons une variété riemannienne de dimension 3, orientée. Il est d'usage de définir le rotationnel d'un vecteur U par la formule :

(30.53) $$\nabla[\bar{\mathrm{U}}] = \mathrm{vol}\,(\mathrm{rot}\ \mathrm{U})$$

On trouve alors, par application des résultats des paragraphes (27) et (30), le tableau :

(30.54)

α	$\nabla\alpha$	$\operatorname{div}\alpha$	$\Delta\alpha$
s	$\overline{\mathrm{grad}\ s}$	0	$\mathrm{div\ grad}\ s$
$\bar{\mathrm{U}}$	vol (rot U)	div U	$\overline{\mathrm{grad\ div\ U} - \varepsilon\ \mathrm{rot\ rot\ U}}$
vol (U)	div U . vol	$-\ \varepsilon\ \overline{\mathrm{rot\ U}}$	vol (grad div U — ε rot rot U)
s vol	0	vol (grad s)	div grad s vol

où ε désigne le multiplicateur de la variété.

— On peut généraliser à ce cas un grand nombre de formules classiques de l'espace euclidien, telles que div rot U $= 0$, rot grad $s = 0$, div $[s\mathrm{U}] = s$ div U $+ \overline{\mathrm{grad}\ s}$.U, etc...

§ 31 Intégrales multiples

(31.1) Toutes les variétés de ce paragraphe seront supposées différentiables et dénombrables à l'infini, donc séparées (19.21).

***p*-mesures.**

Définition :

(31.2) Soit V une variété.

Nous appellerons *p-mesure* de V tout opérateur C tel que :

(*a*) Si f est un champ continu de p-formes sur V, C(f) est un nombre ;

(*b*) C est linéaire ;

(*c*) Il existe une partie *compacte* K de V, sur laquelle C est *borné*, ce qui signifie que :

« Il existe une structure riemannienne positive sur un voisinage de K, et un nombre a, tels que, pour tout f

◇ $$|\mathrm{C}(f)| \leqslant a \sup_{\mathrm{X}\in\mathrm{K}} |f(\mathrm{X})|$$

(31.3) — $|f(\mathrm{X})|$ désigne la *norme euclidienne* de la p-forme $f(\mathrm{X})$ (29.35) ; c'est une fonction continue sur K, donc bornée.

(31.4) — ♁ si on change la structure riemannienne positive définie au voisinage de K, la formule ◇ reste valable, à condition de changer la constante a.

(31.5) — On dit qu'une suite f_n de champs de p-formes *converge uniformément* sur K vers f si $\sup_{\mathrm{X}\in\mathrm{K}} |f_n(\mathrm{X}) - f(\mathrm{X})|$ tend vers 0 (♁ cette condition est indépendante du choix de la structure riemannienne positive) ; il résulte immédiatement de (*c*) que :

(31.6) Si la p-mesure C est *bornée sur* K, et si les champs continus de p-formes f_n *convergent uniformément vers* f *sur* K, on a

$$\lim_{n\to\infty} [C(f_n)] = C(f)$$

Théorème :

(31.7) Si C et C′ sont des p-mesures de V, bornées sur K et K′ respectivement, $C + C'$ est une p-mesure, bornée sur $K \cup K'$.

$K \cup K'$ est compact ; choisissons une structure riemannienne positive sur un voisinage de $K \cup K'$ (ce qui est toujours possible grâce au théorème (30.9)) ; on sait qu'il existe deux nombres a et a' tels que

$$|C(f)| \leqslant a \sup_{X\in K} |f(X)|$$

$$|C'(f)| \leqslant a' \sup_{X\in K'} |f(X)|$$

d'où $|[C + C'](f)| \leqslant |C(f)| + |C'(f)| \leqslant [a + a'] \sup_{X\in K\cup K'} |f(X)|$; $C + C'$, qui est évidemment linéaire, est bien borné sur $K \cup K'$.

C.Q.F.D.

Corollaire :

(31.8) ♁ Les p-mesures sur une variété V forment un espace vectoriel.

Image d'une mesure.

Théorème, définition :

(31.9) Soit C une p-mesure d'une variété V ; A une application différentiable de V dans une variété V*.

— Il existe une p-mesure de V*, que nous appellerons *image de* C *par* A, que nous noterons $A^+(C)$, définie par

$$A^+(C) = C.A_{Rec}$$

— Si C est borné sur le compact K, $A^+(C)$ est borné sur le compact $A^+(K)$.

— Il résulte de la définition (25.47) et de (25.33 ♣) la formule

♡ $$A_{Rec}(f)(X)(d_1X)\ldots(d_pX) = f(A(X))(d_1A(X))\ldots(d_pA(X))$$

qui montre que A_{Rec} est un opérateur linéaire, donc aussi $A^+(C)$.

