

Modelo cosmológico Janus

Universo bimétrico: perspectivas y retos

Hicham ZEJLI¹

¹ Ingeniero diplomado por ENSISA - hicham.zejli@manaty.net

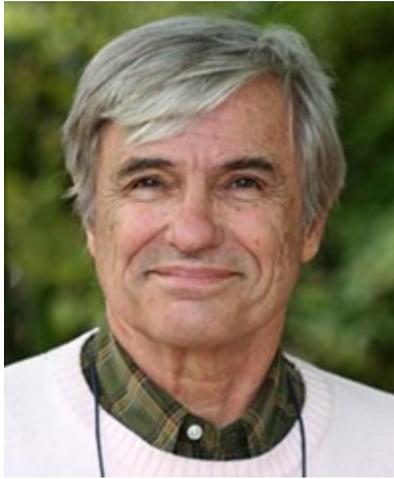
Índice

Prólogo de Jean-Pierre Petit (Francia).....	5
1 Introducción.....	13
1.1 Presentación del contexto y objetivos del libro	13
1.2 Breve introducción al modelo cosmológico de Janus y su importancia	13
2 Fundamentos teóricos	15
2.1 La ley de gravitación de Newton.....	15
2.2 Introducción a la relatividad especial.....	15
2.2.1 Tiempo-espacio y tiempo propio de Minkowski.....	15
2.2.2 La velocidad de la luz como límite.....	17
2.2.3 Conceptos fundamentales.....	17
2.2.4 Equivalencia masa - energía.....	17
2.3 Introducción a la relatividad general	18
2.3.1 Una revolución en la física	18
2.3.2 Efectos observables y confirmaciones experimentales.....	19
2.3.3 Geometría tiempo-espacio y ecuaciones geodésicas.....	21
Marco inercial y coordenadas	21
Transformación coordinada hacia un marco de referencia de laboratorio acelerado ...	22
2.3.4 Tensores métricos.....	24
2.3.5 Símbolos Christoffel	26
2.3.6 Aplicación de la ecuación geodésica en el límite de campo débil.....	32
2.3.7 Las soluciones de Karl Schwarzschild y Ludwig Flamm.....	36
2.3.8 Construcción de geodésicas para la métrica exterior de Schwarzschild	38
2.3.9 La solución Roy Kerr	44
2.4 La obra de Andrei Sájarov y Jean-Marie Souriau.....	45
2.5 Enfoque bimétrico introducido por la geometría hiperbólica de Riemann	46
3 Modelo cosmológico Janus	49
3.1 Descripción.....	49
3.2 Implicaciones.....	50
3.3 El repelente dipolar.....	58
3.3.1 Introducción.....	58
3.3.2 Algunos intentos de interpretación.....	58

3.3.3	Interpretación por lagunas de materia oscura	59
3.3.4	Interpretación según el modelo cosmológico de Janus	60
3.3.5	Perspectivas de futuro.....	79
4	Contribución a la cosmología y la física de partículas	79
4.1	Introducción a los grupos dinámicos	79
4.2	Diversas simetrías asociadas a cada operador de inversión.....	82
4.3	Grupo de Dinámica de Lorentz	83
4.4	Grupo Dinámico de Poincaré Restringido	84
4.5	Grupos dinámicos restringidos de Kaluza y Janus	84
4.6	Janus Dynamic Group	84
4.7	Implicaciones.....	87
5	Interpretación alternativa del modelo de agujero de gusano acoplado a una fuente blanca como <i>membrana unidireccional</i>	89
5.1	Soluciones de la ecuación de Einstein que reflejan diferentes topologías	89
5.2	La hipótesis de <i>la estaticidad</i> : ausencia del término cruzado $dr dt$	93
5.3	Construcción de una solución infinita geométrica lorentziana de dos láminas	93
5.3.1	Simetría T	93
5.3.2	Simetría P	94
5.3.3	Identificación de las dos hojas	95
5.4	Otra representación de esta geometría.....	96
5.5	Conclusión.....	97
5.6	Anexo	98
6	Interpretación topológica del modelo	100
6.1	Definición	100
6.2	Modelo de agujero de gusano.....	100
6.3	Modelo del Universo	101
7	Interpretación alternativa de los objetos supermasivos subcríticos M87 y Sagitario A*. 107	
7.1	Introducción.....	107
7.2	Interpretación alternativa del fenómeno	111
7.2.1	Comparación de criticidades físicas y geométricas	111
7.2.2	Desplazamiento gravitatorio próximo a la criticidad física.....	112
7.2.3	Variación de la velocidad de la luz y la presión en plasmas de densidad constante	115
7.3	Conclusión.....	116

8	Desafíos y debates	117
8.1	Retos en la comunicación y aceptación del modelo	117
8.2	Discusión de críticas y respuestas.....	118
	Respuesta de <i>Gravitación y Cosmología</i>	118
	Mi respuesta a este crítico	119
	Análisis crítico de las devoluciones de <i>Astronomische Nachrichten</i>	120
9	Conclusión y debate	122
	Bibliografía.....	124

Prólogo de Jean-Pierre Petit (Francia)



El año es 2024. Haz las cuentas. Yo nací en 1937. Cuando escriba estas líneas, tendré 87 años. El tiempo pasa tan deprisa que, cuando usted lea esto, puede que yo ya no esté vivo. Estoy escribiendo estas páginas, y creo que Hicham siente lo mismo, como si lanzara una botella al mar, que contiene un mensaje de apelación. Mientras escribo estas líneas, el equipo de Janus se reduce a tres hombres. Aparte de Hicham, nacido en 1979, hay un joven matemático, David, nacido en 1985, y eso es todo. En 2022, yo era el único que llevaba cuarenta años al frente de este proyecto Janus. Estos dos se unieron a mí tras escuchar una conferencia que di en enero de 2023 en París.

Tengo ganas de decir: ¿Qué está pasando en el mundo de la ciencia?

Hace más de un siglo, como usted sabe, el mundo científico dio un vuelco con la súbita aparición de dos nuevas disciplinas: la mecánica cuántica y la cosmología. Así, durante setenta años, los avances científicos se sucedieron a un ritmo fantástico. Los teóricos daban una explicación a un hecho conocido desde hacía mucho tiempo, como el avance del perihelio de Mercurio, un fenómeno que la mecánica newtoniana se había mostrado incapaz de explicar. O bien se trataba de nuevas observaciones, como el descubrimiento de la expansión del universo, que el ruso Alexander Friedman se apresuró a explicar produciendo la primera solución inestable a la ecuación introducida por Einstein en 1915, que ahora constituye la base de esta nueva visión del mundo, la relatividad general.

A veces los teóricos aportan una nueva visión, proponiendo objetos extraños que utilizan para que sus cálculos sean más equilibrados. Un ejemplo es la antimateria, cuya existencia conjeturó el inglés Paul Dirac en 1928.

A título anecdótico, citemos la reacción del danés Niels Bohr, tras leer este artículo:

"Esta teoría parece ideal para capturar elefantes en África. Cuelgas el artículo de Dirac en un árbol. Viene un elefante y lee el artículo de Dirac. Está tan asombrado que es fácil capturarlo.

Pero la Naturaleza demostró ser buena amiga de Dirac y en 1931 confirmó la existencia de antielectrones en los rayos cósmicos. Por aquel entonces, éramos incapaces de recrear esta antimateria en los colisionadores de partículas. Por tanto, fueron los fotones gamma de las profundidades del cosmos los que se transformaron en un par electrón-antielectrón, un objeto conocido como positrón.

Esta revolución, descrita como un cambio de paradigma, comenzó en 1895 con los descubrimientos de Conrad Röntgen, Henri Becquerel y J.J. Thomson, que anunciaron la espectacular entrada de las partículas y los fenómenos atómicos en la escena científica. Durante décadas, los teóricos, por un lado, y los experimentadores y observadores, por otro, se asemejaron a dos grupos de purasangres que galopaban codo con codo, unos un poco por delante de otros.

Todo esto continuó durante muy pocas décadas después de la Segunda Guerra Mundial. Entre estos grandes descubrimientos figura el hallazgo accidental en 1967 del fondo cósmico de microondas, una población de fotones de baja energía que aportaba la prueba de que al principio del universo se había producido una fantástica aniquilación de pares materia-antimateria.

A finales de los años sesenta, la preocupación de lo que hoy llamamos cosmólogos consistía simplemente en determinar el valor de la densidad media del universo. Si era superior a 10^{-29} gramos por centímetro cúbico, entonces el universo evoluciona cíclicamente. Tras una fase de expansión, colapsa sobre sí mismo, produciendo un Big Crunch. Si esta densidad es menor, entonces en el futuro lejano del universo las galaxias se alejarán unas de otras, indefinidamente, a velocidades que se harán constantes. Y si esta densidad fuera igual a este valor, entonces digamos que la evolución se sitúa entre estos dos extremos.

Lo recuerdo perfectamente: fue en esa época cuando comencé mi carrera investigadora, a finales de los años sesenta.

¿Y ahora qué?

Rápidamente, la mecánica se volvió loca y todo fue de mal en peor. Los teóricos de la física de partículas, que surgió con el siglo gracias al aumento de las energías puestas en juego en los aceleradores, predijeron la aparición de nuevos objetos, a los que llamaron superpartículas.

Pero no pasó nada.

A principios de los años 80, para explicar la velocidad a la que giran las estrellas en las galaxias y por qué la fuerza centrífuga no las hace explotar, se propuso la existencia de la materia oscura, que representa cuatro quintas partes de la masa total del universo.

En 1989, las observaciones realizadas por el satélite COBE revelaron la extrema homogeneidad del universo primitivo. Para justificarlo, un joven ruso, Andrei Linde, propuso su teoría de la inflación, según la cual el universo, cuando sólo tenía unos segundos de edad, experimentó una súbita expansión por un factor de uno. 10^{-33} segundos, experimentó una expansión repentina por un factor de 10^{26} . Esto fue causado por un nuevo campo formado por nuevas partículas, conocidas como inflatones. En la actualidad, existen tantos modelos de inflatones como investigadores especializados en este campo.

En 2011, se concedió un Premio Nobel por otro descubrimiento: el de la aceleración de la expansión cósmica, atribuida a la energía oscura. Traduciendo su importancia mediante la expresión de Einstein $E = mc^2$ esta vez el 75% del contenido cósmico escapa a la observación.

En 2024, cuando escribo estas líneas, no existe ningún modelo creíble de energía oscura. Si hacemos cuentas, la materia ordinaria susceptible de observación representa actualmente sólo el 4% de la sopa cósmica.

Se han propuesto varios candidatos para la materia oscura, siendo el principal el neutralino, representante de la hipotética familia de las superpartículas. Sin embargo, aparte de que es imposible hacerlo aparecer en potentes colisionadores, escapa a todos los intentos de detección en costosos experimentos realizados en túneles y minas, protegidos de la radiación cósmica por una gruesa capa de roca.

¿Y en el plano teórico?

A principios de la década de 1970, cuando la falta de resultados de los experimentos de física de altas energías provocó un nuevo cambio de paradigma, un grupo de investigadores propuso representar tanto las partículas materiales como las partículas asociadas a la radiación mediante un nuevo modelo formado por cuerdas vibrantes, abiertas o cerradas. La mayoría de los teóricos adoptaron lo que consideraban una dirección nueva y prometedora. Se crearon puestos de investigación y docencia en todos los países. Se formaron equipos. Los que estaban en el centro de este movimiento llegaron incluso a soñar con construir una

teoría del todo. Esta corriente de pensamiento dio lugar a montañas de artículos y tesis doctorales.

¿Cuál es la situación en los albores del tercer milenio?

Nada: La montaña da a luz a un ratón.

La situación actual recuerda al cuento de Hans Christian Andersen "*El traje nuevo del emperador*". Cuando, al final del cuento, un niño escribe: "*¡Está desnudo!*".

El libro de Hicham es la historia de un cambio de paradigma que puede resumirse en una frase: *El universo está formado por masas positivas y negativas*.

Después de todo, ¿por qué no?

Pero esta idea es como un hilo, que sobresale. Si tiras de este hilo, se forma una cuerda. Tiras del hilo y se une una cuerda. Tiras de la cuerda y lo que sigue es un cable pesado, cuyo tirón hace temblar el edificio.

¿Qué edificio?

La sacrosanta relatividad general de Albert Einstein, cuya ecuación está grabada en piedra en los institutos de física de todo el mundo.

¿Significa esto que la teoría es errónea?

No. Es sólo una cara de la moneda. Tiene que integrarse en un sistema de dos ecuaciones de campo acopladas. En las páginas de este libro, encontrará todo lo que ha surgido de esta idea sacrílega.

En enero de 2023, tras haber sido la única persona en llevar a cabo este gran proyecto durante cuarenta años, di una conferencia en París, a la que asistieron David e Hicham.

David es un joven matemático. Aunque tiene una tesis doctoral, no le atraen las presiones de la investigación y prefiere enseñar matemáticas en la universidad.

A veces se dice que son los investigadores quienes se apropian de las ideas. En realidad, ocurre lo contrario. Son las ideas las que se apoderan de los investigadores. La idea de una topología diferente del universo, base de mi modelo Janus, se ha apoderado de David. Desde hace diez meses, lucha por publicar las bases matemáticas de este modelo en revistas de

física matemática. Tal vez cuando usted lea estas líneas, la publicación de este trabajo se haya abierto por fin camino en esas revistas de primer nivel. Si es así, la trampa estará tendida, con la esperanza de que otros matemáticos se vean sorprendidos.

Las nuevas ideas son como las trampas que se utilizan en África para atrapar monos pequeños. Se pone a su alcance una concha hueca con un agujero. Dentro de la concha hay un trozo de fruta, que les gusta mucho, pero cuyo diámetro es exactamente igual al del agujero. Cuando el mono introduce la mano en el agujero, le resulta imposible sacar tanto la mano como la fruta. Yo mismo fui víctima de una trampa similar hace cuarenta años. Pasaba una idea que se apoderó de mí y se apoderó de mis neuronas. Cuando una idea es lógica, funcional y fructífera, es muy difícil deshacerse de ella. Y, por último, si esa idea es coherente con las observaciones, rechazarla resulta sencillamente imposible, lo que te complica mucho la vida al convertirte en una especie de mutante, un outsider dentro de tu comunidad científica. A menos que decidas permanecer en el laberinto.

En 1959 un inglés, Arthur Koestler, escribió un libro titulado *Los somnambules* (Los sonámbulos). Describía a los científicos como personas que, mientras duermen, caminan con los ojos cerrados y las dos manos extendidas hacia delante, intentando encontrar el camino. Sin saberlo, caminan por un laberinto. Sin saber cómo está construido, a veces pasan por delante de una puerta abierta de par en par, sin poder verla, mientras emprenden un camino que resulta ser un callejón sin salida. Esta idea no es nueva. Una idea similar, más estática, se encuentra en el mito de la caverna de Platón.

Ahora me gustaría hablar de lo que le ocurrió a Hicham Zejli. En enero de 2023, mientras trabajaba como ingeniero informático en una empresa francesa, quedó intrigado por el contenido de la conferencia que yo daba en París sobre mi modelo cosmológico Janus. Entonces vio la treintena de vídeos que había creado en 2017 y leyó todos los libros sobre el tema, para presentar las principales características de este modelo. Rehace todos los cálculos que encuentra en los archivos pdf que pongo en Internet y que acompañan a mis vídeos. Y entonces se cierra la trampa.

Si lees su libro, ¡cuidado! Usted mismo puede ser víctima de él. Estas páginas pueden llevarle a escalar una de las paredes del laberinto, abriendo los ojos. El mundo de la ciencia le parecerá entonces diferente. Como le ocurrió a Hicham, de repente verá a personas, a veces galardonadas con los premios más prestigiosos, que deambulan como sonámbulos, dando vueltas y vueltas en un bucle del laberinto. Modelos que han sido aceptados por quienes componen la llamada comunidad científica aparecerán entonces ante usted como la consecuencia obvia de flagrantes errores de cálculo. Verás cómo estos sonámbulos se pasan una y otra vez por el forro nuevos caminos abiertos de par en par, magníficamente acordes con una masa de observaciones, incapaces de verlos, aferrados a ideas que no son más que tablones, podridos, febrilmente clavados en las brechas que los escollos de la cruda realidad han provocado en un Modelo Estándar que hace aguas por todos lados.

Y querrás gritar, como el personaje de Andersen: "*¡El rey está desnudo!*"

El trabajo que Hicham ha realizado en menos de un año es considerable, y ello a pesar de que lo ha hecho todo al margen de sus actividades profesionales, en lo que podría describirse como su tiempo libre. En doce meses, ha comprendido y asimilado en profundidad, más que superficialmente, una masa asombrosa de cosas relacionadas con las diferentes áreas afectadas por mi modelo Janus. Nunca he visto a nadie tragar y digerir tanto, tan complejo, en tan poco tiempo.

Convertido en el primer cronista de esta fantástica aventura que es el modelo Janus y todo lo que conlleva, da testimonio de ello en este libro, que había que escribir. Lleva ya meses participando activamente en la redacción de artículos y no quiere perderse nada de esta aventura. Más que un simple testigo, quiere ser uno de los protagonistas, y nosotros queremos que lo sea, aportando sus ideas y sus contribuciones personales al edificio. Para garantizar la mayor difusión posible, el libro que ha escrito está disponible como pdf de descarga gratuita en todos los idiomas, y debe seguir desarrollándose con este espíritu. El conocimiento tiene algo especial: una vez que lo regalas, no puedes recuperarlo, y hasta cierto punto es difícil hacerlo tuyo.

La imagen es la de tres hombres encaramados a una balsa improvisada, deslizando mensajes en botellas en diferentes idiomas, entregándolos uno tras otro a las azarosas corrientes del mar. Puede que yo ya no esté vivo cuando usted lea estas líneas. El tiempo pasa muy deprisa. ¿Qué será de todo esto? No lo sé.

Tengo la vaga sensación de que la humanidad tiene hoy una cita con su destino, que más allá de este modelo cosmológico está tomando forma una visión diferente, aún más vasta, del universo. Para ilustrarlo, citaré el final del discurso de aceptación del Premio Nobel de la Paz de Andréi Sájarov en 1975. Palabras que hago mías:

"Hace miles de años, las tribus humanas sufrían grandes penurias en su lucha por la existencia. Entonces era importante no sólo saber blandir una porra, sino poseer la capacidad de pensar con inteligencia, tener en cuenta los conocimientos y la experiencia acumulados por la tribu y desarrollar los vínculos que sentarían las bases de la cooperación con otras tribus. Hoy en día, la raza humana se enfrenta a una prueba similar. Podrían existir varias civilizaciones en el espacio infinito, incluidas sociedades que podrían ser más sabias y "eficientes" que la nuestra. Apoyo la hipótesis cosmológica de que el desarrollo del universo se repite infinitas veces, según características esenciales. Otras civilizaciones, incluidas algunas de las más "exitosas", están inscritas infinitas veces en las páginas "siguientes" o "anteriores" del Libro del Universo. Sin embargo, no debemos minimizar nuestros esfuerzos sagrados en este mundo, donde como débiles luces en la oscuridad, hemos emergido por un momento de la nada de la oscura inconsciencia a la existencia material. Debemos respetar las exigencias de la razón y crear una vida digna de nosotros mismos y de los propósitos que apenas percibimos."

Jean-Pierre Petit, ciudadano del mundo - jean-pierre.petit@manaty.net



Hicham ZEJLI - 22 de septiembre de 1979 - Nacionalidad francesa

1 Introducción

1.1 Presentación del contexto y objetivos del libro

En el panorama actual de la cosmología y la física teórica, la exploración de nuevos modelos para explicar los fenómenos observados en nuestro universo sigue siendo un área de investigación viva y controvertida. Este libro se propone explorar y presentar un modelo cosmológico innovador y revolucionario, el Modelo Cosmológico de Janus (MCJ), desarrollado por el físico Dr. Jean-Pierre Petit.

Como ingeniero con formación avanzada en matemáticas y física, he identificado en el estudio del Modelo Cosmológico de Janus un enfoque innovador e intelectualmente gratificante para explorar e interpretar algunos de los fenómenos más enigmáticos del universo. Este enfoque también allana el camino para el desarrollo de muchas aplicaciones prácticas a escala local, basadas en los principios fundamentales derivados de este modelo.

Este libro tiene dos objetivos principales:

En primer lugar, ofrecer una explicación detallada del Modelo Cosmológico de Janus, sus fundamentos y sus implicaciones a través de ciertos estudios, accesibles a científicos con una formación similar a la mía, es decir, un nivel avanzado en matemáticas y física teórica.

En segundo lugar, a pesar de la intensa, gratificante y diversa colaboración en el seno de nuestro equipo, me gustaría destacar el marcado contraste provocado por la falta de comunicación con los revisores consultados por las principales revistas científicas arbitradas. Esta situación pone de manifiesto las dificultades que pueden encontrar las ideas innovadoras para surgir y desarrollarse sin un diálogo significativo y constructivo entre los investigadores.

1.2 Breve introducción al modelo cosmológico de Janus y su importancia

El modelo cosmológico Janus destaca en el panorama de la física teórica por su audaz propuesta: describir el universo como una variedad riemanniana con dos métricas. Esta construcción se basa en la teoría de la relatividad general de Einstein e incorpora elementos de la física de partículas y la geometría simpléctica. El modelo hunde sus raíces en los trabajos de Andrei Sakharov y Jean-Marie Souriau, que establecieron un vínculo entre la inversión del tiempo, la inversión de la energía y, en consecuencia, la inversión de la masa.