— $A^+(K)$ est l'image continue d'un compact dans un espace séparé, donc un compact (voir Bourbaki, « Topologie Générale », chap. I, § 9).

— ♁ La formule ♡ montre qu'il existe un nombre b tel que, pour tout f et tout X dans K

$$|A_{Rec}(f)(X)| \leqslant b\,|f(A(X))|$$

d'où $|A^+(C)(f)| = |C(A_{Rec}(f))| \leqslant a \sup_{X\in K} |A_{Rec}(f)(X)|$ (31.2 ◇)

$$\leqslant ab \sup_{Y\in A^+(K)} |f(Y)|.$$

C.Q.F.D.

Théorème :

(31.10)
$$A^+(C + C') = A^+(C) + A^+(C') ;$$
$$A^+(aC) = a\,A^+(C) \quad \text{pour} \quad a \text{ réel} ;$$
$$[A.B]^+(C) = [A^+.B^+](C).$$

Les deux premières formules résultent de la linéarité de A_{Rec} ; la troisième est conséquence de $[A.B]_{Rec} = B_{Rec}.A_{Rec}$ (25.48).

C.Q.F.D.

(31.11) Soit V une variété *plongée* dans une variété V*.

A toute p-mesure C de V, on peut faire correspondre la p-mesure de V*

$$C^* = [1_V]^+(C)$$

que l'on appellera *plongement* de C dans V*.

(31.12) — La notation $C' = A^+(C)$ est ambigüe ; ♁ tous les plongements de C′ peuvent en effet se noter aussi $A^+(C)$; il peut donc être nécessaire de préciser *dans quelle variété* on considère l'image de C par A.

Support.

Définition, théorème :

Soit C une p-mesure d'une variété V.

(31.13) — On appelle *support* de C l'intersection des compacts où C est borné.

— Le support de C est lui-même un compact où C est borné (c'est donc le plus petit d'entre eux) ; il n'est vide que si C est nul.

Soit σ le support de C ; σ est fermé et relativement compact, donc compact. Donnons-nous une structure riemanienne positive sur V (th. (30.9)) ; soit K_1 un compact sur lequel C est bornée ; α le nombre tel que, pour tout f, $|C(f)| \leqslant \alpha \sup\limits_{X \in K_1} |f(X)|$; on a, à fortiori, $|C(f)| \leqslant \alpha \sup\limits_{X \in V} |f(X)|$ si f est bornée sur V.

Soit f un élément de def (C) ; M le nombre $\sup\limits_{X \in \sigma} |f(X)|$ (on prendra $M = 0$ si σ est vide) ; U l'ensemble défini par $|f(X)| < 2M$. ò U est un ouvert ; comme il contient σ, U et les complémentaires des compacts où C est borné forment un recouvrement ouvert de V ; on peut en extraire un recouvrement fini du compact K_1 ; en ajoutant le complémentaire de K_1, on obtient donc un recouvrement ouvert fini de V ; en construisant une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement (19.21), on obtient des fonctions différentiables $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_N$ telles que

$\varphi_0(X) = 0$ si $X \notin U$;

$[j \geqslant 1] \Rightarrow \varphi_j(X) = 0$ si $X \in K_j$, K_j étant un compact où C est borné ;

pour tout X et tout j, $\varphi_j(X) \geqslant 0$; $\sum\limits_{j=0}^{N} \varphi_j(X) = 1$

On a donc $f = \sum\limits_j f_j$, avec $f_j(X) = \varphi_j(X) f(X)$; si $j \geqslant 1$, $C(f_j) = 0$ (puisque $f_j(X)$ est nul sur un compact où C est borné) ; donc $C(f) = C(f_0)$, d'où, si σ n'est pas vide

$$|C(f)| \leqslant \alpha \sup_{X \in V} |f_0(X)| \leqslant \alpha \sup_{X \in U} |f_0(X)| \leqslant \alpha \sup_{X \in U} |f(X)| \leqslant 2\alpha M = 2\alpha \sup_{X \in \sigma} |f(X)|$$

ce qui montre que C est borné sur σ. Si σ est vide, U est vide, φ_0 est nul, donc $C(f) = 0$.

C.Q.F.D.

Des théorèmes (31, 7, 9) on en tire immédiatement :

(31.14)
$$\begin{aligned} &\text{support}\,(C + C') \subset \text{support}\,(C) \cup \text{support}\,(C') \\ &\text{support}\,(aC) = \text{support}\,(C) \text{ si } a \neq 0 \\ &\text{support}\,(A^+(C)) \subset A^+\,(\text{support}\,(C)) \end{aligned}$$

Bord.

Lemme :

Soient V une variété C^2 ; f un champ de p-formes *continu* sur V ; K un compact de V.

(31.15) Il existe alors une suite de champs *différentiables* qui converge *uniformément* sur K vers f.

(a) Si $V = R^n$, c'est une conséquence immédiate du théorème de Stone-Weierstrass (on peut prendre une suite de champs dont les composantes sont des polynômes).

(b) ò la proposition s'en déduit si V est l'ensemble de valeurs d'une carte.

(c) Dans le cas général, il existe un nombre fini de cartes F_k tels que les ouverts $U_k = \text{val}\,(F_k)$ soient relativement compacts et recouvrent K (compacité) ; soit U_{N+1} le complémentaire de K ; il existe une partition de l'unité φ_k subordonnée au recouvrement U_k de V (19.21) ; pour $k = 1, 2, \ldots N$, le support H_k de φ_k (plus petit ensemble fermé où $\varphi_k(X)$ n'est pas nul), est compact ; il existe donc des suites f_{kj} de champs différentiables sur val (F_k), qui convergent uniformément vers f sur H_k (b) ; ò les g_{kj} : $\left[X \to \begin{cases} \varphi_k(X) f_{kj}(X) & \text{si } X \in \text{val}\,(F_k) \\ 0 & \text{si } X \notin \text{val}\,(F_k) \end{cases}\right]$ convergent uniformément dans V vers $\varphi_k(X) f(X)$; la suite $g_j = \sum\limits_{k=1}^{N} g_{kj}$ converge uniformément vers

$$[1 - \varphi_{N+1}(X)] f(X)$$

sur V, donc vers $f(X)$ sur K.

C.Q.F.D.

Corollaire :

(31.16) Soit C une p-mesure ; si $C(g) = 0$ pour tout champ *différentiable* g de p-formes, $C = 0$.

Corollaire, définition :

Soit V une variété C^2 ; C une p-mesure de V ($p \geqslant 1$; voir ci-dessous (31.24)).

S'il existe une $[p\text{-}1]$-mesure C' telle que

(31.17) $C(\nabla f) = C'(f)$ pour tout champ différentiable f de $[p\text{-}1]$-formes C' est *unique*.

Nous dirons alors que C' est le *bord* de C, et nous poserons $C' = C\nabla$, de sorte que

$$\diamond \qquad [C\nabla](f) = C(\nabla f)$$

En effet, si on a aussi $C''(f) = C(\nabla f)$, on a $[C'' - C'](f) = 0$ pour f différentiable, d'où $C'' - C' = 0$ (31.16).

C.Q.F.D.

(31.18) Z — Il existe des p-mesures qui n'ont pas de bord.

De la linéarité du symbole ∇, il résulte :

(31.19) Si C et C' sont des p-mesures qui possèdent un bord, $C + C'$, aC ($a \in R$) possèdent un bord, et

$$[C + C']\nabla = C\nabla + C'\nabla$$
$$[aC]\nabla = a[C\nabla].$$

Théorème :

(31.20) Soit A une application deux fois différentiable d'une variété V dans une variété V*. Si C possède un bord, $A^+(C)$ possède le bord :

$$[A^+(C)]\nabla = A^+(C\nabla)$$

En effet, pour tout f différentiable, $A^+(C)(\nabla f) = C(A_{Rec}(\nabla f))$
$= C(\nabla[A_{Rec}(f)])$ (th. 27.17))
$= [C\nabla](A_{Rec}(f)) = A^+(C\nabla)(f)$. C.Q.F.D.

Définition :

(31.21) Une p-mesure C est dite *fermée* si $C\nabla \equiv 0$.

(31.22) — Il résulte de (31.19, 20) que *les p-mesures fermées forment un espace vectoriel*, et que l'*image* deux fois différentiable d'une mesure fermée est *fermée*.

Théorème :

Soit V un *morceau* deux fois différentiable de dimension n ; C une $[n\text{-}1]$-mesure *fermée* de V.

(31.23) Il existe alors *une seule* n-mesure admettant C pour bord ; nous l'appellerons *intérieur* de C, et nous la noterons C/∇ :

$$[C/\nabla]\nabla = C$$

1) Supposons que V est un ouvert convexe de R^n, contenant l'origine. Si f est un champ continu de n-formes de V, posons

$$\diamond \qquad \Phi(f)(X) = \int_0^1 dt\, t^{n-1} f(tX)(X)$$

Il existe par hypothèse un compact K de V où f est borné (formule (31.2 $\diamond$)) ; ô il existe un *compact convexe* K' tel que $0 \in K'$, $K \subset K' \subset V$ (il suffit de prendre l'homothétique, dans un rapport convenable, de l'adhérence de $B \cap V$, B étant une boule contenant K).