Una de las principales aportaciones del modelo es su capacidad para abordar el problema de la asimetría bariónica del universo. Esta cuestión, en el centro de los debates actuales en cosmología, se refiere al predominio observado de la materia sobre la antimateria, desafiando las predicciones del modelo del Big Bang. El modelo cosmológico Janus ofrece una nueva perspectiva de este problema al postular la existencia de un universo bidimensional surgido de una misma singularidad, dominado por la materia y la antimateria. La

originalidad del modelo reside también en su enfoque bimétrico del universo, donde dos "capas" del espacio-tiempo interactúan por efecto gravitatorio, ofreciendo explicaciones alternativas a fenómenos como la energía y la materia oscuras, y abriendo potencialmente nuevas comprensiones de los viajes interestelares.

En resumen, este libro pretende presentar este modelo como un enfoque innovador, que desafía las perspectivas actuales de la cosmología y la física teórica, e invita a una profunda reflexión sobre posibilidades inexploradas para nuestra comprensión del universo.

2 Fundamentos teóricos

2.1 La ley de la gravitación de Newton

La ley de Newton, formulada en el espacio euclidiano, establece que cuando una masa m está sometida a la influencia de la fuerza gravitatoria G generada por otra masa M esta fuerza F es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d que separa las dos masas. Se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2}$$

Cuanto mayor es la masa, mayor es la fuerza, pero esta fuerza disminuye rápidamente a medida que aumenta la distancia debido al término d^2 en el denominador. Esta ley es esencial para comprender la gravedad y los movimientos de los objetos celestes.

En física, esta ley de la gravitación ha sido fundamental para comprender las interacciones gravitatorias entre los cuerpos celestes, desde la Tierra hasta los planetas y las estrellas. Sigue siendo una ley fundamental de la mecánica clásica y ha desempeñado un papel crucial en el desarrollo de la astronomía y la astrofísica. También ha sido confirmada por numerosas observaciones y experimentos a lo largo de los siglos, reforzando su validez en nuestra comprensión del universo. Sin embargo

, aunque la ley de la gravitación de Newton demostró ser extremadamente poderosa y precisa en muchos escenarios, empezó a mostrar sus limitaciones cuando se aplicaba a situaciones que implicaban velocidades cercanas a la de la luz o fenómenos a escala astronómica. Este fue el punto de partida para la aparición de la Teoría de la Relatividad Especial de Albert Einstein, que marcó un cambio de paradigma en nuestra comprensión de los conceptos fundamentales de espacio, tiempo y gravitación. En la siguiente sección, profundizaremos en los principios fundamentales de la Relatividad Especial, que sentarán las bases para nuestra posterior exploración de la Relatividad General. Esto nos conducirá a una comprensión más profunda de las complejidades del cosmos.

2.2 Introducción a la relatividad especial

A principios del siglo 20^{ème}, la física experimentó una revolución conceptual que puso en tela de juicio los fundamentos establecidos por Sir Isaac Newton en el siglo 17^{ème}. A medida que las observaciones y los experimentos se hacían cada vez más precisos, empezaron a aparecer anomalías al estudiar velocidades cercanas a la de la luz y en entornos cósmicos extremos. En este contexto entró en escena la Relatividad Especial de Albert Einstein, que trastocó nuestra concepción tradicional del espacio, el tiempo y la gravedad.

2.2.1 Tiempo-espacio y tiempo propio de Minkowski

La Relatividad Especial nos invita a abandonar la idea de que el universo se desarrolla en un espacio euclidiano tridimensional en el que el tiempo es una entidad separada. En su lugar, propone un modelo en el que residimos en una hipersuperficie de cuatro dimensiones, en la que las tres dimensiones del espacio son perpendiculares a una dimensión del tiempo. Esta fusión de espacio y tiempo forma lo que se conoce como espacio-tiempo de Minkowski, con una firma métrica $(- + + +)$ En otras palabras, la firma métrica es una característica

importante del espaciotiempo que indica cómo se combinan los intervalos de tiempo y espacio en las ecuaciones de la relatividad especial. En esta firma $(-+++)$ el primer término corresponde al intervalo de tiempo, que se resta de los tres términos siguientes correspondientes a los intervalos de espacio. Esto significa que el tiempo tiene signo negativo en la métrica, mientras que las tres dimensiones espaciales tienen signo positivo. Este signo específico es crucial para comprender cómo se miden las distancias y los intervalos de tiempo en la relatividad especial.

Para comprender mejor este concepto, imaginemos un punto M moviéndose en este espacio-tiempo descrito por dos coordenadas: tiempo (t) y la posición espacial (x). A medida que este punto se desplaza, a un punto vecino M' corresponde a valores ligeramente modificados: $(t + dt, x + dx)$, donde dt y dx representan pequeños incrementos de tiempo y espacio. Si consideramos que este incremento se produce a lo largo de una trayectoria descrita por $x = ct$ (donde c es la velocidad de la luz), entonces $dx = c dt$.

En este punto, introducimos el concepto de *tiempo limpio*. La cantidad desconocida como tiempo propio, es una medida de tiempo que rige la vida de un objeto que se mueve a velocidad v . Para calcular utilizamos la siguiente ecuación:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

Esta ecuación muestra cómo el tiempo propio (s) está vinculado a los cambios en el tiempo (dt) y en el espacio (dx) cuando un objeto se mueve a la velocidad v . También revela que el tiempo propio puede variar en función de la velocidad y la trayectoria del objeto, dando lugar a fenómenos como la dilatación del tiempo.

En la teoría de la relatividad especial de Einstein, el tiempo no es absoluto, sino que depende de la velocidad relativa del observador. El siguiente desarrollo matemático describe la relación entre el tiempo propio τ que es el tiempo medido por el reloj en movimiento (a bordo de la nave espacial), y el tiempo coordinado t que es el tiempo medido por el reloj en tierra (en reposo respecto al observador):

$$\begin{aligned} s = c\tau &\Rightarrow ds = c d\tau && \Rightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \\ &\Rightarrow d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 && \Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} && \Rightarrow \tau = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Esto implica que en un escenario en el que t representa el tiempo medido por un observador inmóvil equipado con un reloj en el suelo, y v es la velocidad de un objeto equipado con un reloj a bordo que se mueve a esta velocidad con respecto a esta supuesta inmovilidad, entonces el tiempo propio τ en este objeto se verá afectado por la dilatación temporal descrita por $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ conocido como *factor de Lorentz*.

2.2.2 La velocidad de la luz como límite

Es importante señalar que, en este espacio-tiempo, la velocidad de la luz está limitada por las propiedades del espacio-tiempo (y su contenido) en el que se propaga.

Si suponemos que x es la coordenada espacial t es la coordenada temporal, y c es la velocidad de la luz, entonces podemos definir una velocidad v mediante la expresión $v = \frac{dx}{dt}$.

Suponiendo que la variación del tiempo propio sea siempre mayor o igual que 0, es decir $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \geq 0$ se deduce que la velocidad de la luz en el vacío es la velocidad límite para los objetos en movimiento con masa en reposo positiva, ya que $v \leq c$. Los fotones, en cambio, siguen trayectorias para las que $v = c$ lo que conduce a propiedades únicas asociadas a la luz.

La Relatividad Especial es una teoría que se limita al estudio de los sistemas de referencia inerciales, en concreto los que se encuentran en movimiento rectilíneo uniforme (en espacios sin curvatura, moviéndose en línea recta a velocidad constante).

2.2.3 Conceptos fundamentales

La relatividad especial se basa principalmente en tres conceptos:

- **Postulado de la invariancia de la velocidad de la luz:** Este postulado afirma que la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal y permanece invariable para todos los observadores, sea cual sea su movimiento relativo. En otras palabras, la velocidad de la luz no puede sumarse ni restarse a la velocidad de un observador. Esta idea fundamental fue confirmada por el famoso experimento Michelson-Morley (Michelson y Morley 1887).
- **Principio cosmológico:** El principio cosmológico postula que el universo es homogéneo e isótropo. Esto significa que sus propiedades son uniformes e idénticas en todas las direcciones y a todas las escalas. Este principio permite extender la aplicación de las leyes de la relatividad especial a la escala cósmica, al considerar el universo como un todo.
- **Principio de relatividad especial:** El principio de relatividad especial afirma que las leyes de la física son coherentes en todos los marcos de referencia inerciales. Los marcos inerciales son aquellos que se mueven a una velocidad constante entre sí. Este principio generaliza el concepto de relatividad de Galileo y cuestiona la noción de marco de referencia absoluto. Demuestra que las leyes de la física siguen siendo coherentes e invariables, sean cuales sean las velocidades relativas de los observadores.

2.2.4 Equivalencia masa-energía

Una de las ecuaciones más emblemáticas de la física es la ecuación de equivalencia masa-energía de Albert Einstein. Esta ecuación significa una profunda conexión entre la masa (m) y la energía (E), revelando que son intercambiables en el universo.

La revolucionaria intuición de Albert Einstein, que condujo a la formulación de esta equivalencia, procede de su teoría de la relatividad especial. En esta teoría, Einstein postuló que la energía y la masa están intrínsecamente unidas, y la ecuación sirve de piedra angular de esta unión.

El concepto central de la ecuación es simple: afirma que la energía (E) de un objeto es directamente proporcional a su masa (m), con la velocidad de la luz en el vacío (c) como constante de proporcionalidad. Matemáticamente, esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$E = mc^2$$

Exploremos esta ecuación con más detalle utilizando un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos un pequeño objeto con una masa de 1 gramo (0,001 kilogramos). Aplicando la ecuación de Einstein, podemos calcular la energía equivalente a esta masa:

$$E = (0.001 \text{ kg}) \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 9 \times 10^{13} \text{ Joules}$$

Esta asombrosa cantidad de energía subraya el profundo impacto de la ecuación (1). Demuestra que una masa pequeña puede producir una enorme cantidad de energía cuando se convierte utilizando esta ecuación. Esta ecuación desempeña un papel fundamental en la comprensión de las reacciones nucleares, como las que se producen en las estrellas y en las centrales nucleares, en las que cambios minúsculos en la masa dan lugar a liberaciones sustanciales de energía.

La ecuación de Einstein, con su capacidad para vincular masa y energía, sigue siendo una piedra angular de la física moderna, que influye profundamente en nuestra comprensión del funcionamiento del universo.

Aunque la Relatividad Especial nos ha permitido explorar aspectos fascinantes del cosmos guiándonos en viajes a velocidades cercanas a la de la luz y revelando cómo se curva el espacio-tiempo en respuesta a nuestro movimiento, está confinada a un marco específico, el de los sistemas de referencia inerciales y el movimiento rectilíneo uniforme. Pero, ¿qué ocurre cuando entra en juego la gravedad? ¿Cómo evoluciona la estructura del espacio-tiempo en presencia de objetos masivos o de una curvatura importante? Aquí es donde entra en juego la Relatividad General de Albert Einstein, en la siguiente sección.

2.3 Introducción a la relatividad general

2.3.1 A revolución de la física

La ley de Newton es una teoría que funciona bien en muchas situaciones, como se explica en el apartado 2.1, pero no puede explicar ciertos fenómenos observados a velocidades cercanas a la de la luz o en presencia de campos gravitatorios intensos. La Relatividad General (RG) de Albert Einstein es una teoría más completa que engloba estos efectos gravitatorios. Piedra angular de la física moderna, la Relatividad General ha revolucionado nuestra comprensión de la gravedad y del universo. Propuesta por Albert Einstein en 1915, esta teoría se basa en el principio de que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, inducida por la presencia de masa y energía. La ecuación de campo de

Einstein, núcleo de esta teoría, describe cómo la materia y la energía influyen en la geometría del espacio-tiempo y, a su vez, cómo esta geometría curvada guía el movimiento de la materia y la energía.

De hecho, la ecuación de campo de Einstein, publicada por primera vez el 25 de noviembre de 1915, es la principal ecuación diferencial parcial de la relatividad general:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Esta curvatura de la geometría en torno a una fuente de materia se interpreta entonces como el campo gravitatorio de dicha fuente. El movimiento de los objetos en este campo se describe de forma muy precisa mediante su ecuación geodésica. La métrica $g_{\mu\nu}$ produce una familia de geodésicas. Obsérvese que las partículas con masa gravitatoria positiva o negativa se comportarían de la misma manera siguiendo las mismas geodésicas cuando son desviadas por el potencial gravitatorio creado por una masa importante M por ejemplo en la gravedad terrestre o solar. Así pues, un objeto masivo, como una estrella, influye en el espacio-tiempo no sólo por su masa, sino también por la energía que emite, como la radiación. En relatividad general, la energía de un objeto -incluida la energía de su masa en reposo representada por mc^2 y cualquier forma adicional de energía, como la radiación, contribuye al campo gravitatorio que produce. Esta contribución combinada de energía y masa es lo que curva el espacio-tiempo alrededor del objeto. Su segundo término tiene en cuenta el contenido del universo en cada punto del espacio-tiempo:

- **Si es distinto de cero**, entonces la solución geométrica que surge de esta ecuación describirá el interior de una masa.
- **Si es cero**, la solución inducida por esta ecuación se referirá a una porción completamente vacía del universo alrededor de esta masa.

2.3.2 Efectos observables y confirmación experimental

Entre los fenómenos explicados por la RG se encuentra la desviación del plano de rotación del planeta Mercurio cuando está más cerca del Sol, conocida como precesión del perihelio. Este fenómeno se midió con una precisión de 45 segundos de arco por siglo, un valor que no podía explicar la ley de Newton.

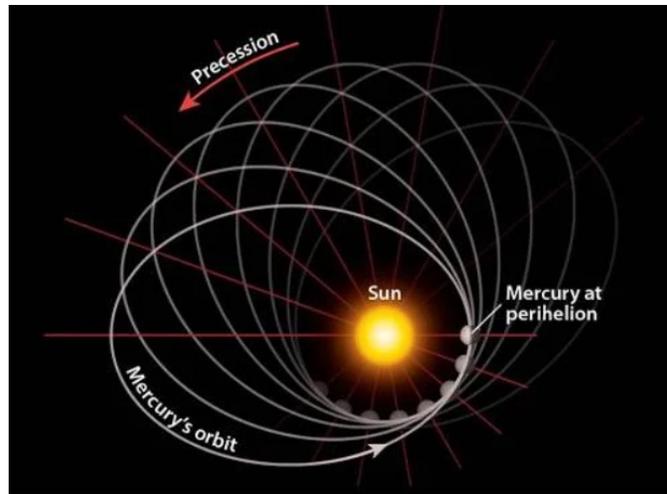


Figura 2.1 - Precesión del perihelio de Mercurio

Otro fenómeno observado es la aparente curvatura de la luz alrededor del Sol. Durante el eclipse solar de 1919, Sir Arthur Eddington observó que los rayos de luz parecían curvarse alrededor del Sol. En realidad, estos rayos de luz siguen las trayectorias más cortas en el espacio-tiempo curvado, conocidas como geodésicas. Esta aparente curvatura de la luz se debe a la deformación del espacio-tiempo causada por la presencia de masa, un efecto que la RG ha explicado con precisión ((Dyson, Eddington y Davidson 1920)).

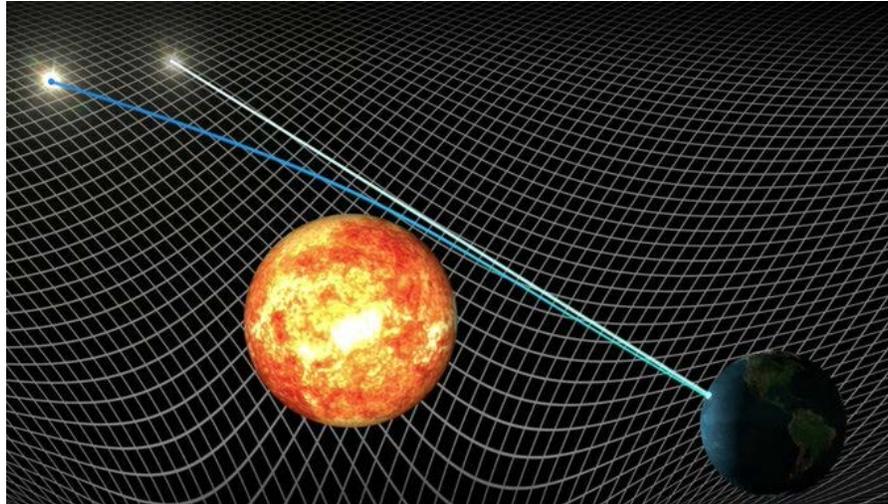


Figura 2.2 - Confirmación de la teoría de Einstein con la curvatura de la luz de las estrellas durante el eclipse solar

Estos fenómenos se consideran no lineales porque sólo pueden explicarse mediante la teoría GR. Sin embargo, en condiciones en las que los efectos relativistas son despreciables, la ley de Newton puede proporcionar aproximaciones válidas. Así pues, la RG ha ampliado nuestra comprensión de la gravedad más allá de los límites de la ley de Newton, allanando

el camino para una mejor comprensión de las interacciones gravitatorias a grandes escalas y a altas velocidades.

2.3.3 Geometría del Espacio-Tiempo & Ecuación de las Geodésicas

Recordemos el principio de equivalencia de Einstein para un marco inercial en caída libre:

"En un campo gravitatorio, siempre es posible en cualquier punto del espacio-tiempo elegir un sistema de coordenadas localmente inercial tal que, en una región suficientemente pequeña, las leyes de la física sean idénticas a las de la ausencia de gravedad".

En este marco de referencia de caída libre, la fuerza de inercia que siente un cuerpo en caída libre anula la fuerza gravitatoria, lo que significa que el objeto no está sometido a ninguna fuerza (estado de ingravidez). Por consiguiente, el marco de inercia es el marco fundamental para estudiar los objetos en interacción (denominado marco de relatividad especial) antes de analizarlos en un segundo marco galileano denominado "*marco de laboratorio*", en el que dichos objetos están sometidos a los efectos de la gravedad. En efecto, este último marco está acelerado hacia arriba ($a = -g$) con respecto al marco de inercia natural (imaginemos que "*el suelo de la Tierra nos acelera hacia arriba*").

En la teoría de la relatividad especial, un marco inercial se describe mediante la métrica de Minkowski, que es una representación matemática del espacio-tiempo plano. Esta métrica se aplica en regiones en las que los efectos de la gravedad están ausentes. En este contexto, las trayectorias de los objetos vienen determinadas por las ecuaciones de movimiento derivadas de los principios de la relatividad especial. Mientras que en la relatividad general se utiliza el término "*geodésica*" para designar el espaciotiempo curvado por la gravedad, en la métrica de Minkowski de la relatividad especial estas trayectorias se describen mejor como líneas rectas que representan un movimiento a velocidad constante. En este marco, los objetos en marcos inerciales se mueven en línea recta a velocidad constante, un caso especial de geodésica en el espaciotiempo plano.

Marco inercial y coordenadas

En primer lugar, situémonos en este marco inercial y definamos las coordenadas de una masa puntual en este marco: Consideramos las coordenadas ξ^α con $\xi^0 = ct$, $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$ para nuestro análisis. Como este cuerpo no está sometido a ninguna fuerza (velocidad constante), podemos deducir que :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

$$d\tau^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Donde τ corresponde a la métrica o intervalo en este espacio, que también podríamos denotar s y es importante señalar que esta métrica es invariante cualquiera que sea el marco de referencia.

Transformación de coordenadas a un marco de referencia de laboratorio acelerado

Apliquemos ahora una transformación de coordenadas en un nuevo sistema de referencia de laboratorio galileano "acelerado hacia arriba" con respecto al sistema de referencia inercial anterior:

$$x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Sin embargo, cada coordenada del nuevo marco galileano depende de las coordenadas del marco inercial y viceversa:

$$x^\mu(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \xi^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Y recuerda que ξ depende de τ :

$$\xi^\mu(\tau)(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Cada parámetro de ξ en el nuevo marco de referencia también depende de τ . Por tanto, podemos deducir que :

$$\frac{d\xi^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^0} + \frac{dx^1}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^1} + \frac{dx^2}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^2} + \frac{dx^3}{d\tau} \frac{\partial \xi^0}{\partial x^3}$$

Esto puede expresarse utilizando la notación sumatoria para índices repetidos :

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

NB: En matemáticas, la notación sumatoria es una forma compacta de representar la suma de una serie de términos. Cuando un subíndice aparece a la vez como subíndice inferior y como subíndice superior en una expresión, esto implica generalmente la suma sobre ese subíndice, lo que significa que se suman todos los valores posibles de ese subíndice. Esta notación se utiliza habitualmente en diversos campos de las matemáticas y la física para simplificar la representación de ecuaciones que implican índices repetidos.

Ahora queremos derivar esta expresión de nuevo para derivar la ecuación geodésica (2), entonces :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \\ \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} &= 0 \end{aligned}$$

Realizar la suma sobre los índices repetidos de la siguiente manera :

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}$$

Tenemos que realizar esta operación:

$$\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) = 0$$

Sin embargo, para $\beta \neq \mu$ las derivadas parciales de una coordenada con respecto a otra coordenada en el mismo sistema de coordenadas son cero (por ejemplo, $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$), y para $\beta = \mu$ la derivada parcial es igual a 1. Esto corresponde al símbolo de Kronecker (δ_μ^β):

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \times \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta$$

NB: Cuando β y μ representan coordenadas diferentes en el mismo sistema de coordenadas, la derivada parcial de β con respecto a μ es cero, ya que esto significa que estas coordenadas son mutuamente independientes en el sistema. Sin embargo, cuando β y μ representan la misma coordenada, la derivada parcial es igual a 1, lo que indica que la coordenada cambia consigo misma, representada por el símbolo δ_μ^β .