ô On tire de (29.37) l'inégalité

$$[X \in K'] \Rightarrow |\Phi(f)(X)| \leqslant \int_0^1 dt\, t^{n-1} |f(tX)(X)| \leqslant r \sup_{Y \in K'} |f(Y)|$$

r étant le rayon d'une boule de centre 0 contenant K' ; on a donc $|[C.\Phi](f)| \leqslant a \sup_{X \in K} |\Phi(f)(X)| \leqslant ar \sup_{Y \in K'} |f(Y)|$; $C.\Phi$ est donc une n-mesure, bornée sur K'.

— Supposons que g soit un champ de $[n - 1]$-formes, et que g et ∇g soient différentiables.

Alors $\nabla[\Phi(\nabla g)] = \nabla g$ (formule ♣ de la démonstration de (27.25)) ; il existe donc un champ différentiable h de $[n-2]$-formes tel que

$$\Phi(\nabla g) - g = \nabla h$$

(réciproque du théorème de Poincaré ; on suppose $n \geqslant 2$) ; C étant fermé, on a donc $[C.\Phi](\nabla g) - C(g) = C(\nabla h) = 0$.

Si f est un champ *différentiable* de $[n-1]$-formes, il existe une suite g_k de champs 2 fois différentiables telle que g_k et les dérivées partielles $\partial_j g_k$ convergent uniformément sur K′ vers f et $\partial_j f$ (on peut prendre pour g_k des *régularisées* de f [1]) ; C et C.Φ étant bornés sur K′, on a donc $C.\Phi(\nabla f) - C(f) = \lim_k [C.\Phi(\nabla g_k) - C(g_k)] = 0$, d'où

♣ $$[C.\Phi]\nabla = C$$

— Tout champ différentiable f de n-formes vérifie $\nabla f = 0$ (car les $[n+1]$-formes sont nulles) ,d'où $f = \nabla k$ (réciproque du théorème de Poincaré) ; par suite si C′ vérifie aussi $C'\nabla = C$, on a

$$[C' - C.\Phi](f) = [C' - C.\Phi](\nabla k) = 0,$$

d'où $C' = C.\Phi$ (31.16), ce qui prouve l'unicité de l'intérieur.

2) Dans le cas où V est un morceau quelconque, il existe une carte F de V telle que def (F) = ouvert convexe de R^n, val (F) = V (définition (27.26)) ; ♁ la seule solution de $C'\nabla = C$ est $C' = F^+([F^{-1}]^+(C)/\nabla)$.

Le théorème est donc établi pour $n \geqslant 2$; ♁ il reste valable pour $n = 1$ si l'on adopte la convention suivante :

(31.24) Si C est une 0-mesure, on appellera *bord* de C, et on notera $C\nabla$, le nombre

$$C(\mathbb{1})$$

$\mathbb{1}$ étant la fonction constante $[X \to 1]$.

Théorème :

♁ (31.25) Si C et C′ sont des $[n$-1$]$-mesures fermées d'un morceau de dimension n, on a

$$[C + C']/\nabla = C/\nabla + C'/\nabla$$
$$[aC]/\nabla = a[C/\nabla] \quad (\text{pour } a \text{ réel}).$$

[1] Voir L. Schwartz, « Théorie des Distributions », tome II (Hermann éd.), VI, 4, 5.

Chaînes.

Définition :

(31.26) On appellera 0-*chaîne* d'une variété V tout opérateur C tel que

$$C(f) \equiv m_1 f(X_1) + \ldots + m_N f(X_N)$$

pour toute fonction à valeurs réelles f continue sur V

$(X_1 \ldots X_N \in V\,;\ m_1, \ldots m_N \in Z$, ensemble des entiers $\gtrless 0)$

Il est clair que l'opérateur C est une 0-mesure, et que son bord est $m_1 + \ldots + m_N$.

Exemple :

(31.27) Pour tout X de V, la *mesure de Dirac* $\delta(X)$:

$$\delta(X)(f) \equiv f(X)$$

est une 0-chaîne, de bord 1.

Définition :

(31.28) Soit V une variété C^2.

Une p-mesure C de V s'appellera p-*chaîne* si

◇ $$C = \sum_{j=1}^{N} A_j^+(C_j/\nabla)$$

avec A_j = application deux fois différentiable d'un ouvert convexe de R^p dans V ;

$C_j = [p$-1$]$-*chaîne* fermée de def (A_j).

Nous définissons donc les p-chaînes *par récurrence sur p*.