Esto nos da :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Sin embargo, si sustituimos μ por β ($\beta = \mu$), entonces $\delta_\mu^\beta = \delta_\beta^\beta = 1$ entonces $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$. Esto da :

$$0 = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$$

Por lo tanto, introduciendo los *símbolos de Christoffel* como sigue:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Podemos deducir la siguiente *ecuación geodésica*:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Esto representa una expresión general para los *símbolos de Christoffel* $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ en términos de las derivadas de las funciones de transformación de coordenadas. Los símbolos de Christoffel, como veremos más adelante, se utilizan en las matemáticas de la relatividad general y la geometría diferencial para describir cómo cambian localmente los sistemas de coordenadas.

¿Qué podemos aprender de esta ecuación geodésica?

- La segunda derivada de las coordenadas en el sistema de referencia galileano "acelerado" ya no es cero, sino que es igual al equivalente de las fuerzas inerciales

aplicadas en relatividad general (en este caso, la gravedad). De (3), podemos deducir :

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Si μ y ν son coordenadas espaciales, su derivada con respecto a τ corresponde a una velocidad.

- Cualquier objeto que se mueva en el sistema de referencia galileano "acelerado" del laboratorio obedecerá esta ecuación cuando esté sometido a la fuerza de la gravedad terrestre.
- La forma de esta ecuación nos da información sobre los caminos más cortos o más largos (extremos) en una superficie curva (variedad). Más concretamente, las geodésicas corresponden a trayectorias estacionarias cuyas propiedades físicas permanecen constantes a lo largo del tiempo (ausencia de fuerzas externas aplicadas).
- Podemos describir la gravedad como un efecto puramente geométrico ligado a las geodésicas recorridas por los objetos en un espacio-tiempo curvado (la forma en que se curva el espacio-tiempo se describe mediante los símbolos de Christoffel). Una analogía sería considerar dos objetos que recorren trayectorias paralelas e idénticas a la misma velocidad desde un punto de la Tierra hacia el Norte; acabarán cruzándose en el Polo Norte debido a la curvatura de la Tierra. Este cruce puede analizarse bien por el hecho de que una fuerza los ha atraído (analogía con la mecánica newtoniana), bien por un efecto puramente geométrico ligado a la curvatura de la Tierra (analogía con la mecánica relativista). Según la relatividad general, la gravedad es pues una curvatura del espacio-tiempo que hace que los objetos en movimiento rectilíneo local sigan estas geodésicas. La relatividad general permite determinar la curvatura del espacio-tiempo en función de sus componentes (materia, energía) y, a continuación, describir las trayectorias de las partículas que se mueven en este espacio-tiempo.
- Los símbolos de Christoffel se calculan a partir de la métrica y sus derivadas parciales, capturando información sobre la curvatura del espaciotiempo. Permiten calcular cómo se ven afectadas las geodésicas por la curvatura del espaciotiempo.

2.3.4 Tensores métricos

Ahora veremos los tensores métricos y cómo se relacionan con los símbolos de Christoffel determinados anteriormente.

Consideremos la métrica de Minkowski descrita utilizando las coordenadas espacio-temporales de un objeto en movimiento en un sistema de referencia inercial, como se muestra en la ecuación (4), y expresada de la siguiente manera:

$$d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2$$

También se puede escribir de esta manera, donde se puede expresar como una suma sobre los índices α y β :

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Esta ecuación utiliza el tensor métrico $\eta_{\alpha\beta}$ del espacio de Minkowski (que describe el espacio-tiempo plano en la relatividad especial) para calcular el intervalo espacio-tiempo $d\tau^2$ en términos de los diferenciales de coordenadas $d\xi^\alpha$ y $d\xi^\beta$. El tensor métrico de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ tiene componentes que son -1 para intervalos similares al tiempo y +1 para intervalos similares al espacio en la diagonal, y 0 fuera de la diagonal como sigue :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Recuerda que las siguientes expresiones representan las reglas de transformación diferencial entre dos sistemas de coordenadas. Muestran cómo un pequeño cambio en el conjunto de coordenadas x^μ y x^ν conduce a un pequeño cambio en otro conjunto de coordenadas ξ^α y ξ^β .

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

$$d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Ahora, si sustituimos estas dos formas diferenciales en la expresión (5), podemos derivar la siguiente expresión:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

De aquí podemos extraer el siguiente tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

El tensor métrico desempeña un papel fundamental en la relatividad general porque determina la geometría del espacio-tiempo y cómo actúa la gravedad entre dos objetos situados en las coordenadas x^μ y x^ν en el mismo sistema de referencia. Permite transformar las coordenadas de estos objetos en la distancia entre ellos, teniendo en cuenta la curvatura local del espacio-tiempo, que puede variar en función de la distribución de la materia y la energía. Contrariamente a la intuición convencional, la distancia entre dos puntos en el espacio-tiempo curvo depende de esta curvatura y puede variar considerablemente. Así pues, el tensor métrico es una herramienta matemática crucial para calcular el intervalo entre dos sucesos, lo que incluye también medir el tiempo transcurrido entre ellos en presencia de un campo gravitatorio.

Dado que los índices μ y ν son mudos y repetidos, están sujetos a la convención de suma de

Einstein y, por tanto, pueden intercambiarse en la expresión del tensor métrico. Esto implica que el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es simétrico, es decir $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

NB: A partir de ahora, tomemos $g^{\mu\nu}$ como la inversa de $g_{\mu\nu}$ que se expresa mediante la siguiente relación con suma sobre el índice repetido α produciendo el símbolo de Kronecker :

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

donde δ_{ν}^{μ} es el símbolo de Kronecker, que, como vimos anteriormente, es igual a 1 cuando $\mu = \nu$ y 0 en caso contrario. Esta relación define la naturaleza de la inversa del tensor métrico en geometría diferencial y relatividad general.

2.3.5 Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel, denominados $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$ se derivan del tensor métrico y proporcionan información esencial sobre la geometría del espacio-tiempo. No son en sí mismos tensores, sino que se derivan del tensor métrico, que es un tensor real.

Para calcular los símbolos de Christoffel, tomamos las derivadas parciales de las componentes del tensor métrico y luego aplicamos una combinación específica de estas derivadas. La fórmula para los símbolos de Christoffel del segundo tipo viene dada por :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

Cada término implica una derivada parcial del tensor métrico con respecto a las coordenadas, y $g^{\beta\alpha}$ es la inversa del tensor métrico, lo que garantiza que estamos sumando sobre los índices apropiados. Como veremos más adelante, los símbolos de Christoffel desempeñan un papel fundamental en la determinación de las geodésicas, que describen la trayectoria de las partículas y la luz en el espaciotiempo curvo y se utilizan en las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General.

Demostración. Expresaremos ahora los símbolos de Christoffel en términos del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Para ello consideramos la derivada parcial de $g_{\mu\nu}$ respecto a las coordenadas x^{λ} . Esta operación introduce las segundas derivadas de las funciones de transformación de coordenadas ξ^{α} que pueden integrarse en la expresión de los símbolos de Christoffel (6).

Antes de comenzar nuestros cálculos, he aquí algunos consejos preliminares para simplificarlos:

- El tensor métrico es simétrico, por lo que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.
- Sustituir ν por α debemos sustituir primero el subíndice mudo existente α por σ .

Obtenemos el tensor métrico de la siguiente manera:

$$g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$

Aplicando la regla del producto para la derivación, y recordando que $\eta_{\sigma\beta}$ es una constante, obtenemos :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \right)$$

Las segundas derivadas parciales esperadas aparecen en el lado derecho de la ecuación (dos veces):

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

Para integrar la expresión del símbolo de Christoffel (6) en esta relación, necesitamos aplicar la siguiente transformación a ambos lados para aislar la derivada parcial e introducir una suma sobre el índice repetido β :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right)$$

Sin embargo, sabemos que :

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma$$

y según (7), este símbolo de Kronecker es igual a 1 cuando $\sigma = \lambda$ entonces :

$$\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Podemos entonces sustituirla en la expresión (8), teniendo cuidado de reformular los índices correspondientes en la nueva expresión de manera similar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \\ \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \end{aligned}$$

NB: No colocamos β en el símbolo de Christoffel porque es un índice sumatorio silencioso en el término donde queremos asignarlo, así que elegiremos otra letra, ρ :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}$$

Por último, podemos deducir de (8) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

Así, la diferenciación del tensor métrico puede expresarse de 3 maneras diferentes (las 2 últimas implican nuevos índices intercambiando ν y μ y sustituyendo μ por α) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho}\Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^\rho + g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\alpha}^\rho$$

Estas tres formas de expresar esta diferenciación nos permiten obtener un resultado simplificado sumando las dos primeras y restando la última: (9a) + (9b) - (9c) :

$$g_{\alpha\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$g^{\beta\alpha}g_{\alpha\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha}$$

$$\delta_\rho^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) g^{\beta\alpha}$$

Así que, finalmente :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Esta expresión del símbolo de Christoffel permite establecer un vínculo entre la curvatura del espacio-tiempo inducida por la fuerza gravitatoria y las derivadas espaciales del tensor métrico. Es esencial para formular las ecuaciones que rigen las geodésicas en la teoría de la relatividad general. \square

Ejemplo de cálculo de los símbolos de Christoffel para una métrica esférica :

En coordenadas esféricas, el elemento de línea ds^2 para un espacio tridimensional se expresa de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1 dx^2 + 2g_{13}dx^1 dx^3 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2 dx^3 + g_{33}(dx^3)^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

donde dr , $d\theta$ y $d\phi$ son los diferenciales de la coordenada radial rel ángulo polar θ y el ángulo acimutal ϕ respectivamente. El tensor métrico correspondiente $g_{\mu\nu}$ en coordenadas esféricas es diagonal y viene dado por :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Demostración. La relación entre coordenadas cartesianas y esféricas puede deducirse de la figura 2.3 :

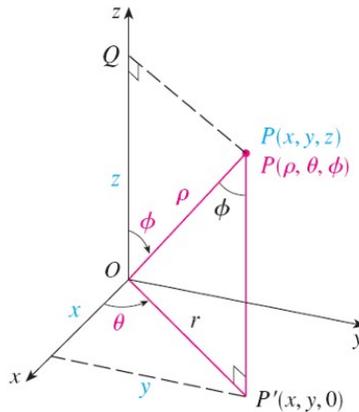


Figura 2.3 - La posición on del punto P viene definida por la distancia ρ y los ángulos θ (colatitud) y ϕ (longitud)

Si consideramos los triángulos OPQ y OPP', tenemos : $z = \rho \cos \phi$, $r = \rho \sin \phi$ donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Por lo tanto :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

Utilizando las notaciones físicas de la figura 2.6, la transición a las coordenadas cartesianas viene dada por :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned}$$

Sin embargo, la métrica en coordenadas cartesianas viene dada por :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Para expresarlo en coordenadas esféricas, sustituimos x , y y z por sus equivalentes en coordenadas esféricas, obteniendo (11). □

Para calcular los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$ primero hallamos la inversa del tensor métrico, que para una métrica diagonal es simplemente :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

Para el tensor métrico dado, calculamos las derivadas parciales necesarias para los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} &= 2r, \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} &= 2r\sin^2(\theta), \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} &= 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta).\end{aligned}$$

Insertando estas derivadas parciales en la fórmula del símbolo de Christoffel (10), las calculamos sumando sobre el índice repetido α . Para el tensor métrico dado, la mayoría de los símbolos de Christoffel serán cero porque es diagonal y depende sólo de r y θ . Los símbolos de Christoffel distintos de cero son :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r\sin^2(\theta) \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot(\theta)\end{aligned}$$

NB:

- El símbolo de Christoffel $\Gamma_{\theta\theta}^r$ se calcula del siguiente modo:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr}\left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}\right)$$

ya que la única derivada distinta de cero de $g_{\theta\theta}$ es con respecto a r . Sustituyendo los valores, obtenemos :

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right) = -r.$$

- Otro ejemplo es el símbolo de Christoffel $\Gamma_{r\theta}^\theta$ que se calcula de la siguiente manera:

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial x^\theta}\right)$$

donde el único término distinto de cero es $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^r}$. Esto nos da :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)(2r) = \frac{1}{r}.$$

Cálculo del tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci

En este espacio esférico, todas las componentes del tensor de Riemann y del tensor de Ricci, así como el escalar de Ricci, son cero, lo que ilustra la geometría de un espacio plano.

Demostración. El tensor de curvatura de Riemann viene definido por la expresión :

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}$$

Tomemos, por ejemplo, los símbolos de Christoffel proporcionados por (12):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Podemos calcular las componentes del tensor de Riemann. Por ejemplo, podemos calcular $R_{r\theta r}^{\theta}$:

$$R_{r\theta r}^{\theta} = \partial_{\theta}\Gamma_{rr}^{\theta} - \partial_r\Gamma_{\theta r}^{\theta} + \Gamma_{\theta\lambda}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\lambda} - \Gamma_{r\lambda}^{\theta}\Gamma_{\theta r}^{\lambda}$$

Así, para calcular la componente del tensor de Riemann $R_{r\theta r}^{\theta}$ tenemos :

- El primer término $\partial_{\theta}\Gamma_{rr}^{\theta}$ es cero porque Γ_{rr}^{θ} es cero.
- El segundo término $\partial_r\Gamma_{\theta r}^{\theta}$ implica la derivada parcial de $\Gamma_{\theta r}^{\theta}$ con respecto a r que es $-\frac{1}{r^2}$.
- El tercer término es la suma λ de $\Gamma_{\theta\lambda}^{\theta}\Gamma_{rr}^{\lambda}$ pero como Γ_{rr}^{λ} es cero para $\lambda \neq r$ este término es cero.
- El cuarto término es la suma sobre λ de $\Gamma_{r\lambda}^{\theta}\Gamma_{\theta r}^{\lambda}$ que para $\lambda = \theta$ da $\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$.

La suma de los dos términos distintos de cero (términos 2 y 4) es :

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

Por lo tanto, el $R_{r\theta r}^{\theta}$ del tensor de Riemann es cero.

El tensor de Ricci, obtenido contrayendo el tensor de Riemann en sus índices primero y tercero, viene dado por :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}$$

Por último, el escalar de Ricci, que es la traza del tensor de Ricci, se calcula como sigue:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

Como el tensor de Riemann es cero, se deduce que el tensor de Ricci y su escalar también son cero. \square

Código de cálculo de Mathematica :

```
(*Importar paquete*)
(*-----*)
Necesidades["OGRe` "]
(*Definición de coordenadas*)
TNNuevasCoordenadas["Esférica", {r, \[Theta], \[Phi]}]
(*Definición del tensor métrico*)TShow@
  TNewMetric["TensorMétricoEsférico", "Esférico",
    DiagonalMatrix[{1, r^2, r^2 Sin[\[Theta]]^2}]]
(*ElementoLínea*)
TLineElement["TensorMétricoEsférico"]
(*Cálculo de los símbolos de Christoffel*)
TList@TCalcChristoffel["TensorMétricoEsférico"] (*Cálculo de los símbolos de
Christoffel*)
(*Cálculo del tensor de Riemann*)
TList@TCalcRiemannTensor["SphericalMetricTensor"] (*Cálculo del tensor de
Riemann*)
(*Cálculo del tensor de Riemann*)
TList@TCalcRicciTensor["SphericalMetricTensor"] (*Cálculo del tensor de
Riemann*)
(*Cálculo de escalares Ricci*)
TList@TCalcRicciScalar["SphericalMetricTensor"] (*Cálculo de escalares
Ricci*)
```

2.3.6 Aplicación de la ecuación geodésica en el límite de campo débil

Escribimos la expresión del símbolo de Christoffel y la ecuación geodésica de la siguiente manera (si $v = 0$ coordenada temporal, en caso contrario una coordenada espacial x, y, z) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$
$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$$

donde

$$\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\sigma,\nu}$$

NB:

- Esta ecuación representa la derivada parcial de la componente del tensor métrico $g_{\mu\sigma}$ con respecto a la coordenada x^{ν} y suele escribirse con una coma seguida del índice de diferenciación, que en este caso es ν . La notación con coma $g_{\mu\sigma,\nu}$ es una abreviatura común en relatividad general para las derivadas parciales de los componentes del tensor.

- En el contexto de la relatividad especial, es habitual utilizar un sistema de unidades en el que la velocidad de la luz c se define como igual a 1 ($c = 1$). Esto simplifica las ecuaciones y facilita la expresión de ciertas cantidades. En este sistema de unidades, las distancias se expresan en unidades de tiempo (por ejemplo, años luz en lugar de metros) debido a la equivalencia $c = 1$. Para ello, el tiempo debe expresarse en segundos, y las unidades de longitud pasan a ser la distancia recorrida por la luz en un segundo, que se expresa en segundos-luz (equivalentes a "años-luz"). Así pues, podemos expresar la métrica de la siguiente manera:

$$ds^2 = d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

No obstante, ahora consideraremos que el tiempo t expresado hasta ahora, será el tiempo propio τ en la expresión de la métrica, para expresarlo de la siguiente manera:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Demostraremos ahora que la ecuación (13) se reduce a la ecuación de movimiento newtoniana cuando los campos gravitatorios son débiles y estáticos (es decir, en relatividad especial donde $g_{\mu\nu}$ es muy próximo a $\eta_{\mu\nu}$ e independiente del tiempo), y cuando las velocidades son mucho menores que la velocidad de la luz, es decir $v/c \ll 1$ que puede expresarse de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$$

NB: En la teoría de la gravedad linealizada, suponemos que el espacio-tiempo es casi plano. Para ello, representamos el tensor métrico total $g_{\mu\nu}$ como la suma de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ que describe el espacio-tiempo plano visto anteriormente, y una pequeña "perturbación" $h_{\mu\nu}$ que representa las desviaciones de esta planitud debidas a la presencia de masa o energía. Veremos esto más adelante en el estudio del repulsor dipolar para un sistema estacionario (Sección 3.3).

Integrando este tensor métrico

en la expresión (14), nos damos cuenta de que las derivadas parciales del tensor métrico dependen sólo de $h_{\mu\nu}$ ya que $\eta_{\mu\nu}$ es constante y sus derivadas son cero. Así, en la teoría linealizada de la gravedad, los símbolos de Christoffel pueden aproximarse considerando sólo las contribuciones de la perturbación $h_{\mu\nu}$. Esto se debe a que los símbolos de Christoffel están definidos por las primeras derivadas del tensor métrico, y en un campo gravitatorio débil, $h_{\mu\nu}$ es pequeña en comparación con $\eta_{\mu\nu}$. Por tanto, cuando calculamos los símbolos de Christoffel para un campo gravitatorio débil, despreciamos las derivadas de $\eta_{\mu\nu}$ y sólo tenemos en cuenta las derivadas de $h_{\mu\nu}$. Por tanto, obtenemos:

$$g_{\mu\sigma,\nu} = h_{\mu\sigma,\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu,\sigma} = h_{\mu\nu,\sigma} \quad \text{et} \quad g_{\nu\sigma,\mu} = h_{\nu\sigma,\mu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} (\eta^{\lambda\sigma} + h^{\lambda\sigma}) (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Dado que $h_{\mu\nu}$ es pequeño, nos damos cuenta de que el producto de $h^{\lambda\sigma}$ con sus derivadas parciales contribuirá a términos de orden dos o superior (por ejemplo, h^2 , h^3 etc.). Estos

términos de orden superior serán significativamente menores que los términos de primer orden que estamos buscando. Por lo tanto, al calcular los símbolos de Christoffel, despreciamos los productos de $h_{\mu\nu}$ y sus derivadas, lo que implica que las contribuciones de $h^{\lambda\sigma}$ son despreciables en comparación con las de $\eta^{\lambda\sigma}$. Así obtenemos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Esta aproximación simplifica el proceso de cálculo de la curvatura del espacio-tiempo en campos gravitatorios débiles y es fundamental para el análisis de las ondas gravitatorias, donde las perturbaciones $h_{\mu\nu}$ representan ondulaciones en la curvatura del espacio-tiempo. Consideremos ahora 2 casos:

- Para $\lambda = 0$ que corresponde a la coordenada temporal en relatividad general, la ecuación de los símbolos de Christoffel del primer tipo se hace específica de la coordenada temporal. Utilizando el tensor métrico de Minkowski η y la perturbación h el símbolo de Christoffel para $\lambda = 0$ viene dado por la ecuación :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} \eta^{0\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Dado que $\eta^{0\sigma}$ no es cero sólo cuando $\sigma = 0$ lo que conduce a $\eta^{00} = 1$ obtenemos la siguiente relación :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} (h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu} - h_{\mu\nu,0})$$

Sin embargo, como el campo gravitatorio es estático, es decir, la métrica espacio-temporal no varía con el tiempo, la derivada parcial del tensor métrico con respecto al tiempo ($\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$) es cero. Esto nos permite considerar que el sistema se encuentra en un régimen estacionario con respecto a la métrica espacio-temporal :

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} (h_{\mu 0,\nu} + h_{\nu 0,\mu})$$

- Para las coordenadas espaciales denotadas por $\lambda = i$ (donde i, j, k representan índices espaciales), los símbolos de Christoffel pueden calcularse utilizando la métrica de perturbación $h_{\mu\nu}$. El tensor métrico de Minkowski $\eta^{i\sigma}$ se utiliza para elevar el índice, y es igual a -1 cuando los índices coinciden. Así, los símbolos de Christoffel para las coordenadas espaciales vienen dados por :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} \eta^{i\sigma} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma})$$

Sin embargo, dado el signo negativo de los componentes espaciales de $\eta^{i\sigma}$ la ecuación para $\sigma = i$ se simplifica a :

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = -\frac{1}{2} (h_{\mu i,\nu} + h_{\nu i,\mu} - h_{\mu\nu,i})$$

Este signo negativo refleja la convención de signo opuesto para los componentes espaciales del tensor métrico de Minkowski con respecto al componente temporal.