Théorème :

ȯ (31.29) Si $C_1, C_2 \dots C_N$ sont des p-chaînes de V,
$m_1C_1 + m_2C_2 + \dots + m_NC_N$ est une p-chaîne ($m_1, m_2, \dots m_N \in Z$)

Z le fait que les coefficients m_j soient *entiers* est essentiel ; les p-chaînes de V ne forment pas un espace vectoriel (si elles ne sont pas toutes nulles).

Théorème :

(31.30) Si C est une p-chaîne de V, et si A est deux fois différentiable, $A^+(C)$ est une p-chaîne de V* (notations de (31.9)).

En effet, il résulte de (31.28 ◇) que $A^+(C) = \sum_j [A.A_j]^+(C_j/\nabla)$ (th. (31.10)).

C.Q.F.D.

Théorème :

(31.31) Toute p-chaîne possède un bord, qui est une $[p$-1$]$-chaîne fermée :

$$[C\nabla]\nabla = 0$$

En effet, de (31.28 ◇), on tire $C\nabla = \sum_j A_j{}^+(C_j)$ (31.19,23) ; $C\nabla$ est donc une chaîne (31.30,29) ; et $[C\nabla]\nabla = \sum_j A_j{}^+(C_j\nabla) = 0$, puisque les C_j sont fermés par hypothèse.

C.Q.F.D.

(31.32) — Ce théorème reste vrai pour $p = 0$, *si l'on convient de considérer tout nombre entier comme une [— 1]-chaîne fermée.*

Théorème :

(31.33) Si V est un morceau de dimension n, et C une $[n$-1$]$-chaîne fermée de V, C/∇ est une n-chaîne.

Soit en effet F une carte appliquant un ouvert convexe de R^n sur V (définition d'un morceau) ; ȯ on trouve $C/\nabla = F^+(F^{-1+}(C)/\nabla)$, ce qui est de la forme (31.28 ◇).

C.Q.F.D

Des théorèmes précédents, ȯ il résulte que

(31.34) L'ensemble des chaînes est le plus petit ensemble de mesures qui contienne les mesures de Dirac, et qui soit stable pour les opérations *somme, différence, image deux fois différentiable, intérieur.*

Homologie.

Soit V une variété C^2 ;

(31.35)
(*a*) Deux p-chaînes de V seront dires *homologues* si leur différence est le bord d'une $[p + 1]$-chaîne.

(*b*) ȯ Cette relation (appelée *homologie*) est une *équivalence* entre p-chaînes.

(*c*) ȯ La classe d'homologie de $C + C'$ ne dépend que des classes d'homologie de C et C' ; on l'appelle *somme* des classes de C et de C' ; cette addition définit sur les classes d'homologie une structure de *groupe abélien.*

Définition :

(31.36) On appelle *p-cycle* toute p-chaîne fermée.

Théorème, définition :

ȯ (31.37)
— Si C est un p-cycle, et si C' est homologue à C, C' est un p-cycle.

— Les classes d'homologie de p-cycles de V forment un sous-groupe du groupe (31.35 *c*), appelé *p-ème groupe d'homologie* de V.

Intégrales multiples.

— Soit C une p-chaîne ; f un champ continu de p-formes.

La démonstration de (31.23) montre que le calcul de $C(f)$ peut se ramener à des calculs successifs d'intégrales ; c'est pourquoi le nombre $C(f)$ s'appelle une *intégrale multiple ;* on use habituellement de la notation

$$C(f) = \int_C \omega \quad , \quad \text{si} \quad \omega \equiv f(X) \, ; \tag{31.38}$$

ce nombre s'appelle *intégrale de la forme* ω *sur la chaîne* C.

— Avec cette notation, la définition (31.9) s'écrit

$$\int_{A^*(C)} \omega^* = \int_C \omega \tag{31.39}$$

avec

$$A(X) \equiv X^*, \quad \omega(\delta_1 X) \ldots (\delta_p X) \equiv \omega^*(\delta_1 X^*) \ldots (\delta_p X^*) \tag{31.40}$$

ces formules (31.39, 40) s'appellent formules de *changement de variable dans les intégrales multiples.*

De même, la définition (31.17) du bord s'écrit

$$\int_C \nabla\omega = \int_{C\nabla} \omega \tag{31.41}$$

et prend alors le nom de *formule de Stokes.*

Dérivation des intégrales.

— Soit C une p-chaîne d'une variété V ; f un champ continu de p-formes de V.

Supposons que f dépende d'un paramètre réel t, et que la forme $\omega_t \equiv f(X)$ soit, pour tout X, différentiable en t ; la formule de *dérivation sous le signe* $\int$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_C \omega_t = \int_C \frac{\partial \omega_t}{\partial t} \tag{31.42}$$

s'appliquera, pourvu que la convergence de $\frac{1}{h}[\omega_{t+h} - \omega_t]$ vers $\frac{\partial \omega_t}{\partial t}$ soit *uniforme* sur le support de la chaîne C (puisque C est linéaire et bornée, cf. (31.6)).