Integremos ahora estos resultados en la ecuación geodésica (13) para cada caso:

- En $\lambda = 0$ sabemos que $x^\lambda = x^0 = ct$ entonces :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Sin embargo, el siguiente producto generará una suma sobre los índices repetidos μ y ν cantidades de los órdenes 0, 1 y 2 :

$$(h_{\mu 0, \nu} + h_{\nu 0, \mu}) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

Teniendo en cuenta que las cantidades de orden superior, en particular de orden 1 y 2, son muy despreciables, sobre todo porque se basan en la ya pequeña cantidad $h_{\mu\nu}$ que es mucho menor que $\eta_{\mu\nu}$ conservaremos únicamente los términos de orden cero. En este contexto, el orden cero se refiere a los términos en los que μ y ν son ambos iguales a 0, lo que corresponde a las componentes temporales. Esta simplificación nos lleva a la siguiente ecuación:

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} (h_{00,0} + h_{00,0}) c^2 \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

En esta aproximación, sólo los términos que implican la coordenada temporal contribuyen significativamente a la ecuación de movimiento, simplificando el análisis de las geodésicas espacio-temporales en un campo gravitatorio débil.

Sin embargo, como el campo gravitatorio es estático, estas cantidades son cero, por lo que :

$$c^2 \frac{d^2 t}{ds^2} = 0$$

Esto implica que t es proporcional a s lo que significa :

$$s = ct$$

- Para las coordenadas espaciales denotadas por $\lambda = i$ de (15), obtenemos :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} (h_{\mu i, \nu} + h_{\nu i, \mu} - h_{\mu\nu, i}) \frac{1}{c^2} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

Sin embargo, como ya se ha mencionado, sólo conservaremos las cantidades de orden 0 para μ y ν que son iguales a 0. Debido a la naturaleza estática de los campos gravitatorios, obtenemos la siguiente ecuación :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} h_{00,i} = 0$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i}$$

Dado que i es un índice espacial que toma los valores 1, 2 ó 3, encontramos una forma de equivalencia "Aceleración - Fuerza" que puede representarse en forma vectorial:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{grad} \phi$$

con

$$\phi = \frac{c^2 h_{00}}{2}$$

El vínculo entre el potencial gravitatorio y la componente temporal del tensor métrico puede establecerse introduciendo (16) en (17):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

El potencial gravitatorio ϕ es equivalente a la velocidad al cuadrado (c^2). Sabiendo que $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$ podemos comprobar localmente que para la Tierra $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} = \frac{2G \cdot M_t}{R_t \cdot c^2} = 10^{-9} \ll \eta_{00} = 1$ utilizando la conocida expresión para calcular el potencial gravitatorio :

$$\phi = \frac{GM}{R}$$

2.3.7 Las soluciones de Karl Schwarzschild y Ludwig Flamm

Karl Schwarzschild desarrolló una solución geométrica completa a la ecuación (18), consistente en dos métricas publicadas en dos artículos separados ((Schwarzschild 1916b),(Schwarzschild 1916a)) :

- **La primera solución** describe, utilizando la métrica siguiente, la geometría externa de una masa esféricamente simétrica como una estrella de radio r_n en el vacío fuera del objeto donde no hay materia, es decir, la figura 2.4 :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G \rho r_n^3}{3c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

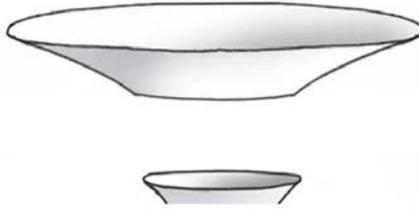


Figura 2.4 - Porción de una hipersuperficie Flamm

- **La segunda solución**, a menudo denominada solución de Schwarzschild interior, está estructurada por la siguiente métrica, que describe la geometría del espaciotiempo en el interior de un cuerpo estático y esféricamente simétrico de fluido incompresible, como una estrella de radio r_n Figura 2.5 :

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r_n^2}{3c^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8\pi G\rho r^2}{3c^2}} \right]^2 c^2 dt^2$$

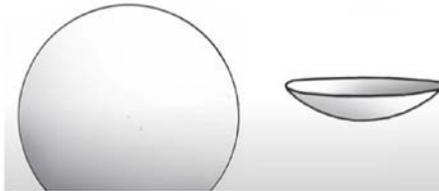


Figura 2.5 - Porción de una esfera

Este enfoque implica la unión de dos segmentos de soluciones espaciotemporales, concretamente dos regiones de hipersuperficies, cada una caracterizada por sus métricas distintas. La unión se realiza en una frontera común, lo que garantiza la continuidad de la geometría espaciotemporal y la coherencia física de la solución combinada a través de la interfaz.

Ese mismo año, un joven matemático ofreció su propia interpretación del trabajo de Schwarzschild. Se llamaba Ludwig Flamm. Su trabajo y su nombre han permanecido en gran parte desconocidos para los especialistas en cosmología por una sencilla razón: su artículo no se tradujo al inglés hasta 2012. Dominaba a la perfección la geometría de objetos como las hipersuperficies riemannianas tridimensionales ((Flamm 1916)).

Basándose en la métrica exterior de Schwarzschild, Kruskal desarrolló su conocido modelo, considerado el fundamento de la teoría de los agujeros negros. Al extender analíticamente la solución exterior de Schwarzschild, elimina "algebraicamente" la singularidad de coordenadas que se encuentra en el "horizonte de sucesos" para $r = R_s$ (radio de Schwarzschild), introduciendo un nuevo sistema de coordenadas. Este sistema está diseñado para hacer que la métrica sea regular en todas partes excepto en la "singularidad física central" para $r = 0$ ((Martin D. Kruskal 1960),(Jean-Marie Souriau 1965)). Pero, ¿tiene realmente sentido físico este modelo?

2.3.8 Construcción de geodésicas para la métrica exterior de Schwarzschild

Consideremos la métrica exterior de Schwarzschild (6.53) tomada de (Adler, Bazin y Schiffer 1975) (Página 194) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}\right) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

donde m es una constante de integración simple (una longitud), x^0 es un marcador cronológico (también una longitud), y s es la longitud medida en la hipersuperficie 4D.

Los autores escriben:

$$x^0 = ct$$

Una geodésica es una trayectoria inscrita en la hipersuperficie, correspondiente a una longitud mínima :

$$\delta \int ds = 0$$

Esto significa que esta longitud :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\}$$

tiene un valor mínimo a lo largo de un camino parametrizado de esta manera : $t(s), r(s), \theta(s), \phi(s)$.

Escribamos :

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$$

Esto significa buscar caminos que minimicen :

$$\int_a^b \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) \right\} ds$$

La cantidad entre corchetes es :

$$L = L(t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad \text{ou} \quad L = L(x^i, \dot{x}^i)$$

Este problema fue resuelto por el matemático francés Lagrange, dando lugar a lo que hoy se conoce como las ecuaciones de Lagrange.

El cálculo de geodésicas es un problema de "extremos acotados". Esto se debe a que consideramos todas las trayectorias que conectan dos puntos a y b , por tanto, están ligados a estos puntos. Las geodésicas vienen dadas por las ecuaciones :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

Con :

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$$

Las tres primeras ecuaciones de Lagrange (6.75), (6.76), (6.77) de (Adler, Bazin y Schiffer 1975), correspondientes a las variables θ , ϕ y t son las siguientes:

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$$

$$\frac{d}{ds} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0$$

Si dividimos cada término de la métrica (25) por ds^2 :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

En relatividad general, explotar la simetría esférica de una solución puede simplificar el análisis de las geodésicas. En el caso de la métrica de Schwarzschild, que sí es esféricamente simétrica, esta simetría puede aprovecharse para reducir el problema a dos dimensiones.

La métrica de Schwarzschild, en coordenadas esféricas, depende de las variables r , θ , ϕ y t . La simetría esférica significa que la métrica no cambia cuando se efectúan rotaciones alrededor del centro. Esta propiedad nos permite simplificar el problema eligiendo geodésicas que permanezcan en un plano constante. Es práctica común elegir el plano ecuatorial para simplificar los cálculos, lo que corresponde a fijar $\theta = \pi/2$. En este plano, el θ no cambia, lo que significa que $d\theta = 0$ por lo que la componente de la métrica que implica $d\theta$ desaparece (véase la figura 2.6).

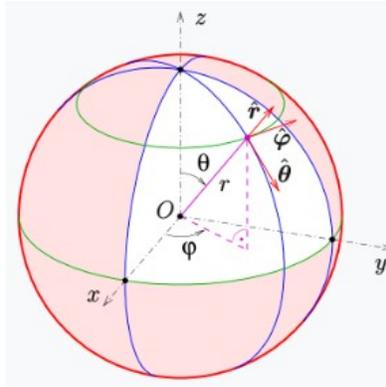


Figura 2.6 - Vectores en coordenadas esféricas

A continuación, examinando el Lagrangiano (que es una función que resume la dinámica de un sistema) asociado a esta métrica, podemos hallar las ecuaciones de movimiento de las geodésicas. Para un objeto que se mueve en el plano ecuatorial, la componente azimutal de su momento angular, ligada a ϕ Esto es consecuencia de la simetría axial de la métrica con respecto al eje perpendicular al plano ecuatorial. Matemáticamente, esto se expresa mediante la ecuación :

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{constante}$$

donde h es una constante de movimiento (momento angular por unidad de masa), r es la coordenada radial, y $\dot{\phi}$ es la derivada de la coordenada azimutal ϕ con respecto al tiempo propio s (el tiempo medido por un reloj que se mueve con el objeto).

Esto nos dice que la cantidad $r^2 \dot{\phi}$ permanece constante a lo largo de la geodésica.

La ecuación (19) anterior puede integrarse para obtener :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l = \text{constante}$$

Por sustitución, obtenemos la ecuación diferencial :

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

que da r en función del parámetro s . Pero utilizando una ecuación presentada anteriormente, podemos pasar a una ecuación diferencial que presenta la derivada :

$$r' = \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$$

A partir de (20) y (21), obtenemos :

$$\dot{r} = \dot{\phi} r' = \frac{h}{r^2} r'$$

Podemos entonces obtener la ecuación diferencial que une r y l :

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

Podemos entonces hacer la transición de variable r a una variable u como:

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r' = -\frac{u'}{u^2}$$

Entonces, a partir de (22), podemos deducir :

$$d\phi = \frac{dr}{r'} = \frac{du}{u'}$$

Lo que nos lleva a :

$$(1 - 2mu) = c^2 l^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu)$$

que se reduce a:

$$u'^2 = \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3$$

Así, a partir de (23), la integración da :

$$\phi = \phi_0 + \int_{u_0}^u \frac{dv}{\sqrt{\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} v - v^2 + 2mv^3}}$$

Se trata de una solución exacta de la ecuación de Einstein, que expresa el ángulo ϕ como una integral de $u = \frac{1}{r}$, a la inversa, nos da u como función inversa (implícita) de ϕ y da lugar a geodésicas "cuasi-elípticas", que dependen de las dos constantes de integración l y h .

Si h es grande, esto significa que la geodésica recorrida por una partícula de prueba se desviará de una trayectoria radial de caída libre porque tendrá una cantidad significativa de momento angular específico. En consecuencia, su trayectoria se verá menos afectada por la fuerza de gravedad directa hacia el cuerpo central, lo que hará que se desvíe de una caída radial directa y siga una trayectoria más curva o "cuasi-elíptica".

Ignorando la región interior de la esfera de Schwarzschild ($r < 2m$), es posible representar en 3D las geodésicas planas asociadas a esta métrica estacionaria. La representación de la esfera de Schwarzschild puede considerarse como un círculo que se proyecta en el espacio-tiempo a lo largo de la dimensión temporal de Schwarzschild t_s . Si consideramos una estrella de neutrones con un radio de 10 km, permanecerá estable en el límite Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) de unas 2 masas solares. El límite TOV representa la masa crítica máxima que puede tener una estrella de neutrones permaneciendo estable. Esto sitúa el horizonte de una masa puntual equivalente a una distancia de su centro de unos 6 km ($r_s = \alpha$). Dado que el radio de la estrella es aproximadamente 3/2 veces r_s situamos el horizonte de este objeto en $r_s = 2$ para un radio de 3. Esta configuración me permitió

representar, utilizando Mathematica, las geodésicas de una partícula de prueba siguiendo una trayectoria de caída hacia este objeto, como se muestra en la figura 2.7.

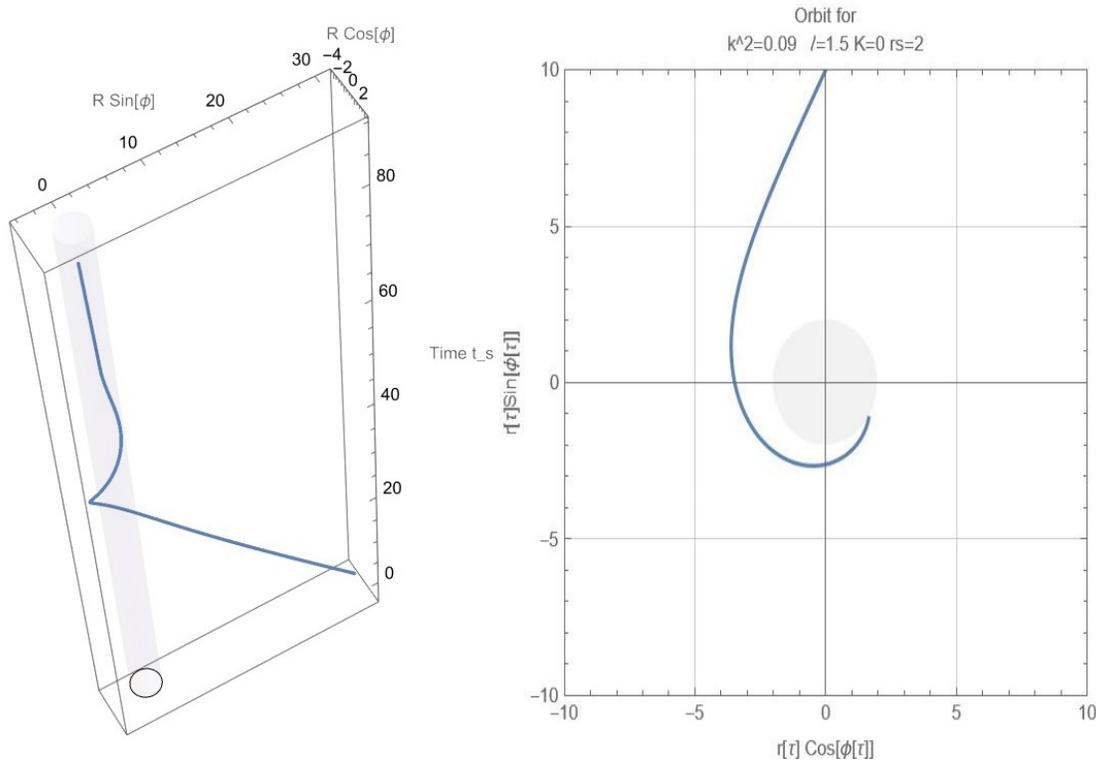


Figura 2.7 - Representación de una geodésica descendente en el sistema de coordenadas (r, ϕ, t_s)

Cualquiera que sea la dirección de movimiento de la geodésica, en este caso centrípeta, con esta elección de coordenada temporal, tardaría una cantidad infinita de tiempo en aproximarse a la esfera de Schwarzschild. De hecho, como podemos ver en las figuras 2.8 y 2.9, para un observador distante, cualquier objeto que se acercara al horizonte de una estrella de neutrones próxima a su criticidad física o a un objeto supermasivo, como aquellos cuya aproximación alternativa se estudiará en el capítulo 7, sufriría una dilatación temporal cercana a lo que se conoce como radio de Schwarzschild. Sin embargo, para el objeto en sí (o para un observador que se moviera con el objeto), el tiempo seguiría progresando normalmente (la curva azul comparada con la curva de puntos, respectivamente).

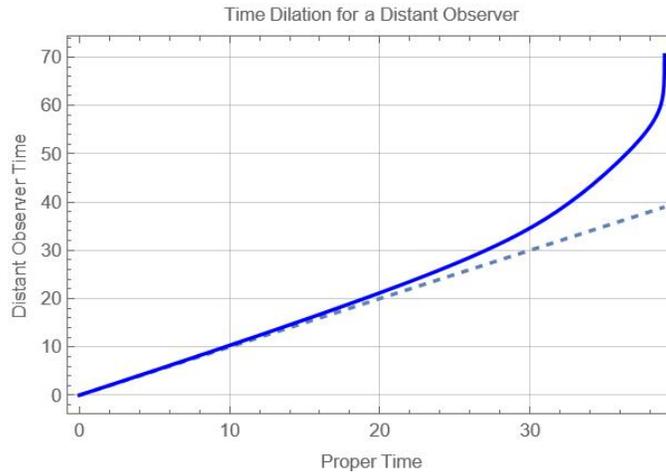


Figura 2.8 - Dilatación del tiempo acción para un observador lejano

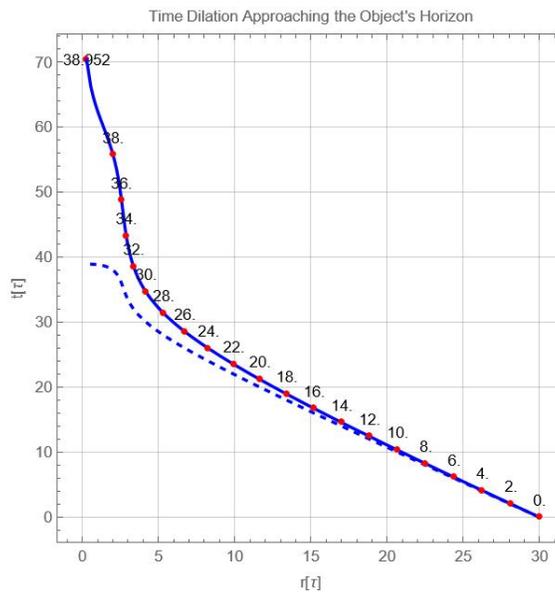


Figura 2.9 - Tempo dilatación real acercándose al horizonte del objeto

Desde el punto de vista de este observador lejano, el objeto tardaría aparentemente un tiempo infinito en alcanzar el horizonte. Como resultado, se percibiría como si se ralentizara gradualmente, pareciendo casi congelado o congelándose cerca del horizonte.

Este fenómeno es una consecuencia de la relatividad general, que predice que la presencia de una masa significativa curva el espacio-tiempo. Esta curvatura afecta al paso del tiempo, dando lugar a una dilatación temporal en campos gravitatorios intensos.

Este aspecto es uno de los pilares de la teoría de los agujeros negros. Pero, ¿existe otra alternativa? Lo exploraremos más adelante, en el capítulo 5.

2.3.9 La solución Roy Kerr

En 1963, Roy Kerr, un eminente matemático neozelandés, revolucionó la comprensión de la relatividad general en el contexto del modelo de los agujeros negros al proponer una nueva solución a la ecuación de campo de Einstein. A diferencia de la métrica exterior de Schwarzschild ((Schwarzschild 1916b)), utilizada como base para el modelo de agujero negro estático y esféricamente simétrico, la solución de Kerr es axi-simétrica y representa un agujero negro en rotación ((Kerr 1963)). Este descubrimiento fue especialmente significativo en su momento porque proporcionaba un modelo más realista para muchos objetos celestes.

La métrica de Kerr se expresa en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) ((Chaskalovic 2009)), y su elemento de línea viene dado para $c = 1$ por :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4GMarsin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2 sin^2\theta}{\rho^2}\right) sin^2\theta d\phi^2$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta &= r^2 - 2GMr + a^2, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2\theta.\end{aligned}$$

M es la masa del objeto central en rotación, a menudo un agujero negro, que influye en el espacio-tiempo circundante, y a es el momento angular específico del objeto en rotación. El término importante es $-\frac{4GMarsin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi$ que representa el arrastre en el espaciotiempo debido a la rotación del objeto, típicamente un agujero negro. Esta característica puede interpretarse como una manifestación de la idea de la relatividad del movimiento de Ernst Mach, según la cual el propio espaciotiempo parece verse influido por la presencia de materia en movimiento.

La relevancia de la solución de Kerr se puso aún más de manifiesto con el descubrimiento en 1967 de los púlsares, entendidos inicialmente como estrellas de neutrones que rotan a velocidades increíblemente altas, alcanzando en ocasiones el millar de rotaciones por segundo. Aunque la métrica de Kerr se aplica principalmente al modelo de los agujeros negros, sus implicaciones para comprender otros objetos astrofísicos compactos, como las estrellas de neutrones, también son significativas. El reputado astrofísico Subrahmanyan Chandrasekhar aclamó la solución de Kerr como un gran avance en la investigación matemática aplicada a la física teórica ((Chandrasekhar 1983)).

Lo que es importante destacar del planteamiento de Kerr es la posibilidad de explorar otras propiedades de representación, como la introducción, por ejemplo, de un término $dr dt$ en la métrica exterior de Schwarzschild, cuyas implicaciones se explorarán en el capítulo 5.

2.4 La obra de Andrei Sájarov y Jean-Marie Souriau

El modelo cosmológico de Janus compila la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, los trabajos de Andrei Sajarov en física de partículas y cosmología, y los de Jean-Marie Souriau en geometría simpléctica. Según la teoría de los grupos dinámicos, explica cómo la inversión del tiempo implica una inversión de la energía y, por tanto, de la masa.

En efecto, la asimetría bariónica del universo se considera uno de los problemas más significativos de la física actual. Más concretamente, se refiere a la observación de que en el universo hay una cantidad neta de bariones (partículas formadas por tres quarks, como los protones y los neutrones), pero casi ninguna de antibariones (partículas formadas por tres antiquarks). El universo

debería haberse creado con la misma cantidad de materia bariónica y antimateria antibariónica desde el Big Bang, lo que habría llevado a su aniquilación mutua, transformándose su masa en fotones. Pero, ¿qué ocurrió con esta antimateria primordial? En la década de 1960, los científicos descubrieron que la tasa de producción de materia (a partir de la combinación de quarks primordiales) se produce ligeramente más rápido que la tasa de producción de antimateria (a partir de la combinación de antiquarks), un fenómeno conocido como "violación CP" ((Cronin 1964)). Esto resultaba paradójico, ya que hasta entonces estos procesos de combinación se habían considerado simétricos. Sin embargo, como resultado de esta violación CP, en el universo primordial se sintetizó más materia y prevaleció sobre la antimateria.

El físico ruso Andrei Sakharov fue el primero, a partir de 1967, en restablecer la simetría global, considerando que el universo no estaba formado por una única entidad, sino por dos universos gemelos emanados de la misma singularidad del Big Bang, con dos flechas temporales opuestas desde el momento de la $t = 0$. La singularidad inicial Φ invierte no sólo el tiempo (*simetría T*), sino también la paridad (*simetría P*, también llamada "enantiomorfía") y la conjugación de cargas (*simetría C*, que transforma una partícula en su antipartícula, y viceversa), induciendo una *simetría CPT completa* ((Sájarov 1967),(Sájarov 1980),(Sájarov 1982)). La *violación de la simetría CP* también se invierte en el universo gemelo, lo que significa que la antimateria ha prevalecido sobre la materia. Hay que señalar que Sájarov se concentró en describir *la simetría CPT* sólo en el contexto de la física de partículas, por lo que no incluyó la gravitación en su modelo, de modo que los universos gemelos nunca interactúan, excepto en el momento de su nacimiento, como en la Figura 2.10:

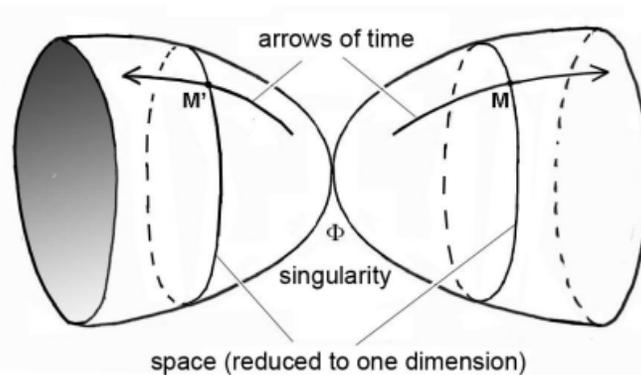


Figura 2.10 - Modelo cosmológico de Sajarov

2.5 El enfoque bimétrico introducido por la geometría hiperbólica de Riemann

La geometría hiperbólica de Riemann desempeña un papel crucial en el modelo cosmológico de Janus. Esta rama de la geometría estudia los espacios curvos con curvatura negativa constante. Esta geometría permite conceptualizar espacios con curvaturas tanto positivas como negativas. Sin embargo, es importante señalar que actualmente no existe ninguna teoría matemática bimétrica o multimétrica introducida en la geometría hiperbólica de Riemann en la que pueda basarse un modelo cosmológico bimétrico. De hecho, los modelos teóricos actuales siguen siendo heurísticos. Por ejemplo, en 2002 y 2008 Thibault Damour ((Damour y Kogan 2002)) y Sabine Hossenfelder ((Hossenfelder 2008)), respectivamente, intentaron dos aproximaciones. Uno se basaba en la introducción de gravitones pesados y ligeros en un sistema de ecuaciones de campo bimétricas, y el otro era más o menos similar a nuestro modelo.

De hecho, Damour y Kogan intentan construir una teoría de "dos membranas", con un espectro de gravitones masivos, pero este documento de 40 páginas se detiene en seco. De paso, muestran que la bigravity debe obedecer a un sistema de dos ecuaciones de campo acopladas:

$$2M_L^2 \left(R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^L R(g^L) \right) + \Lambda_L g_{\mu\nu}^L = t_{\mu\nu}^L + T_{\mu\nu}^L$$

$$2M_R^2 \left(R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^R R(g^R) \right) + \Lambda_R g_{\mu\nu}^R = t_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^R$$

Posteriormente, Sabine Hossenfelder propuso un modelo refinado que abordaba el concepto de masa negativa en el universo. Sin embargo, en 1957, Hermann Bondi intentó introducir estas masas en el modelo de Albert Einstein. Pero el llamado fenómeno de fuga reveló contradicciones físicas, de tal forma que el modelo violaba principios fundamentales de la física, como el principio de acción-reacción y el de equivalencia ((Bondi 1957)). Hossenfelder fue más allá y formuló un par de nuevas ecuaciones de campo acopladas:

$$R_{\underline{v}\underline{k}} - \frac{1}{2} g_{\underline{v}\underline{k}}^{(g)} R = T_{\underline{k}\underline{v}} - \underline{V} \sqrt{\frac{\hbar}{g}} a_{\underline{v}}^{\underline{v}} a_{\underline{k}}^{\underline{k}} \underline{T}_{\underline{v}\underline{k}}$$

$$R_{\underline{v}\underline{k}} - \frac{1}{2} h_{\underline{v}\underline{k}}^{(h)} R = \underline{T}_{\underline{v}\underline{k}} - \underline{W} \sqrt{\frac{g}{\hbar}} a_{\underline{k}}^{\underline{k}} a_{\underline{v}}^{\underline{v}} T_{\underline{k}\underline{v}}$$

Después, al no poder resolver la incoherencia con los principios físicos y creer que estaba inextricablemente ligada a la "gravedad bimétrica", desistió.

Lo que tienen en común estos dos enfoques es que son puramente teóricos y no han proporcionado resultados validados por las observaciones. El único mérito que se puede

atribuir a nuestro modelo cosmológico, en comparación con los dos anteriores, es que tiene muchos puntos de anclaje con la observación y varias predicciones físicas que veremos en la Sección 3.

2 La geometría hiperbólica de Riemann es una rama de la geometría de Riemann que estudia los espacios curvos con curvatura negativa constante, que corresponden matemáticamente a una forma hiperbólica descrita a menudo como "*en forma de silla de montar*". Más concretamente, la curvatura negativa constante del espacio hiperbólico puede describirse como el comportamiento asintótico de la hipérbola en ambas direcciones: las ramas de la hipérbola divergen indefinidamente sin converger nunca. Esta característica es una propiedad importante del espacio hiperbólico y puede utilizarse para distinguirlo de la geometría euclidiana y de la geometría esférica de Riemann.

Por ejemplo, en la Figura 2.11, las líneas rojas que dibujan los triángulos son las *geodésicas* de la superficie. En términos sencillos, una *geodésica* es el camino más corto entre dos puntos del espacio. Imagina que estás en un espacio euclídeo plano, como en una hoja grande de papel; aquí, este camino es sólo una línea recta. Pero en las superficies curvas, ya sean curvas positivas (geometría esférica) o negativas (geometría hiperbólica, como la silla de montar de un caballo), se puede dibujar una *geodésica* utilizando una cuerda o goma elástica estirada entre dos puntos de esa superficie, que representa el camino más corto. Así, a diferencia de la geometría euclidiana, donde la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180 grados, esta suma supera los 180 grados en la geometría esférica (riemanniana) y es inferior a 180 grados en la geometría hiperbólica (también un tipo de geometría riemanniana).

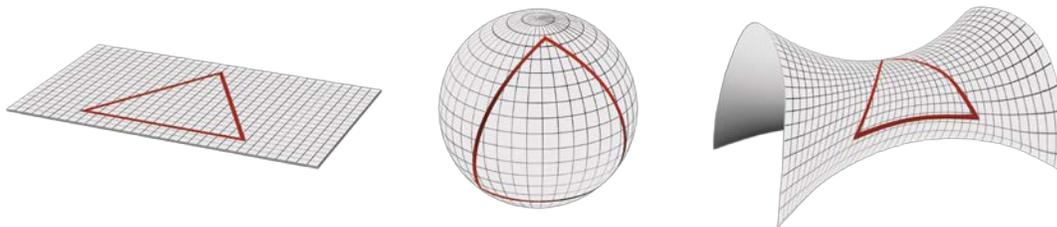


Figura 2.1 1 - Tipos de curvatura espacial

Es importante señalar que un espacio euclidiano "*plano*", es decir, un espacio con curvatura cero, no es necesariamente un plano. Tomemos el ejemplo anterior de una hoja de papel: aunque se doble varias veces, como una plancha ondulada, su curvatura sigue siendo nula en todas partes. Esto significa que la *geodésica* trazada sobre su superficie no cambia, porque la hoja no se estira. Lo mismo ocurre con las superficies euclidianas cerradas, como un cilindro o un cono: contrariamente a lo que podría pensarse, no tienen curvatura. Según la geometría euclidiana, aunque parezcan curvas, pueden considerarse "*planas*" porque su superficie puede desplegarse en un plano sin estirarse.

El concepto del modelo cosmológico de Janus, que se desarrollará en el próximo capítulo, consiste en asociarlo a una "*geometría gemelar*" definida por una relación entre espacios con curvatura positiva y espacios con curvatura negativa, según un sistema de dos ecuaciones de campo acopladas.

3 Modelo cosmológico Janus

3.1 Descripción

El modelo cosmológico Janus propone una visión revolucionaria del universo, caracterizado por una variedad riemanniana con dos métricas distintas. Estas métricas manejan las masas positivas y negativas de una manera única, ofreciendo una interpretación coherente dentro del marco de la relatividad general, confirmada por las observaciones, al tiempo que evita las paradojas tradicionales. Basándose en el modelo cosmológico de Andrei Sakharov de dos universos bimétricos que no interactúan, se ha desarrollado un nuevo modelo como un único universo formado por una única variedad riemanniana con dos métricas, a saber, una hipersuperficie cuatridimensional con dos capas plegadas una sobre otra en *CPT-Simetría*, pero esta vez interactuando por efecto gravitatorio.

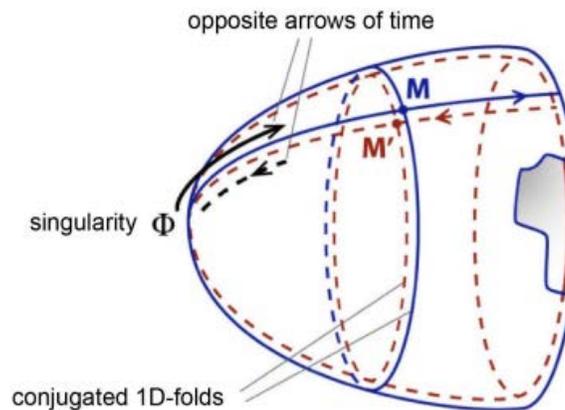


Figura 3.1 - Modelo cosmológico Janus

La primera capa está cuadrículada con una determinada unidad de longitud que proporciona una métrica a través de la cual la materia de energía y masa positivas pasa entre dos puntos de este espacio-tiempo a una velocidad limitada por la teoría de la relatividad especial (apartado 2.2.2). Y su contrapartida, doblada pero elevada al cuadrado según una unidad de longitud 100 veces más corta y una velocidad 10 veces superior para la materia de energía y masa negativas (fotones que evolucionan en las mismas proporciones), lo que resulta en un tiempo de paso 1000 veces más rápido. Este modelo ofrece así dos familias de geodésicas que cruzan el espacio-tiempo de dos maneras diferentes y a velocidades distintas, lo que hace posible los viajes interestelares y explica varios fenómenos físicos como la desaparición de la antimateria primordial y el confinamiento de las galaxias ((Petit y d'Agostini 2014),(Petit 2018)).

También demuestra que los estados de energía negativa son compatibles con la mecánica cuántica.

Este modelo se construye sobre dos ecuaciones de campo acopladas que son una extensión de la ecuación de campo de Einstein, ofreciendo una alternativa creíble a la presencia de

energía oscura (poder repulsivo) y materia oscura (aplanamiento de las curvas de rotación galáctica) en el cosmos, al tiempo que integra con éxito las masas negativas en la Relatividad General.

Se basa en la derivación de ecuaciones a partir de un concepto denominado "*lagrangiano*". En física, a menudo utilizamos principios para explicar cómo los objetos o las partículas se mueven e interactúan entre sí. En nuestro caso, utilizamos principios de variación, que son fórmulas matemáticas que describen cómo un sistema físico evoluciona en el tiempo minimizando una cantidad específica llamada "*acción*". Este concepto de variación debe ser "*covariante*", lo que significa que sigue siendo el mismo sea cual sea el sistema de referencia inercial elegido. Esto implica que se aplica a todos los observadores, independientemente de su velocidad.

La derivación lógica de estos principios debe conducirnos a ecuaciones que describan los movimientos y las interacciones de un sistema de partículas de forma que sean válidas para todos los observadores, independientemente de su movimiento relativo. La "*acción*" se define como la integral del "*Lagrangiano*" a lo largo de un cierto periodo de tiempo, lo que nos permite describir la cinética y la dinámica de un sistema físico. El *Lagrangiano* es una función calculada a partir de la energía cinética y potencial del sistema, así como de otros factores que pueden influir en su comportamiento. Utilizando el principio de mínima acción, se busca la trayectoria del sistema que minimice la "*acción*", es decir, aquella para la que el valor de la "*acción*" sea lo más pequeño posible. Las ecuaciones de movimiento se obtienen diferenciando esta trayectoria de acción mínima con respecto al tiempo.

3.2 Implicaciones

La cosmología está en crisis. El primer ejemplo es el ritmo de expansión del Universo, que lleva 13.800 millones de años hinchándose como un gigantesco globo. Cuando los astrofísicos utilizaron sus telescopios para medir el ritmo actual de expansión, conocido como constante de Hubble (o H_0), encontraron un valor incompatible con el predicho por el Modelo Estándar de Cosmología (Λ CDM), la teoría que actualmente mejor describe la historia del Universo, desde su origen (el Big Bang) y los primeros átomos hasta nuestros días, pasando por las primeras estrellas y galaxias.

La constante de Hubble (H_0) es un parámetro clave de la cosmología que mide la velocidad de expansión del Universo. Indica la velocidad a la que las galaxias se alejan unas de otras en función de su distancia. Recientemente, sin embargo, dos métodos principales de medición han producido resultados significativamente diferentes:

- Por un lado, las mediciones locales que utilizan la observación directa de galaxias y la escala de distancias cosmológicas basada en candelas estándar como las cefeidas y las supernovas de tipo Ia, dan un valor de H_0 de 73 km/s/Mpc². Esta medición procede de la colaboración *Shoemaker-Levy*, dirigida por el estadounidense Adam Riess.

² Un megaparsec equivale a unos 3,26 millones de años-luz. Por cada megaparsec de distancia, la expansión del Universo aumenta la velocidad de separación de las galaxias en 73 kilómetros por segundo.

- Por otra parte, los datos del Fondo Cósmico de Microondas³, analizados en el marco del Modelo Estándar de la cosmología, sugieren un valor inferior, de 67,4 kilómetros por segundo por megaparsec (km/s/Mpc). Este método se basa en los datos del satélite Planck.

Esta discrepancia, si no es atribuible a errores de medición, obliga a reevaluar ciertos aspectos fundamentales del Modelo Estándar, como el papel de la energía oscura en la aceleración de la expansión cósmica. El Modelo Cosmológico Janus atribuye este efecto antigraavitatorio a las masas negativas y especifica su naturaleza, un tema que exploraremos en mayor profundidad más adelante en la sección dedicada 3.3.

Como otro ejemplo, el telescopio espacial James Webb (JWST), con sus avanzadas capacidades de observación en el infrarrojo, está diseñado para observar el Universo en etapas muy tempranas de su evolución, incluida la formación de las primeras galaxias. Recientes observaciones del JWST revelan objetos o comportamientos que no coinciden con las predicciones del Modelo Estándar, lo que ha llevado a una revisión completa de sus fundamentos. Según el Modelo Estándar de cosmología, el universo experimentó un periodo oscuro tras el Big Bang, seguido de la formación de las primeras estrellas y protogalaxias unos cientos de millones de años después. Estas primeras estructuras evolucionaron hasta convertirse en grandes galaxias en el transcurso de los primeros mil millones de años, un proceso guiado por la gravedad de la materia oscura. Las galaxias siguieron desarrollándose y agrupándose durante miles de millones de años, formando los distintos tipos que se observan hoy en día. Se cree que la materia oscura y la energía oscura desempeñan papeles cruciales en este proceso, influyendo en la formación de estructuras y en la expansión del universo, respectivamente. El

reciente estudio publicado en la revista *Nature Astronomy* (Boylan-Kolchin 2023) se refiere al descubrimiento por Mike Boylan-Kolchin, profesor asociado de Astronomía de la Universidad de Texas en Austin, de la formación antes de lo esperado de varias galaxias de alto desplazamiento al rojo (entre 500 y 700 millones de años después del Big Bang) mucho más masivas que la nuestra (10.000 millones de masas solares). Por ejemplo, *Abell 2744 Y1* es un cúmulo de galaxias situado en la constelación del Escultor, a unos 13.200 millones de años-luz de distancia, y se nos aparece como cuando el universo tenía sólo 650 millones de años (figura 3.2).

³ El fondo cósmico de microondas (CMB) es la radiación electromagnética emitida unos 380.000 años después del Big Bang, cuando el universo se había enfriado lo suficiente como para que electrones y protones se combinaran para formar átomos.

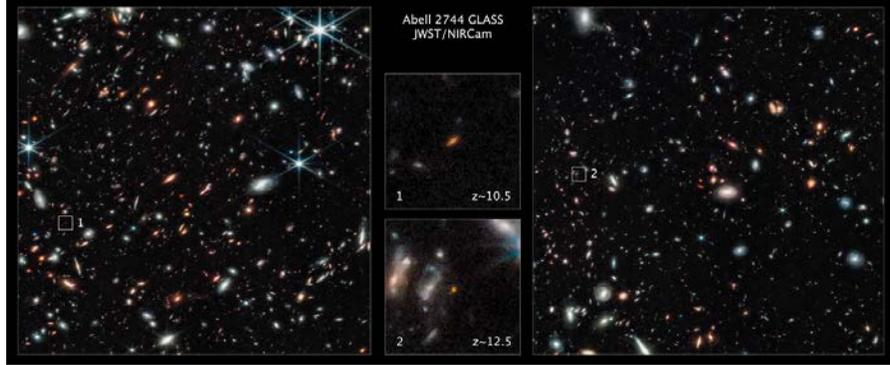


Figura 3.2 - Imagen del telescopio James Webb - Abell 2744 Y1

Esta observación del telescopio espacial James Webb confirma una vez más una de las predicciones del Modelo Cosmológico Janus.

Así pues, el Modelo Cosmológico de Janus arroja nueva luz sobre cuestiones cosmológicas clave, cuyas respuestas confirman numerosas observaciones y predicciones, entre las que se incluyen las siguientes:

- Explicación del confinamiento de las galaxias por espacios vacíos ocupados por masas negativas que contribuyen a su estabilidad, como en la figura 3.3 ((Farnes 2017)).

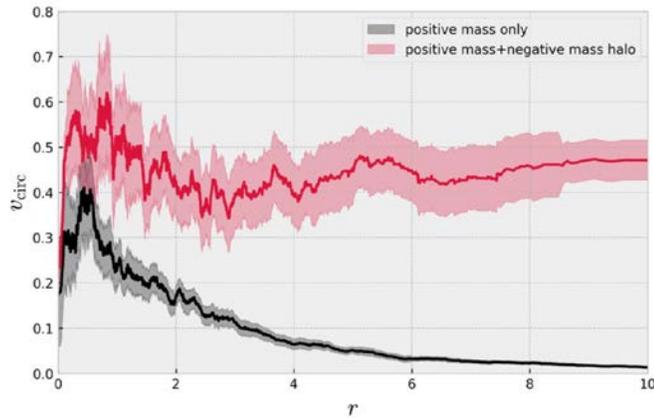


Figura 3.3 - Diferencia entre la velocidad circular v_{circ} de una galaxia compuesta por partículas de masa positiva en comparación con otra rodeada por un halo de partículas de masa negativa.

- Explicación de la forma de las curvas de rotación de las galaxias (aplanamiento)
- Este modelo explica la aceleración gravitatoria superior a la prevista de las estrellas que orbitan en los bordes de las galaxias debido a la presencia de masas negativas.

- Explicación de la alta velocidad de las galaxias en cúmulos debido a la contribución antigravitatoria de las masas negativas.
- Propone una descripción matemáticamente detallada del comportamiento de las galaxias basada en un enfoque común de las ecuaciones de Vlasov y Poisson. Predice que las velocidades de las estrellas dentro de una galaxia se organizan en un elipsoide orientado hacia el centro galáctico, hipótesis confirmada por mediciones de las velocidades residuales de estrellas cercanas al sistema solar.
- Explica los efectos de lente gravitatoria alrededor de las galaxias, como en 3.4.

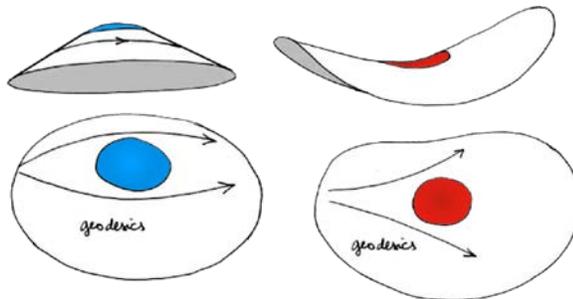


Figura 3.4 - Efectos de lente gravitatoria

- Explicación de la estructura lacunar del universo ocupada por cúmulos de masas negativas en forma de pompas de jabón interconectadas como en 3.5.