— Soit en particulier $g : [X \to \delta X]$ un *glissement infinitésimal* de V ; f un champ différentiable de p-formes.

Par définition (31.9), l'image $[e^{tg}]^+(C)$ de la chaîne C par le glissement e^{tg} est telle que

$$[e^{tg}]^+(C)(f) = C(e^{tg}{}_{\mathrm{Rec}}(f))$$

Il résulte de (25.47), (25.36), (15.3) que

$$[e^{tg}]_{\mathrm{Rec}}(f)(X) = [e^{-tg}]_{\mathrm{Im}}(f)(X) \, ;$$

on a donc

$$[e^{tg}]^+(C)(f) = C(e^{-tg}{}_{\mathrm{Im}}(f)) \, ;$$

∂ la formule de dérivation sous le signe $\int$ (31.42) est applicable ; on a donc

$$\frac{\partial}{\partial t}[e^{tg}]^+(C)(f) = C\left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-tg}{}_{\mathrm{Im}}(f)\right)$$

d'où, par définition de la *dérivée de Lie* du champ f (23.6) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{[e^{tg}]^+(C)} \omega\right]_{t=0} = \int_C \delta_L \omega \qquad [\delta X = g(X)] \tag{31.43}$$

en remplaçant t par $t + u$, il vient aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{[e^{tg}]^+(C)} \omega = \int_{[e^{tg}]^+(C)} \delta_L \omega \tag{31.44}$$

Il en résulte évidemment le théorème :

Si la p-forme ω et le glissement infinitésimal $g : [X \to \delta X]$ vérifient

$$\delta_L \omega = 0$$

(31.45) et si C est une p-chaîne, l'intégrale

$$\int_{[e^{tg}]^+(C)} \omega$$

est *indépendante de t* ; on dit que la forme ω est un *invariant intégral* du champ de vecteur $X \to \delta X$.

On rappelle la formule (27.13 b) :

(31.46) $$\delta_L \omega = \nabla[\omega(\delta X)] + [\nabla\omega](\delta X)$$

qui permet d'utiliser la dérivation extérieure pour rechercher les invariants intégraux, et qui permet d'écrire (31.43) sous la forme

(31.47) $$\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{[e^{tg}]^+(C)} \omega\right]_{t=0} = \int_C [\nabla\omega](\delta X) + \int_{C\nabla} \omega(\delta X)$$

puisque toute chaîne possède un bord (31.17, 31.31).

— On peut aussi calculer la dérivée par rapport à un paramètre t d'une intégrale $\int_C \omega$ lorsque ω et C varient simultanément, C étant de la forme $[A_t]^+(C_0)$, A_t étant un glissement dépendant de t, C_0 une chaîne fixe.

En considérant le couple $\begin{bmatrix} t \\ X \end{bmatrix}$, qui parcourt la variété $R \times V$, et en appliquant (31.47), on trouve :

(31.48) $$\boxed{\delta \int_C \omega = \int_C \delta\omega + [\nabla\omega](\delta X) + \int_{C\nabla} \omega(\delta X)}$$

avec les notations suivantes :

(31.49)
$$\delta\omega = \left[\frac{\partial\omega}{\partial t}\right]_{X=C^{t_0}}$$
$$\delta X = \left\{\frac{\partial}{\partial t}[A_t . A_{t_0}{}^{-1}(X)]\right\}_{t_0=t} \quad \text{(on a posé } C = A_t{}^+(C_0))$$

cette formule (31.48) joue un rôle important en calcul des variations.

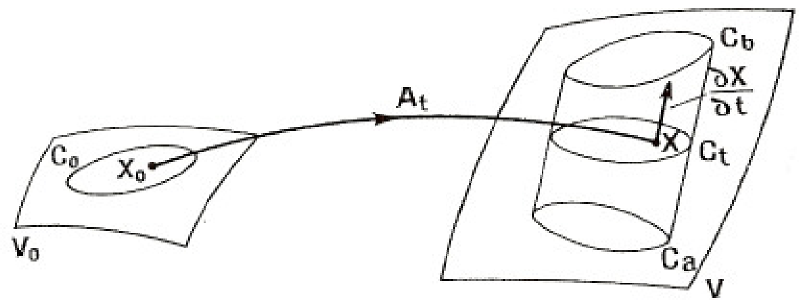
Pavés.