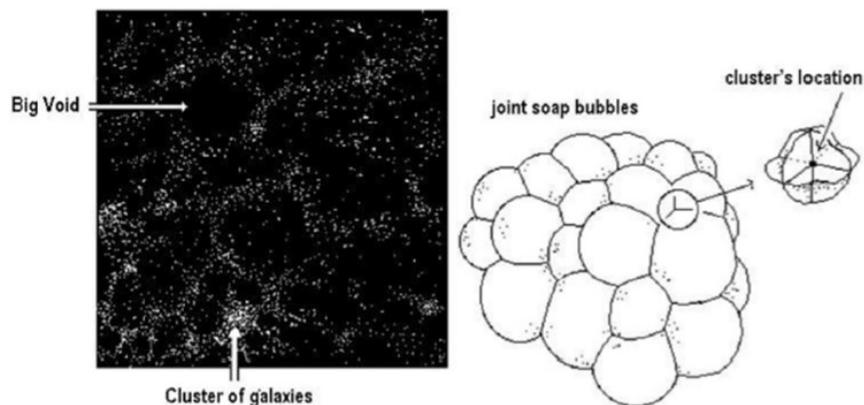


Figura 3.5 - Estructura de la brecha

Esta estructura también fue establecida en 2018 por Tsvi Piran en su artículo (Piran 2018), en el que destaca la distribución de galaxias en lo que denomina "muros" debido a la compresión antigravitatoria de regiones subdensas de masas negativas concentradas en la materia oscura de los espacios vacíos. Las observaciones muestran que estos vacíos ocupan una parte significativa del volumen del Universo. La correlación entre los vacíos en la distribución de las galaxias y las regiones de baja densidad de materia oscura demuestra claramente el origen gravitatorio de estos vacíos. Las regiones subdensas primordiales, conocidas como "vacíos cosmológicos negativos", actúan como masas gravitatorias negativas y sirven de semilla para los vacíos observados. Los centros de estas regiones subdensas son masas gravitatorias efectivas que repelen la materia, alineándola a lo largo de las

paredes entre los centros. Los vacíos se centran alrededor de estas masas y están rodeados por paredes de galaxias. Con el tiempo, las paredes se agrietan, lo que hace que los vacíos se fusionen con otros vacíos, creando una red más amplia de vacíos que confinan las galaxias.

- Predicción y confirmación de la formación temprana de todas las galaxias observadas recientemente por el telescopio espacial James Webb ((Ferreira et al. 2022)). De hecho, el modelo sugiere que todas las galaxias se formaron juntas durante los primeros 100 millones de años de la historia del universo (primordial). Esta formación tuvo lugar cuando la masa positiva se comprimió violentamente entre múltiples cúmulos de masa negativa, creando una alta presión. La fuerte contracción de la materia y los gases debida al efecto antigravitatorio de las masas negativas indujo un calentamiento significativo, que condujo a un enfriamiento rápido facilitado por una estructura en forma de lámina. Este tiempo de enfriamiento permitió alcanzar una temperatura suficiente para iniciar las reacciones de fusión termonuclear, lo que permitió el nacimiento de las primeras estrellas y su agrupación para formar las galaxias que hoy conocemos.
- Explicación de las galaxias lejanas a alto desplazamiento al rojo (> 7) que aparecen como enanas (luminosidad reducida). Esto se debe a que los cúmulos de masa negativa (como los de la región del Repulsor Dipolar, que estudiaremos en la sección 3.3) crean un efecto de lente gravitatoria negativa sobre sus fotones, que tiene el efecto de atenuar su luminosidad.
- Se confirman las comprobaciones relativistas locales, como el avance del perihelio de Mercurio o la desviación de los rayos de luz por el Sol. Dado que los dos tipos de masa se repelen, y considerando que la densidad de masa negativa es casi despreciable cerca del Sol, la primera ecuación del sistema corresponde a la ecuación de campo de Einstein (véase el apartado 3.3.4.2).

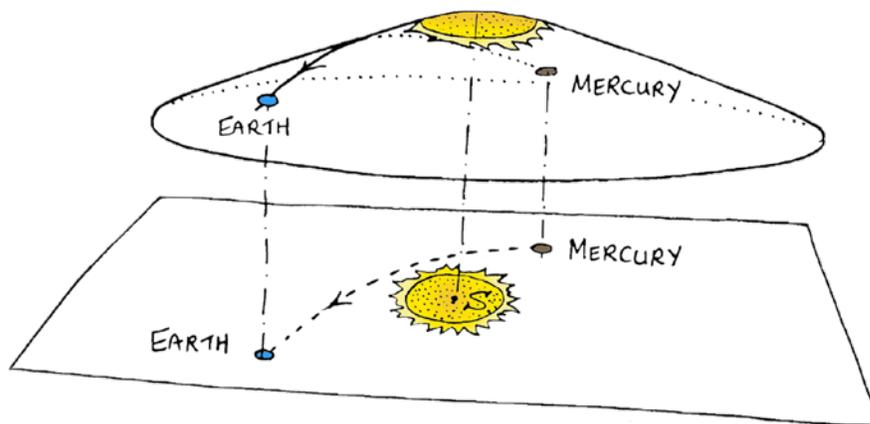


Figura 3.6 - Deformación del espacio-tiempo inducida por la masa del Sol.

- La explotación de la asimetría entre las dos poblaciones de masas positivas y negativas ha conducido a la coherencia con los datos de las observaciones de supernovas de tipo Ia. La observación de supernovas de tipo Ia ha sido una herramienta crucial para determinar las distancias de los objetos celestes y estudiar

la expansión del universo. Las supernovas de tipo Ia son explosiones de supernova que se producen en sistemas estelares binarios en los que una estrella conocida como enana blanca absorbe material de una estrella compañera hasta alcanzar una masa crítica, lo que provoca su explosión. Esta asimetría podría deberse a procesos como la rotación o el campo magnético de la estrella compañera, que transfiere materia a la enana blanca. Si la asimetría existe, podría dar lugar a una diferencia de luminosidad entre las supernovas de tipo Ia, lo que podría explicar las observaciones.

- Explicación de la naturaleza del Gran Repelente descubierto en enero de 2017 (véase la sección 3.3), donde se demostró que existe en una región aparentemente vacía del universo, opuesta a la del Atractor de Shapley, que parecía repeler toda la materia.

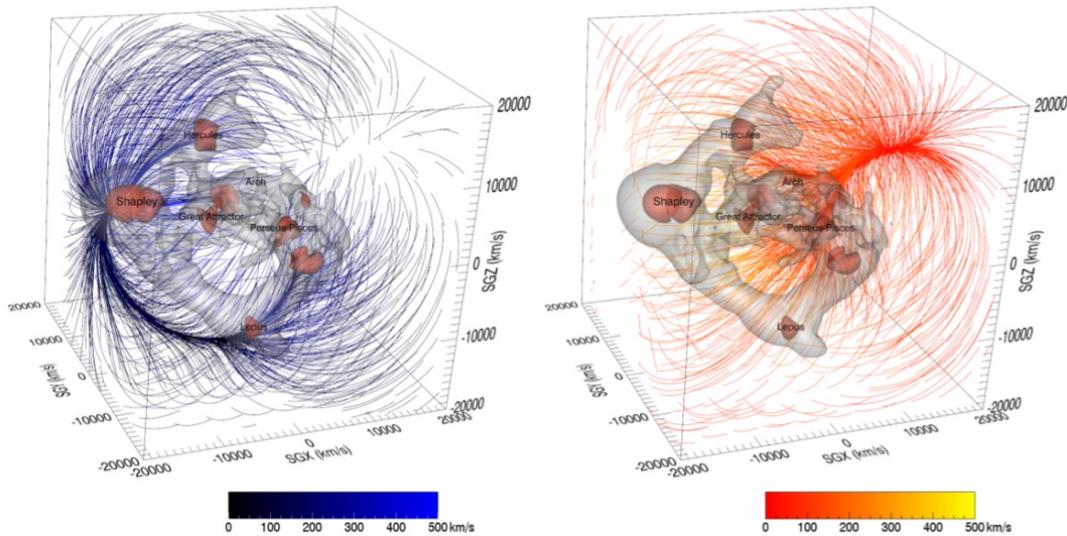
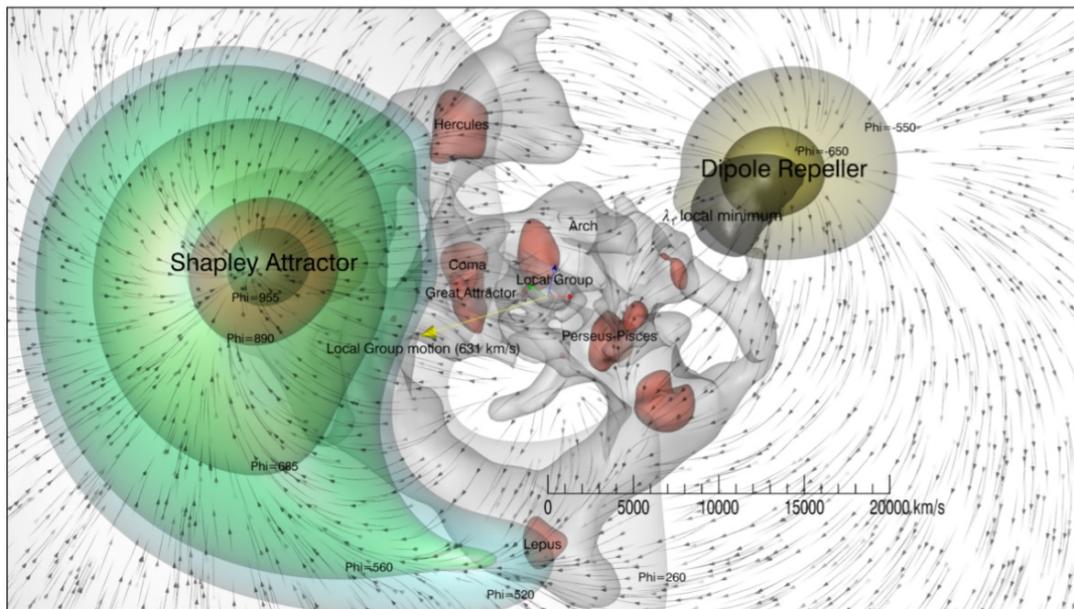


Figura 3.7 - El gran repulsor

- El modelo demuestra una estructura espiral galáctica duradera impulsada por la fricción dinámica que transfiere continuamente impulso al entorno menos denso de masa negativa, lo que permite a los brazos espirales girar de forma persistente y estable alrededor de la galaxia. Como se ilustra a continuación, cuando los brazos atraviesan regiones de alta densidad (masa positiva), se ralentizan y pierden energía, mientras que cuando atraviesan regiones de baja densidad, se aceleran y ganan energía. Esto crea ondas de densidad que se propagan por la galaxia, transfiriendo impulso al entorno de masa negativa.

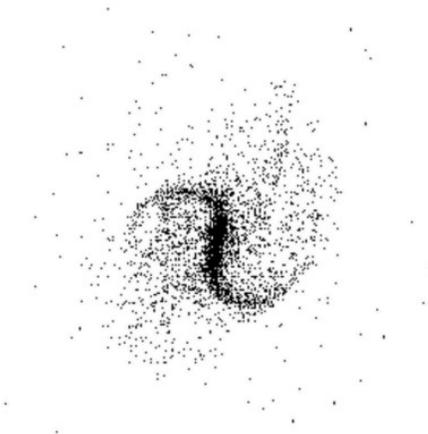


Figura 3.8 - Espiral de barras de una simulación numérica acción (1992: 20.000 puntos)

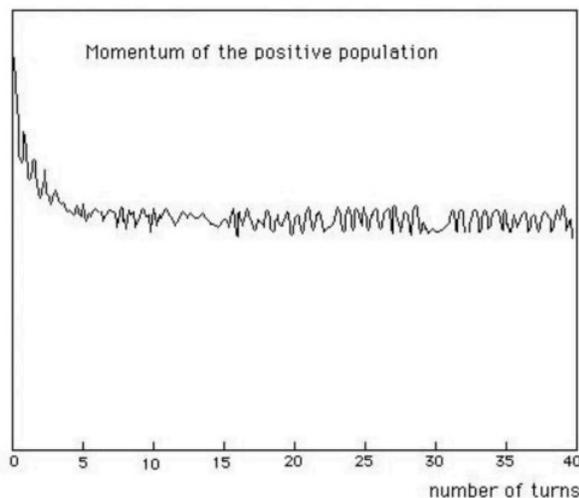


Figura 3.9 - Evolución del momento cinético (1992: 20.000 puntos)

- Explicación de por qué no se ha observado la antimateria cósmica, ya que emite fotones de energía negativa.
- Explicación de la naturaleza de los componentes invisibles del universo: antiprotones, antineutrones, antielectrones, antihidrógeno y antihelio de masa

negativa. Estos elementos constituyen la antimateria primordial, que no puede observarse porque emite fotones de energía negativa.

- **Conjetura recientemente confirmada en septiembre de 2023 (Anderson 2023):** La antimateria con simetría C (simetría de carga), desarrollada en el laboratorio y que emite fotones de energía positiva, es empujada gravitatoriamente hacia abajo igual que la materia ordinaria.
- El modelo ofrece su propia interpretación de las fluctuaciones en el Fondo Cósmico de Microondas (CMB) atribuyéndolas a la respuesta de la materia ordinaria de masa positiva a las fluctuaciones de densidad en celdas adyacentes del universo pobladas por una distribución de materia de masa negativa. Esta situación está vinculada a la inestabilidad gravitatoria que se produce dentro de estas celdas. El análisis de estas fluctuaciones permite evaluar la relación entre los factores de escala de los dos tipos de materia. Se observa que la relación $\frac{a^{(+)}}{a^{(-)}}$ es del orden de 100. Por lo tanto, podemos deducir que la relación $\frac{c^{(-)}}{c^{(+)}}$ es del orden de 10 ((Petit 2018)). Esto implica que el efecto global sería reducir el tiempo requerido para el viaje interestelar en un factor de mil para los objetos que consiguen invertir su masa, permitiéndoles moverse a lo largo de las geodésicas descritas por la métrica $h_{\mu\nu}$ de la segunda ecuación de campo (24), como estudiaremos en la siguiente sección.

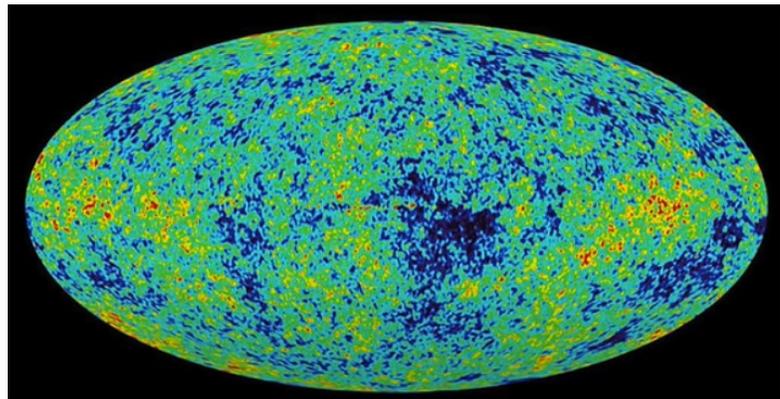


Figura 3.10 - Cosmología difusa *Fo nd*

- Desplazamiento al rojo gravitatorio de 3 deducido a partir de las dos primeras imágenes de objetos supermasivos situados en los centros de las galaxias M87 y Vía Láctea (véase el estudio realizado en la sección 7).
- Actualmente no hay respuesta a la pregunta: "*¿Qué había antes del Big Bang?*". Según el Modelo Cosmológico de Janus, una estructura topológica del universo, "*interactuando con su contrapartida anticrónica*", elimina esta pregunta al invalidar el significado del adverbio "*antes*". En efecto, como veremos más adelante, en el momento del Big Bang, la flecha del tiempo se invierte.

3.3 El dipolo repelente

3.3.1 Introducción

En 2017, Yehudi Hoffman, B. Tully, H. Courtois y D. Pomarède publicaron el primer mapa muy detallado del universo (Hoffman et al. 2017). Este mapa se basaba no solo en las posiciones de las galaxias, sino que también integraba su campo de velocidades sustrayendo la influencia de la expansión de Hubble de las mediciones brutas de su desplazamiento al rojo. Los resultados fueron increíblemente impresionantes y se consideran uno de los descubrimientos observacionales más importantes de la cosmología actual, comparable en importancia al descubrimiento de Edwin Hubble hace un siglo. Antes de este estudio, se sabía que algunas galaxias mostraban movimientos convergentes hacia una región llamada el Gran Atractor. El análisis de 2017 reveló la influencia de otra estructura mayor más allá del Gran Atractor, denominada Atractor de Shapley. Sin embargo, el descubrimiento más notable fue la identificación de una región casi opuesta a estas dos formaciones, donde no se detectaron galaxias. En su lugar, había un importante vacío rodeado de galaxias vecinas que mostraban un movimiento de alejamiento de esta región, formando un patrón de "fuga" centrado en este vacío. Inicialmente denominado Repulsor Dipolar, más tarde recibió el nombre de Atractor Dipolar cuando quedó claro que estaba vinculado a formaciones atractivas. La comprensión de este fenómeno, que no puede atribuirse a artefactos de medición, requiere sin duda avances significativos en nuestra comprensión de la dinámica cósmica.

3.3.2 Algunos intentos de interpretación

Cuatro años después del descubrimiento inicial, ha habido pocos intentos de modelizar el fenómeno del dipolo repelente. En su reciente artículo (Neiser 2020), Neiser no se centra en esta cuestión, sino que propone hipótesis sobre la naturaleza del Big Bang, el vacío cuántico y el origen del universo. Neiser especula que la antimateria podría tener un efecto gravitatorio repulsivo, lo que llevaría a la formación de estrellas de neutrinos y estrellas de antineutrinos que se repelen entre sí. Aspectos similares de la repulsión primordial de la antimateria son mencionados por Benoit-Lévy et al. en 2012 ((Benoit-Lévy y Chardin 2012)), pero sin mayor justificación. Heald, en su artículo (Heald 2020), menciona la situación de Laniakea, que es empujada por el Repulsor Dipolar y atraída por el Atractor de Shapley. Una vez más, se sugiere la idea de una repulsión entre materia y antimateria como posible explicación de la estructura a gran escala del universo y de la organización de los vacíos. Sin embargo, no se da ningún modelo concreto para el objeto central en el gran vacío, y la ausencia de luz emitida sigue sin explicación. En 2018, Vuyk sugiere en su artículo (Vuyk 2018) la existencia de una hipotética quinta fuerza, mientras que Hoffman et al. utilizan simulaciones numéricas para reconstruir una distribución de materia oscura coherente con los datos observacionales ((Hoffman et al. 2018)). De estas exploraciones surgen dos esquemas explicativos: uno que implica objetos hipotéticos compuestos de antimateria repulsiva, que son inobservables, y otro que sugiere una discrepancia en la distribución de la materia oscura. Las observaciones han revelado que la expansión del universo se está acelerando, lo que indica la presencia de una componente con presión negativa ((Perlmutter et al. 1999), (Riess et al. 2004), (Schmidt et al. 1998)). Un modelo propuesto para explicar este fenómeno sugiere la existencia de masas negativas que pueden

contribuir a estos efectos antigravitatorios, combinando las influencias repulsivas de la materia oscura y la energía oscura sobre las componentes de masa positiva. Esta hipótesis está en el centro de los trabajos correspondientes a las referencias (Petit 1995) (Petit y D'Agostini 2014a) (Petit y D'Agostini 2014b) (Petit, D'Agostini, y Debergh 2018) (Petit, D'Agostini, y Debergh 2019) (Petit y D'Agostini 2021a) (Petit y D'Agostini 2021b).

3.3.3 Interpretación por lagunas de la materia oscura

Investiguemos la posibilidad de que un vacío de materia oscura pueda producir el efecto repulsivo observado. Podemos empezar considerando un vacío esférico dentro de una distribución uniforme de materia oscura y utilizar la ecuación de Poisson para analizar este sistema:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} = 4\pi G \rho_{dm}$$

Esta ecuación es lineal y describe el potencial gravitatorio en función de la densidad. Superponiendo dos distribuciones de densidad ρ_1 y ρ_2 el potencial gravitatorio resultante es la suma de los potenciales asociados a estas dos distribuciones: $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Considerando una distribución de densidad uniforme ρ_{dm}^{unif} obtenemos un potencial ψ_1 que es la solución de la ecuación de Poisson :

$$\psi_1 = \frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}_1 = -\frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

Ahora, introduciendo un volumen de densidad opuesta igual a $-\rho_{dm}^{unif}$ creamos un potencial ψ_2 que es la solución de la siguiente ecuación de Poisson :

$$\frac{d^2\psi_2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_2}{dr} = -4\pi G \rho_{dm}^{unif}$$

Esta solución es :

$$\psi_2 = -\frac{4\pi G \rho_{dm}^{unif} r^2}{3}, \quad \vec{g}_2 = \frac{8\pi G \rho_{dm}^{unif}}{3} \vec{r}$$

De este modo, obtenemos el mismo campo gravitatorio pero de signo contrario. Por tanto, es repulsivo y proporcional a la distancia al centro de la esfera.

A continuación, calculando los potenciales gravitatorios asociados a estas dos distribuciones, podemos observar que el potencial gravitatorio resultante es cero dentro del vacío. En otras palabras, la fuerza gravitatoria ejercida por la distribución uniforme de materia oscura está exactamente equilibrada por la fuerza gravitatoria ejercida por la densidad opuesta que crea el vacío:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Sin embargo, sea cual sea la posición elegida como origen de las coordenadas, el campo gravitatorio sigue siendo distinto de cero dentro del vacío. Esto significa que la fuerza

gravitatoria no está perfectamente equilibrada, lo que parece contradecir la idea de que el vacío crea un campo gravitatorio repulsivo.

Para resolver esta paradoja, la ecuación de Poisson debe considerarse como la versión linealizada de la ecuación de Einstein en situación estacionaria, que define el potencial gravitatorio en términos de una perturbación de la métrica de Lorentz:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}$$

El cálculo clásico da para la densidad propia ρ_0 ((Adler, Bazin y Schiffer 1975)) :

$$\varepsilon \sum_{i=0}^3 \gamma_{00|i|i} = -\chi\rho_0$$

NB: En el contexto del límite de campo débil estudiado en la Sección 2.3.6, la ecuación (26) relaciona las segundas derivadas espaciales de la componente temporal γ_{00} del tensor métrico con las fuentes gravitatorias, representadas por la densidad masa-energía local ρ_0 . Esto nos ayuda a comprender cómo reacciona la curvatura del espacio-tiempo a la distribución masa-energía, manteniendo una relación precisa entre estos dos aspectos.

Así, el potencial gravitatorio se define como (27) por :

$$\psi = -\frac{c^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}$$

Entonces, (26) puede identificarse con la ecuación de Poisson. Sin embargo, este enfoque no puede aplicarse a una distribución uniforme infinita de materia oscura. La conclusión es que es sencillamente imposible definir un potencial gravitatorio dentro de una distribución uniforme de materia, porque la inestabilidad gravitatoria tiende a conducir a la formación de cúmulos, no de vacuolas, y no existe un marco claro para la formación de tales vacuolas.

3.3.4 Interpretación según el modelo cosmológico de Janus

Consideremos ahora la interacción entre dos entidades: materia ordinaria con masa positiva que interactúa con masa negativa a través de efectos gravitatorios. Este modelo de masa negativa tiene en cuenta la influencia de la materia y la energía oscuras.

Podemos describir este sistema de dos entidades con métricas de g y h . Sea G y H los correspondientes escalares de Ricci. Consideramos entonces la siguiente acción de dos capas:

$$A = \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{1}{2\Gamma^{(g)}} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{\kappa}{2\Gamma^{(h)}} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x$$

Los términos $S_{(g)}$ y $S_{(h)}$ darán los términos fuente relacionados con las poblaciones de las dos entidades, mientras que los términos $S_{(h,g)}$ y $S_{(g,h)}$ generarán los tensores de interacción $\Gamma^{(g)}$ y $\Gamma^{(h)}$ son las constantes de Einstein para cada entidad. Para $\kappa =$

±1 aplicamos el principio de mínima acción. La derivación lagrangiana de esta acción nos da :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta A \\
&= \int_{\varepsilon} \delta \left(\frac{1}{2\Gamma(g)} G + S_{(g)} + S_{(h,g)} \right) \sqrt{|g|} d^4x + \int_{\varepsilon} \delta \left(\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} H + S_{(h)} + S_{(g,h)} \right) \sqrt{|h|} d^4x \\
&= \int_{\varepsilon} \delta \left[\frac{1}{2\Gamma(g)} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x \\
&\quad + \int_{\varepsilon} \delta \left[\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} \right] \delta h^{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^4x
\end{aligned}$$

Para cualquier variación $\delta g^{\mu\nu}$ y todas las variaciones $\delta h^{\mu\nu}$ obtenemos localmente :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Gamma(g)} \left(\frac{\delta G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{G}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} &= 0 \\
\frac{\kappa}{2\Gamma(h)} \left(\frac{\delta H}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{H}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta \sqrt{|h|}}{\delta h^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} &= 0
\end{aligned}$$

Introduzcamos los siguientes tensores:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(g,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(g)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(h)} \\
T_{\mu\nu}^{(h,g)} &= -\frac{2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} \\
T_{\mu\nu}^{(g,h)} &= -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

En relatividad general, la derivada covariante es una forma de generalizar la noción de derivada parcial a los espacios curvos. A diferencia de la derivada parcial ordinaria, la derivada covariante tiene en cuenta la curvatura del espacio-tiempo.

Entonces, para un tensor $A_{\nu\sigma}^{\rho}$ su derivada covariante a lo largo de un índice μ viene dada por la expresión :

$$\nabla_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} A_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} A_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} A_{\nu\lambda}^{\rho}$$

Por tanto, podemos deducir las dos expresiones siguientes:

$$\nabla_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}$$

$$\nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho$$

NB:

- (28b) se obtiene a partir de (28a) simplemente intercambiando μ y ν .
- El término $\partial_\mu A_{\nu\sigma}^\rho$ es la derivada parcial ordinaria del tensor. Si el espacio-tiempo fuera plano (como en la física newtoniana), esto bastaría para describir la variación del tensor.
- Términos con símbolos Christoffel $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho$, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$ representan la corrección debida a la conexión espacio-tiempo, que tiene en cuenta la curvatura del espacio-tiempo. De hecho, en el espacio curvo, la conexión (representada por el símbolo de Christoffel Γ) introduce una corrección. Esta corrección es necesaria porque las bases del espacio tangente (el espacio en el que vive el tensor) cambian de un punto a otro del espacio-tiempo. Por tanto $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho A_{\nu\sigma}^\lambda$ es el término que corrige el cambio en el $A_{\nu\sigma}^\lambda$ al moverse en la dirección μ para el índice mayor ρ . $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_{\lambda\sigma}^\rho$ y $\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda A_{\nu\lambda}^\rho$ son términos que restan la contribución debida al cambio en los índices inferiores ν y σ . Estos términos garantizan que la derivada covariante respete las reglas de transformación tensorial.

En resumen, la derivada covariante ∇_μ de un tensor es una combinación de su derivada parcial ordinaria y términos que compensan los cambios en la geometría del espacio-tiempo. Se construye de tal manera que la derivada del tensor es a su vez un tensor, lo que no ocurre con la derivada parcial ordinaria.

Entonces, el tensor de Riemann se relaciona con los símbolos de Christoffel mediante la siguiente ecuación :

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

NB: El tensor de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ es una magnitud matemática de la relatividad general que describe la curvatura intrínseca del espacio-tiempo. Se define como la diferencia entre las derivadas parciales de los símbolos de Christoffel y la suma de los productos de los propios símbolos de Christoffel. El término $\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho$ es la derivada parcial del símbolo de Christoffel $\Gamma_{\nu\sigma}^\rho$ con respecto a la coordenada x^μ . Este término mide cómo varía el símbolo de Christoffel al moverse en la dirección μ . El término $\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ es similar al primero, pero con la derivada parcial tomada en otra dirección, x^ν . Los términos $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$ y $\Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$ describen el producto de dos símbolos de Christoffel que representan la interacción entre dos conexiones espacio-temporales. Mide cómo la curvatura en una dirección influye en la curvatura en otra dirección.

Entonces tenemos:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

Esto nos da:

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$$

Contrayendo los índices ρ y σ en la relación anterior utilizando la convención de suma de Einstein, que establece que un índice repetido implica una suma implícita sobre ese índice, podemos expresar la variación del tensor de curvatura de Ricci que satisface la identidad de Palatini ((Tsamparlis 1978), (Palatini 1919)) :

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho})$$

NB: En relatividad general, la geometría del espacio-tiempo se describe mediante una cantidad llamada tensor métrico, denotada por $g_{\mu\nu}$. Este tensor contiene toda la información sobre distancias y ángulos en el espacio-tiempo.

El escalar de Ricci, denominado *Res* una medida de la curvatura del espacio-tiempo en un punto dado. Se calcula sumando (o contrayendo) las componentes del tensor de Ricci $R_{\sigma\nu}$ con el tensor métrico $g^{\sigma\nu}$. Matemáticamente, es como multiplicar las matrices del tensor de Ricci y el tensor métrico, y luego sumar los términos a lo largo de la diagonal.

Además, debemos tener la derivada covariante del tensor métrico igual a cero, es decir $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$. En otras palabras, al movernos por el espaciotiempo, la forma de medir distancias y ángulos no cambia. Esta es una propiedad fundamental del espaciotiempo en relatividad general, que indica que la geometría local no cambia cuando te mueves, sea cual sea la curvatura global.

En resumen, el escalar de Ricci R nos da una idea de la curvatura del espaciotiempo en un punto, y el hecho de que $\nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0$ garantiza que la forma del espaciotiempo permanece constante a medida que nos movemos, sea cual sea la curvatura global, es decir, esta consistencia está asegurada por la compatibilidad de la métrica con la conexión de Levi-Civita, que garantiza que conceptos geométricos como longitudes y ángulos permanecen constantes a medida que son transportados a través del espaciotiempo.

Entonces podemos deducir:

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}\delta R_{\sigma\nu} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + g^{\sigma\nu}(\nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho})) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - g^{\sigma\nu}\nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}(g^{\sigma\nu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - g^{\sigma\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\mu}) \\ &= R_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + \nabla_{\rho}B^{\rho} \end{aligned}$$

NB: Para el cálculo anterior, debemos tener en cuenta dos reglas:

- Las propiedades de la derivada covariante y la regla de Leibniz (la regla del producto de la derivada). La regla de Leibniz para la derivada covariante es similar a la de la derivada ordinaria y se escribe como sigue:

$$\nabla_{\rho}(AB) = (\nabla_{\rho}A)B + A(\nabla_{\rho}B)$$

donde A y B pueden ser campos escalares, vectoriales o tensoriales.

- Como ya se ha señalado, los índices repetidos se denominan índices *silenciosos según la* convención de suma de Einstein. De hecho, es útil recordar que cuando el subíndice de una variable aparece dos veces en un término, una en la posición superior y otra en la inferior, esto implica una suma sobre todos los valores posibles que puede tomar el subíndice. Por ejemplo $A^\mu B_\mu$ implica $\sum_\mu A^\mu B_\mu$. Consideremos los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$ y $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$. En estas expresiones, los índices μ y ρ son ejemplos de índices mudos según la convención de suma de Einstein. Esto significa que la expresión $\Gamma_{\mu\sigma}^\mu$ en la que la suma se realiza sobre todos los valores posibles de μ es idéntica a $\Gamma_{\rho\sigma}^\rho$ donde la suma se realiza sobre todos los valores posibles de ρ . Así que podemos aplicar los índices de suma $(\rho, \nu) \rightarrow (\mu, \rho)$ en el último término.

Calculado de dos formas diferentes, obtenemos :

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) &= \nabla_\mu (\sqrt{|g|}) B^\mu + \sqrt{|g|} \nabla_\mu (\delta B^\mu) = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu + 0 = \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu \\ \nabla_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) &= \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \sqrt{|g|} \delta B^\nu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) + 0 = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu)\end{aligned}$$

NB: Del mismo modo, la derivada del determinante del tensor métrico, representado por $\sqrt{|g|}$ también es cero cuando se toma covariantemente, es decir $\nabla_\mu \sqrt{|g|} = 0$. Esta última propiedad simplifica la expresión de las integrales de volumen y es fundamental para la aplicación del teorema de la divergencia en el espaciotiempo curvo.

A continuación, podemos deducir:

$$\sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu = \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu)$$

Consideremos ahora la contribución de $\sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu$ en la acción. Sea n^μ un vector unitario normal a $\partial\mathcal{E}$, $\varepsilon = n^\mu n_\mu$ y y^a que representan coordenadas adaptadas a la frontera $\partial\mathcal{E}$ y h_{ab} la métrica inducida por g_{ab} en la frontera. Tenemos $|\varepsilon| = 1$ y $\sqrt{|h|} d^3 y$ es una forma de volumen de dimensión $(n - 1)$ en la frontera, con $h = \det(h_{ab})$. Por el teorema de Stokes, tenemos :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon \sqrt{|g|} \nabla_\mu \delta B^\mu \sqrt{-g} d^4 x &= \int_\varepsilon \partial_\mu (\sqrt{|g|} \delta B^\mu) d^4 x \\ &= \int_{\delta\mathcal{E}} \varepsilon \delta B^\mu n_\mu \sqrt{|h|} d^3 y\end{aligned}$$

Supondremos que la métrica no varía en la frontera (o que no hay frontera). En este caso, el término $\nabla_\mu \delta B^\mu \sqrt{-g}$ no contribuye a la acción, por lo que tenemos :

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + \frac{\nabla_\rho B^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} \approx R_{\mu\nu}$$

Sin embargo, según el corolario con $a = \frac{1}{2}$ tenemos :

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

Así que podemos deducir:

$$\frac{R\delta\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

NB: Para los cálculos anteriores, tenemos que explicar dos cosas:

- La variación del determinante del tensor métrico, denominada δg está relacionada con la variación del propio tensor métrico $\delta g_{\mu\nu}$ mediante la relación $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ donde g es el determinante del tensor métrico y $g^{\mu\nu}$ es su inversa. Esta relación se deriva de la propiedad matemática de los determinantes, donde la derivada de un determinante puede expresarse como el determinante multiplicado por la traza del producto de la inversa de la matriz y la derivada de la matriz. En el caso de una variación pequeña, la variación de la raíz cuadrada del determinante negativo del tensor métrico, $\delta\sqrt{-g}$ viene dada por $\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Esta fórmula es esencial para derivar las ecuaciones de campo de Einstein a partir de la acción de Einstein-Hilbert, ya que permite integrar la acción sobre la variedad espacio-tiempo de cuatro dimensiones.
- En nuestro estudio, utilizamos el teorema de Stokes para simplificar un cálculo crucial. Este teorema establece una interesante relación entre la integral de una derivada de un campo vectorial sobre una región tridimensional y la integral del mismo campo vectorial a lo largo de la frontera de esta región. Consideremos un ejemplo sencillo: imaginemos una superficie cerrada en el espacio (como la superficie de una esfera). Si queremos calcular algo dentro de esta superficie (por ejemplo, la suma de los valores de un campo), el teorema de Stokes nos permite hacerlo simplemente examinando lo que ocurre en la propia superficie. La ecuación (29), que presentamos en nuestro cálculo, sigue esta idea. Nos dice que la integral de la derivada de un campo ($\nabla_{\mu}\delta B^{\mu}$) sobre una región de cuatro dimensiones (\mathcal{E}) puede ser equivalente a la integral de la divergencia de otro campo ($\sqrt{|g|}\delta B^{\mu}$) sobre la misma región (\mathcal{E}). Esta equivalencia se consigue mediante la métrica y un elemento de volumen de cuatro dimensiones (d^4x). A continuación, la ecuación (30) simplifica aún más la expresión llevándola al límite de la región ($\delta\mathcal{E}$). Nos muestra que esta equivalencia puede expresarse como una integral a lo largo de la frontera ($\delta\mathcal{E}$), utilizando los vectores normales (n_{μ}) a esta frontera y la métrica inducida en ella ($\sqrt{|h|}d^3y$). En otras palabras, esta ecuación nos permite comprender lo que ocurre en la superficie de nuestra región sin tener que calcular lo que ocurre en su interior. En resumen, el teorema de Stokes nos permite racionalizar nuestros cálculos al

mostrarnos cómo los fenómenos que ocurren en el interior de una región pueden entenderse simplemente examinando lo que ocurre en la frontera de dicha región. Este truco matemático es esencial para resolver estos complejos problemas.

De las ecuaciones (31a) y (31b) obtenemos :

$$\sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|} S_{(h,g)})}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(h,g)}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} S_{(h,g)}$$

$$\sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{|h|}} \frac{\delta(\sqrt{|h|} S_{(g,h)})}{\delta h^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta S_{(g,h)}}{\delta h^{\mu\nu}} + h_{\mu\nu} S_{(g,h)}$$

Introducidas en (32a) y (32b), teniendo en cuenta (33), podemos deducir así las ecuaciones de campo acopladas que describen el sistema de las dos entidades:

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = \kappa \Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

Donde $T_{\mu\nu}^{(h,g)}$ y $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$ son los tensores de interacción del sistema de dos entidades correspondientes a la "geometría inducida", es decir, la forma en que cada distribución de materia en una capa del universo contribuye a la geometría de la otra (interacción entre poblaciones de masas positivas y negativas). Este sistema debe obedecer a las condiciones de Bianchi, que se expresan mediante la siguiente relación :

$$\nabla_{\mu}^{(g)} T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \nabla_{\mu}^{(h)} T_{\mu\nu}^{(g,h)} = 0$$

Supongamos que los fluidos dentro de las entidades g y h son perfectos, con densidades de energía correspondientes a los siguientes tensores fuente :

$$T_{\mu\nu}^{(g,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(h,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h)} \end{pmatrix}$$

Tomaremos $\{\alpha^{(g)} > 0, \beta^{(g)} > 0\}$ y $\{\alpha^{(h)} < 0, \beta^{(h)} < 0\}$. Nos aseguraremos de que las leyes de interacción son tales que dos partículas que pertenecen a la misma entidad se atraen, mientras que se repelen cuando pertenecen a entidades diferentes.

Introduzcamos sus tensores de interacción:

$$T_{\mu\nu}^{(h,g)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(h,g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(h,g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(h,g)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(h,g)} \end{pmatrix}, T_{\mu\nu}^{(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(g,h)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(g,h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(g,h)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^{(g,h)} \end{pmatrix}$$

Para obtener las leyes de interacción deseadas bajo la aproximación newtoniana, debemos elegir $\kappa = -1$. El sistema de ecuaciones se convierte entonces en:

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \sqrt{\frac{|h|}{|g|}} T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right) = \Gamma^{(g)} \left(T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right) = -\Gamma^{(h)} \left(T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \Phi T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right)$$

3.3.4.1 Verificación para un sistema no estacionario, homogéneo e isótropo

Si suponemos que el universo bimétrico, estructurado por las ecuaciones de campo acopladas (34a) y (34b), es homogéneo e isótropo, la métrica de Robertson-Walker pasa a ser, según (Adler, Bazin y Schiffer 1975) :

$$(ds^{(f)})^2 = (c^{(f)})^2 dt^2 - (a^{(f)})^2 \left[\frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{\left(1 + k^{(f)} \frac{r^2}{4}\right)^2} \right] \quad \text{où } f \in \{g, h\}$$

Tenga en cuenta que $a^{(f)}$ es el factor de escala, $k^{(f)}$, $c^{(f)}$ y $\Gamma^{(f)}$ son respectivamente el índice de curvatura, la velocidad de la luz y la constante de Einstein para cada entidad.

Si introducimos estas métricas en el sistema de ecuaciones (34a) y (34b) con las presiones $p^{(g)} \approx 0$ y $p^{(h)} \approx 0$ obtenemos el siguiente sistema clásico de ecuaciones:

$$\frac{3}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \left(\frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} = -\Gamma^{(g)} \left[\rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} \left(\frac{da^{(g)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(g)}}{(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^2} = 0$$

$$\frac{3}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \left(\frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{3k^{(h)}}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} = \Gamma^{(h)} \left[\Phi \rho^{(g)} (c^{(g)})^2 + \rho^{(h)} (c^{(h)})^2 \right]$$

$$\frac{2}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} + \frac{1}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} \left(\frac{da^{(h)}}{dt} \right)^2 + \frac{k^{(h)}}{(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^2} = 0$$

Aplicando los métodos matemáticos clásicos de (Adler, Bazin y Schiffer 1975), las condiciones de compatibilidad de las ecuaciones (35a), (35b), (35c) y (35d) dan :

$$3 \frac{da^{(g)}}{a^{(g)}} + \frac{d[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]}{[\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \Phi \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]} = 0$$

$$3 \frac{da^{(h)}}{a^{(h)}} + \frac{d[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]}{[\phi \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2]} = 0$$

Por tanto, la energía (y la masa) se conservan en un universo de polvo:

$$E = \rho^{(g)}(c^{(g)})^2 (a^{(g)})^3 + \rho^{(h)}(c^{(h)})^2 (a^{(h)})^3$$

Si tenemos :

$$\Phi = \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3, \quad \phi = \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3, \quad \phi = \Phi^{-1}$$

Las ecuaciones de campo acopladas se convierten en :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} \left[T_{\mu\nu}^{(g,g)} + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(h,g)} \right]$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \left[T_{\mu\nu}^{(h,h)} + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 T_{\mu\nu}^{(g,h)} \right]$$

Si ambas entidades están dominadas por la radiación. El tensor de interacción de modo mixto será :

$$T_{\mu}^{\nu(f)} = \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_r^{(f)} c^{(f)2}}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_r^{(f)} c^{(f)2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_r^{(f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_r^{(f)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_r^{(f)} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{cases} \text{si } \rho_r^{(f)} > 0 \text{ alors } p_r^{(f)} > 0 \text{ pour } f = g \\ \text{si } \rho_r^{(f)} < 0 \text{ alors } p_r^{(f)} < 0 \text{ pour } f = h \end{cases}$$

NB:

- En un contexto cosmológico, el tensor energía-impulso $T_{\mu}^{\nu(f)}$ se utiliza para describir la distribución y la interacción de la materia y la energía en el universo. Para un campo específico f la componente temporal $T_0^{(f)}$ representa la densidad de energía, que es un determinante clave de la curvatura del espacio-tiempo. Los componentes espaciales $T_i^{(f)}$ por su parte, representan la presión ejercida en las direcciones espaciales, que también influye en la estructura del espacio-tiempo. En un modelo bimétrico, en el que se consideran dos campos distintos -uno para cada capa del universo-, las condiciones asociadas describen las relaciones entre las densidades de energía y las presiones de cada campo, reflejando cómo estas entidades interactúan e influyen colectivamente en la dinámica cósmica.
- El tensor energía-impulso se expresa en forma diagonal cuando se considera que el universo es isótropo y homogéneo, lo que significa que sus propiedades físicas son independientes de la dirección y la ubicación. Esta suposición, fundamental para el modelo cosmológico estándar, se conoce como principio cosmológico (Sección 2.2.3). La isotropía implica que el universo parece idéntico en todas las direcciones; no hay ninguna dirección preferente en la que difiera la distribución de materia o energía. Homogeneidad significa que, a gran escala, cada región del universo se parece a cualquier otra región. En consecuencia, los flujos transversales de energía y momento, que estarían representados por términos no diagonales en el tensor, están ausentes, ya que no existe ningún movimiento o flujo de energía privilegiado en una dirección específica. Sólo las densidades de energía y las presiones en las direcciones espaciales, que son uniformes y no varían con la dirección, aparecen en la matriz del tensor energía-impulso, lo que explica su forma diagonal.