(31.50) Soient :

— C_0 une p-chaîne d'une variété V_0 (parcourue par un point variable X_0) ;

— A_t une application de V_0 dans une variété V, fonction d'un paramètre t ($t \in [a, b]$) ;

— ω une $[p+1]$-forme de V ;



posons :

$X = A_t(X_0)$;

$\dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}[A_t(X_0)]_{X_0 = C^*}$ (on suppose que l'application $\begin{bmatrix} t \\ X_0 \end{bmatrix} \to X$ est différentiable) ;

$C_t \equiv A_t^{+}(C_0)$;

par récurrence sur p, on vérifie qu'il existe une $[p+1]$-chaîne Γ, définie par

(31.51)
$$\boxed{\int_\Gamma \omega = \int_{t=a}^{t=b} dt \int_{C_t} \omega\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)}$$

et que le *bord* de Γ est donné par la formule

(31.52)
$$\boxed{\int_{\Gamma\nabla} \theta = \int_{C_b} \theta - \int_{C_a} \theta + \int_a^b dt \int_{C_t\nabla} \theta\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)}$$

Ces formules servent couramment à calculer des intégrales multiples par balayage.

(31.53) — En appliquant p fois ce procédé à partir d'une 0-chaîne, on construit un type particulier de p-chaîne Γ, appelé *p-pavé*, défini [1] par

(31.54)
$$\boxed{\int_\Gamma \omega = \int_{a_1}^{b_1} dt_1 \int_{a_2}^{b_2} dt_2 \ldots \int_{a_p}^{b_p} dt_p\ \omega\left(\frac{\partial X}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial t_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial X}{\partial t_p}\right)}$$

à partir d'une application deux fois différentiable F :

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_p \end{bmatrix} \to X$$

du produit d'intervalles $[a, b_1] \times \ldots \times [a_p, b_p]$ dans une variété ;

[1] On peut dans cette formule changer arbitrairement l'ordre des intégrations : nous ne faisons pas d'hypothèse sur le signe des différences $b_1 - a_1, \ldots b_p - a_p$.

(31.55) ♂ Le *support* de Γ est contenu dans l'image par F de ce parallélépipède ;

(31.56) ♂ Le *bord* d'un p-pavé Γ est une somme de $[p-1]$-pavés (au nombre de $2p$) ; il vient en effet :

(31.57)
$$\begin{aligned}\int_{\Gamma\nabla} \theta = &\left[\int_{a_2}^{b_2} dt_2 \ldots \int_{a_p}^{b_p} dt_p\ \theta\left(\frac{\partial X}{\partial t_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial X}{\partial t_p}\right)\right]_{t_1=a_1}^{t_1=b_1} \\ &- \left[\int_{a_1}^{b_1} dt_1 \int_{a_2}^{b_2} dt_2 \ldots \int_{a_p}^{b_p} dt_p\ \theta\left(\frac{\partial X}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial t_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial X}{\partial t_p}\right)\right]_{t_2=a_2}^{t_2=b_2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [-1]^{p-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} dt_1 \ldots \int_{a_{p-1}}^{b_{p-1}} dt_{p-1}\ \theta\left(\frac{\partial X}{\partial t_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial X}{\partial t_{p-1}}\right)\right]_{t_p=a_p}^{t_p=b_p}\end{aligned}$$

en désignant, selon l'usage, par la notation $[\xi]_{t=a}^{t=b}$ la différence des valeurs $[\xi]_{t=b} - [\xi]_{t=a}$.

Dans le cas $p = 1$, l'intégrale $\int_\Gamma \omega$ s'appelle une *intégrale curviligne ;* on a simplement

(31.58)
$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega . \frac{dX}{dt} dt \qquad [\omega = \text{covecteur}]$$

ce qui permet d'employer la notation usuelle

(31.59)
$$\int_\Gamma \omega . dX$$

dans ce cas, l'expression (31.57) du bord se réduit à :

(31.60)
$$\int_{\Gamma\nabla} u = [u]_{t=a}^{t=b} \qquad [u = \text{scalaire}]$$

(31.61) — Soit $[X \to \omega]$ un champ continu *non nul* de p-formes d'une variété V ; il résulte évidemment de (31.54) qu'il existe un p-pavé Γ tel que

$$\int_\Gamma \omega \neq 0\,;$$

on dit que les p-pavés (donc à fortiori les p-chaînes) forment un ensemble *séparant* d'opérateurs linéaires sur l'espace vectoriel des champs continus de p-formes ; cette remarque permet de *prolonger l'opération de dérivation extérieure* en posant

(31.62) $$[\nabla\theta \equiv \omega] \Leftrightarrow \left[\int_C \omega = \int_{C\nabla} \theta \text{ pour toute } p\text{-chaîne } C\right]$$

cette opération ∇ prolongée est *linéaire ;* l'existence de $\nabla\theta$ entraîne l'*existence* et la *nullité* de $\nabla\nabla\theta$.

Intégrale d'une densité.

(31.63) — Considérons une variété V *de dimension* n, et un n-pavé Γ (cf. (31.54)) :

$$\int_\Gamma \omega \equiv \int_{a^1}^{b^1} dx^1 \int_{a^2}^{b^2} dx^2 \ldots \int_{a^n}^{b^n} dx^n\, \omega\left(\frac{\partial X}{\partial x^1}\right) \ldots \left(\frac{\partial X}{\partial x^n}\right)$$

tel que l'application $x \to X$ (1) soit la restriction d'une *carte* F au parallélépipède $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$; nous dirons alors que Γ est un *pavé naturel.*

♁ le support K de Γ est alors l'image de ce parallélogramme par F.

(1) On pose

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^n \end{bmatrix}$$

— Nous pouvons définir, au voisinage de K, un champ continu d'*orientations* (cf. (24.30)), en posant

(31.64) $$\begin{cases} \text{soit } f\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right) \equiv +1, \\ \text{soit } f\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}\right) \equiv -1\,; \end{cases}$$

alors, à tout champ continu de *densités* (cf. (24.34)) :

$$X \to \rho$$

on peut faire correspondre un champ continu de n-formes $X \to \omega$, tel que

(31.65) $$\omega(S_1)(S_2) \ldots (S_n) \equiv f(S)\rho(S)$$

pour toute *base naturelle* S ; l'intégrale

$$\int_\Gamma \omega$$

ne dépend évidemment que de Γ, du champ $[X \to \rho]$, et du champ $[X \to f]$; on peut éliminer l'arbitraire de f en postulant la condition

(31.66) $$[\rho \text{ positif } (^1)] \Rightarrow \left[\int_\Gamma \omega > 0\right];$$

on constate en effet que cette condition revient à résoudre le dilemme (31.64) par la formule

(31.67) $$f\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) \equiv \text{signe } ([b^1 - a^1][b^2 - a^2] \ldots [b^n - a^n])$$

(1) On rappelle que la densité ρ est dite *positive* si $\rho(S) > 0$ pour toute base naturelle S.

(31.68) — Moyennant cette condition (31.66), l'intégrale $\int \omega$ ne dépend que de Γ et du champ de densités $[X \to \rho]$; on l'appellera *intégrale de la densité* ρ *sur le pavé naturel* Γ, et on la notera

$$\int_\Gamma \rho$$

(31.69) — Soit maintenant $[X \to \rho]$ un champ continu de densités, tel que $\rho = 0$ si X n'appartient pas à un certain compact (¹) ; en utilisant une partition de l'unité, ó on peut trouver une décomposition finie

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_N$$

telle que chaque champ $[X \to \rho_j]$ soit continu sur V et nul en dehors du support d'un pavé naturel Γ_j ; ó la somme

$$\int_{\Gamma_1} \rho_1 + \int_{\Gamma_2} \rho_2 + \ldots + \int_{\Gamma_N} \rho_N$$

ne dépend pas du choix des ρ_j et des Γ_j ; on l'appellera *intégrale de la densité* ρ (à support compact) *sur la variété* V, et on la notera

(31.70)
$$\int_V \rho$$

Théorème :

ó

(31.71) Si A est un glissement global (3.4) de la variété V, et si on désigne par $[X \to \rho^*]$ l'image par A du champ de densités à support compact $[X \to \rho]$, on a :

$$\int_V \rho^* = \int_V \rho$$

(¹) Il existe alors un *plus petit compact* ayant cette propriété : on l'appelle *support* du champ $[X \to \rho]$, et on dit que ρ est une « densité à support compact ».

Ce théorème contient comme cas particulier la formule de *changement de variable dans les intégrales multiples*, compte tenu de la formule (24.35) qui donne la variance des densités :

(31.72)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx^1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx^n\, f(x^1, \ldots x^n)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy^1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dy^n\, f(x^1, \ldots x^n) \times \left| \det\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right) \right|$$

avec $X = \begin{bmatrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y^1 \\ \ldots \\ y^n \end{bmatrix}$ $Y = A(X)$

A = glissement global de R^n.

— On vérifie immédiatement la règle :

(31.73)
$$[\rho \geqslant 0 \text{ pour tout X}] \Rightarrow \begin{cases} \text{ou } \int_V \rho > 0 \\ \text{ou } \rho = 0 \end{cases}$$

qui permet de *normer* l'espace vectoriel des champs continus de densités à support compact en posant

(31.74)
$$\|g\| = \int_V |g(X)|$$

Par *complétion*, on définit aisément les champs *sommables* de densités sur une variété V.