A continuación, introduciendo la presión radiativa inducida por cada entidad :

$$p_r^{(g)} = \frac{\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2}{3}, \quad p_r^{(h)} = \frac{\rho_r^{(h)}(c^{(h)})^2}{3}$$

Podemos entonces considerar que la entidad transportada por la métrica h denominadas energía y materia oscuras, podrían atribuirse a masas negativas que, en la fase radiativa, obedecerían a la misma ecuación de estado :

$$\beta^{(h)} = \frac{\alpha^{(h)}}{3}$$

En estas condiciones, la relación de conservación se expresa siempre, en su forma radiativa, por la conservación de la suma de las dos energías, la del gas de fotones y la de las masas negativas :

$$\rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 + \alpha^{(h)}(a^{(h)})^4 = \rho_r^{(g)}(c^{(g)})^2(a^{(g)})^4 = \text{Constante}$$

La solución exacta del sistema, para los índices de curvatura $k^{(g)} = k^{(h)} = -1$ y $\Gamma^{(f)} = -\frac{8\pi G}{c^4}$ donde $f \in \{g, h\}$ se convierte en una solución de las siguientes ecuaciones :

$$a^{(g)^2} \frac{d^2 a^{(g)}}{dt^2} = \frac{\Gamma^{(g)}}{2} E$$

$$a^{(h)^2} \frac{d^2 a^{(h)}}{dt^2} = -\frac{\Gamma^{(h)}}{2} E$$

Si suponemos que $E < 0$ entonces $a^{(g)} > 0$ y $a^{(h)} < 0$. Entonces podemos concluir que la parte visible de nuestro universo se está acelerando, mientras que las especies negativas se están desacelerando. Aquí, observamos el efecto de la especie negativa dominante, que conduce al fenómeno de la aceleración de la expansión cósmica, ya que el lado derecho de la primera ecuación se vuelve positivo ((Petit y D'Agostini 2021b)) :

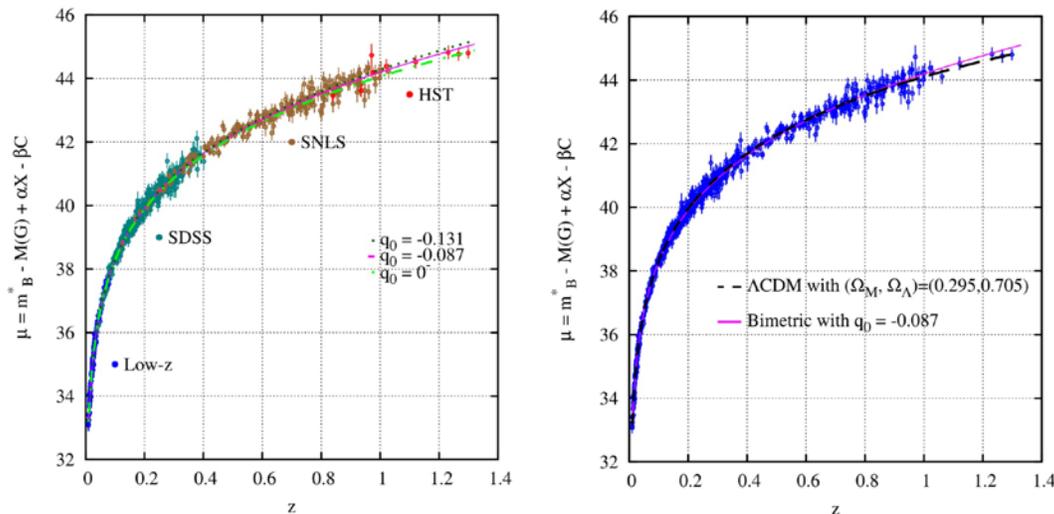


Figura 3.11 - Diagrama de Hubble de los dos modelos (desplazamiento al rojo lineal)

Este sistema biespecífico permite consolidar los efectos atribuidos a la materia oscura y a la energía oscura en una única entidad compuesta de masas negativas que combina las dos acciones, como ilustra el siguiente diagrama:



Figura 3.12 - Modelos del Universo

3.3.4. Verificación local de un sistema estacionario

Al estudiar el universo, a menudo simplificamos los modelos para hacerlos más manejables. Una simplificación habitual consiste en considerar que una pequeña región del espacio está vacía y aislada de las vastas complejidades del cosmos. Este enfoque es especialmente útil cuando nos interesan fenómenos que ocurren en periodos cortos de tiempo, mucho más breves que las escalas temporales en las que cambia el propio universo. En tales casos, podemos utilizar métricas "independientes del tiempo", lo que significa que suponemos que la estructura del espacio no cambia con el tiempo durante nuestra observación. Para añadir un poco de complejidad, a veces introducimos las llamadas "perturbaciones" en el modelo. Estas perturbaciones son pequeños cambios en el espacio, por lo demás simple, que estamos considerando. Nos permiten estudiar cómo pequeños cambios o perturbaciones pueden afectar al sistema. En nuestro caso, estas perturbaciones están representadas por términos como $\gamma_{\mu\nu}^{(g)}$ y $\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$ que significan pequeñas desviaciones en la estructura geométrica del espacio, que potencialmente representan diferentes aspectos o componentes del universo.

$$g_{\mu\nu}^{(g)} = \eta_{\mu\nu}^{(g)} + \epsilon\gamma_{\mu\nu}^{(g)}, \quad g_{\mu\nu}^{(h)} = \eta_{\mu\nu}^{(h)} + \epsilon\gamma_{\mu\nu}^{(h)}$$

Para la métrica, tenemos :

$$(ds^{(g)})^2 = (c^{(g)})^2 dt^2 - (a^{(g)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

$$(ds^{(h)})^2 = (c^{(h)})^2 dt^2 - (a^{(h)})^2 [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2]$$

En cosmología, cuando hablamos de "condiciones cuasi estacionarias", nos referimos a una situación en la que se supone que ciertos aspectos del universo son relativamente constantes a lo largo del periodo que estamos estudiando. Más concretamente, en este contexto, se supone que los "factores de escala" del universo, que describen cómo cambia el tamaño del universo a lo largo del tiempo, son constantes. Se trata de una aproximación útil para estudiar determinados fenómenos a corto plazo.

Para investigar la física de un escenario así, utilizamos lo que se conoce como "expansión en serie" de las ecuaciones de campo. Se trata de una técnica matemática que consiste en descomponer ecuaciones complejas en partes más sencillas y manejables. Sin embargo, nos centramos sólo en las partes más significativas: en este caso, ignoramos los términos de orden dos y superiores, ya que tienen un impacto mínimo en los resultados de los escenarios a pequeña escala o a corto plazo.

Las dos ecuaciones simplificadas resultantes describen el comportamiento de las perturbaciones en este universo cuasi estacionario. Estas ecuaciones incluyen términos como $\epsilon\gamma_{00}$ y $\delta\rho$ que representan pequeños cambios en la geometría del espacio y la densidad de la materia, respectivamente.

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(g)} = -\Gamma^{(g)} \left[\delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\varepsilon\gamma_{00|\beta|\beta}^{(h)} = \Gamma^{(h)} \left[\delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 \right]$$

Además, definimos "*potenciales gravitatorios*" para cada componente del universo, denotados por $\psi^{(g)}$ y $\psi^{(h)}$. Estos potenciales están relacionados con cambios en la geometría del espacio y son clave para entender los efectos gravitatorios en diferentes regiones o componentes del universo (como (36)).

$$\psi^{(g)} = \frac{(c^{(g)})^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}^{(g)}, \quad \psi^{(h)} = \frac{(c^{(h)})^2}{2} \varepsilon\gamma_{00}^{(h)}$$

Obtenemos :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(g)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = -\Gamma^{(g)} \frac{(a^{(g)})^2}{2} \left[\delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 + \left(\frac{a^{(h)}}{a^{(g)}}\right)^3 \delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 \right]$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi_\alpha} = \Gamma^{(h)} \frac{(a^{(h)})^2}{2} \left[\delta\rho^{(h)}(c^{(h)})^2 + \left(\frac{a^{(g)}}{a^{(h)}}\right)^3 \delta\rho^{(g)}(c^{(g)})^2 \right]$$

En física, sobre todo en el estudio del espacio y el universo, como hemos visto en este apartado 2.3.8, las "*ecuaciones geodésicas*" describen cómo se mueven los objetos bajo la influencia de la gravedad. En términos sencillos, estas ecuaciones nos indican la trayectoria que seguirá un objeto cuando se mueve únicamente bajo la influencia de la gravedad. Por ejemplo, cómo orbitan los planetas alrededor de las estrellas o cómo caen los objetos a la Tierra.

En nuestro escenario, estamos tratando con dos capas (o láminas) diferentes del universo, cada una con sus propias propiedades. La primera capa, que podemos considerar como el universo de la materia ordinaria, sigue un conjunto de reglas. La segunda capa de masas negativas, asociada a la materia oscura y la energía oscura, sigue otro conjunto de reglas.

Las dos ecuaciones siguientes son la forma de expresar matemáticamente cómo se moverían los objetos en estas dos capas diferentes (la capa de materia ordinaria y la de masas negativas, respectivamente). Estas ecuaciones se parecen a la ecuación clásica de Poisson en física, que se utiliza para describir los campos gravitatorios. Sin embargo, las ecuaciones tienen una característica especial: tienen en cuenta las diferentes "*velocidades de la luz*" en cada capa. Esta modificación es crucial para explorar teorías que van más allá de nuestra comprensión estándar de la física.

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{(a^{(g)})^2} \frac{\partial \psi^{(g)}}{\partial \xi_\alpha}$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = - \frac{1}{(a^{(h)})^2} \frac{\partial \psi^{(h)}}{\partial \xi_\alpha}$$

Las leyes de interacción que hemos elegido garantizan que las entidades de las capas estructuradas por las métricas g y h son mutuamente excluyentes (3.13).

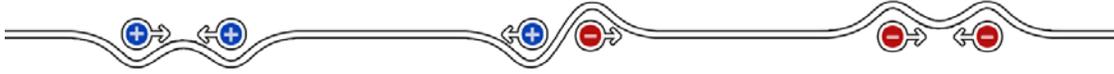


Figura 3.13 - Leyes de acción inter entre masas

En consecuencia, podemos considerar una región en la que sólo esté presente una de las dos entidades. Centrándonos en el sistema de referencia estructurado por la métrica g que está poblado por materia ordinaria como en el sistema solar, el sistema de ecuaciones de campo acopladas se simplifica a :

$$R_{\mu\nu}^{(g)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = \Gamma^{(g)} T_{\mu\nu}^{(g,g)}$$

$$R_{\mu\nu}^{(h)} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} H = -\Gamma^{(h)} \sqrt{\frac{|g|}{|h|}} T_{\mu\nu}^{(g,h)}$$

La primera ecuación puede identificarse con la ecuación de Einstein sin la constante cosmológica Λ . Esta ecuación representa el Modelo Estándar de la gravedad para la materia ordinaria. La segunda ecuación recoge lo que podríamos llamar *el "efecto de geometría inducida"*. Describe cómo la geometría del espacio, influida por la presencia de materia ordinaria en una esfera de radio r y densidad $\rho^{(g)} = \rho$ afecta a las geodésicas de la capa de masa negativa. En consecuencia, podemos deducir que este modelo bimétrico, en el que la materia ordinaria de una capa interactúa con las masas negativas situadas en una segunda, está en consonancia con las pruebas estándar de la relatividad general a nivel local. No obstante, sigue siendo crucial verificar la coherencia de este sistema en condiciones estacionarias e inhomogéneas.

3.3.4.3 Naturaleza de la antimateria primordial

Siguiendo las propuestas de Sájarov en (Sájarov 1967), (Sájarov 1980) y (Sájarov 1979), supongamos que el par materia/antimateria de la primera capa de nuestro universo está formado por quarks y antiquarks de energía positiva. Al mismo tiempo, un par materia/antimateria en una segunda capa estaría formado por quarks y antiquarks de energía negativa. Si la síntesis de materia en la primera capa (el primer par) fuera más rápida, mientras que la síntesis de antimateria en la segunda capa (el segundo par) fuera más lenta, esto podría llevar a la hipótesis de que los objetos situados en el centro de los grandes vacíos de la estructura a gran escala del universo, como indica el fenómeno del repulsor dipolar, están compuestos de antimateria. Esta antimateria incluye antiprotones, antineutrones y antielectrones con energía negativa, es decir, masas negativas ((J. M.

Souriau 1997)). Estos últimos podrían formar objetos esferoidales compuestos de antihidrógeno (elementos ligeros) con propiedades repulsivas similares a las inmensas protoestrellas formadas durante la fase radiativa primordial (al principio del universo).

La red lacunar de masa positiva confina este espacio de densidad negativa, impidiendo su fusión. A la inversa, estos conglomerados de masa negativa actúan como puntos de anclaje de esta red porosa en el universo de masas positivas, garantizando la estabilidad global.

Las estrellas de masa positiva se asemejan inicialmente a cúmulos esferoidales de gas, calentados a temperaturas de entre 1000 y 2000°C. Estas protoestrellas se enfrían progresivamente, emitiendo radiación principalmente en los espectros rojo e infrarrojo. Para transformarse en estrellas completas, la materia y los gases deben sufrir una contracción gravitatoria, alcanzando temperaturas y densidades lo suficientemente elevadas como para iniciar reacciones de fusión termonuclear. Este proceso de contracción libera energía térmica, que se irradia a la superficie de la estrella en forma electromagnética, incluida la luz visible. Esta liberación de energía es proporcional al cuadrado del radio de la estrella. Las estrellas más grandes tienen superficies mayores y pueden disipar más calor. Sin embargo, la cantidad de calor producida es proporcional al cubo del radio de la estrella, vinculado a su volumen. Así, en el caso de las estrellas muy masivas, el ritmo de enfriamiento puede ser relativamente lento, y la temperatura puede tardar bastante tiempo en alcanzar el umbral necesario para desencadenar las reacciones de fusión termonuclear que permiten a la estrella brillar.

En nuestro mundo positivo, se considera que las reacciones de fusión nuclear pueden comenzar en el corazón de una protoestrella cuando la temperatura alcanza un punto óptimo de unos 10 millones de grados Celsius. Es a esta temperatura cuando los núcleos de hidrógeno, que constituyen la mayor parte de la materia de la protoestrella, adquieren la energía cinética suficiente para superar la barrera electrostática debida a su carga positiva. Cuando se supera esta barrera, los núcleos de hidrógeno pueden fusionarse para formar helio, liberando una cantidad considerable de energía radiante y térmica. Esta temperatura óptima permite una reacción de fusión nuclear más eficaz, produciendo el resplandor característico de las estrellas.

Por ejemplo, una protoestrella de masa negativa muy masiva y muy caliente puede tardar mucho tiempo en enfriarse lo suficiente para que comiencen las reacciones de fusión, ya que el proceso de contracción de la protoestrella debe generar suficiente calor para compensar la pérdida de calor en la superficie.

Como resultado, estas protoestrellas muy masivas de masa negativa tienen tiempos de enfriamiento tan largos que nunca se encenderán (superando la edad del universo). En consecuencia, no puede formarse ninguna galaxia, ningún elemento pesado, ninguna molécula ni ninguna otra forma de materia necesaria para el desarrollo de la vida en el mundo negativo.

3.3.4. 4 Simulaciones digitales 2D

Se realizaron simulaciones numéricas bidimensionales utilizando dos conjuntos de 5000 puntos de masa, que representan agrupaciones de materia ordinaria (densidad de población $\rho^{(g)}$) y masas negativas (densidad de población $\rho^{(h)}$).

Se mantuvo una asimetría significativa entre las dos poblaciones, siendo $|\rho^{(h)}|$ mucho mayor que $\rho^{(g)}$. Además, se aplicaron distribuciones de velocidad térmica Maxwelliana 2D a ambos conjuntos, siendo la velocidad media de la distribución de masas negativas cuatro veces mayor que la de la materia ordinaria.

Estas simulaciones revelaron una estructura lacunar de masas negativas en los centros de los grandes vacíos de la estructura a gran escala del universo. Como los tiempos de Jeans varían inversamente con la raíz cuadrada de la densidad, el tiempo de desarrollo de la distribución de masa negativa es más corto. Esto conduce a la formación de una red regular de conglomerados esferoidales. La distribución de materia ordinaria, por tanto, se ve obligada a ocupar el espacio restante, dando lugar a una estructura lacunar similar a un conjunto de pompas de jabón unidas en simulaciones tridimensionales. Este modelo también fue observado por Brennen en 1995 (Brennen 1995) (Figuras 3.14 y 3.15), citado por El-Ad en 1997 ((El-Ad, Piran y Costa 1997)).

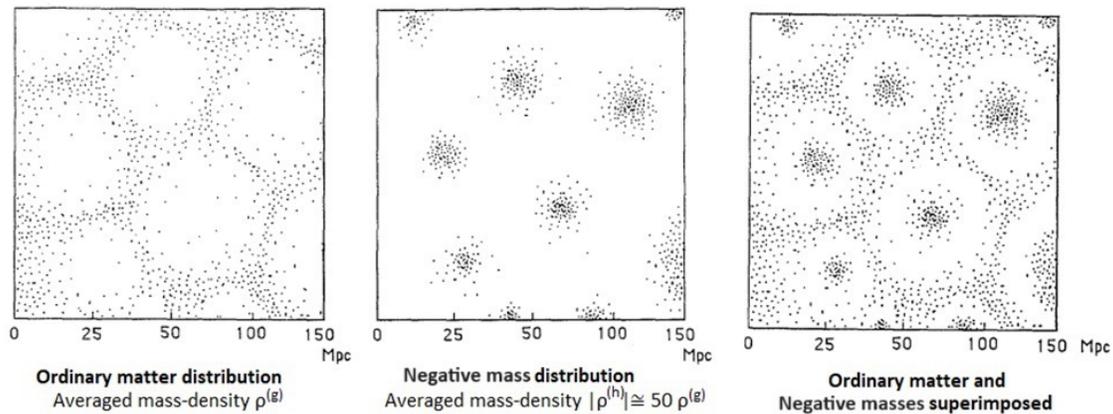


Figura 3.14 - Distribución de materia ordinaria y masa negativa cuando $|\rho^{(h)}| \gg \rho^{(g)}$

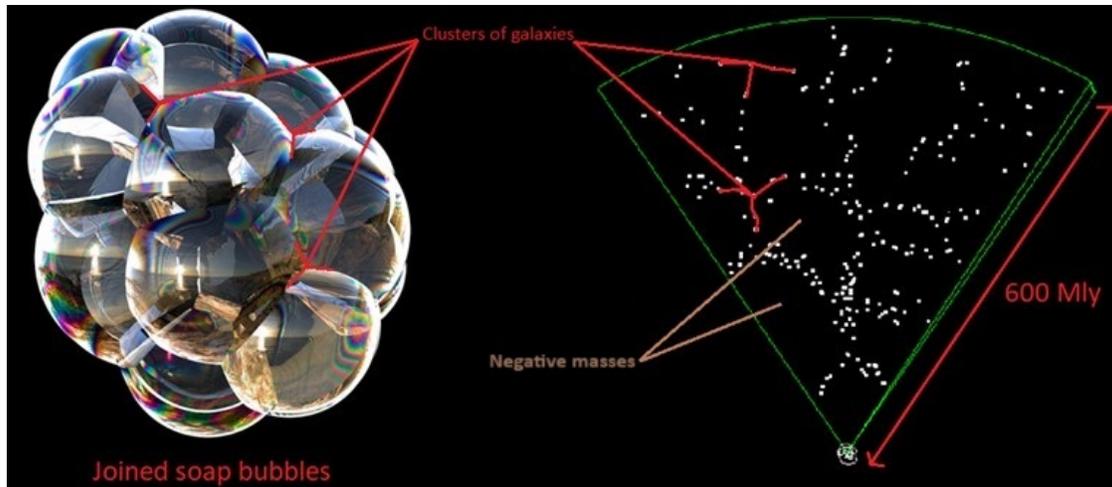


Figura 3.15 - Estructura lacunar esferoidal ture

Es importante considerar que en el marco de la masa negativa, carecemos de datos observacionales para comparar con las posibles predicciones numéricas, salvo los efectos geométricos inducidos por este marco de referencia (el de la masa negativa) a través de fenómenos de lente gravitatoria, tal y como los estructura la métrica $g_{\mu\nu}$.

En consecuencia, la presión derivada de la ecuación diferencial TOV (Tolman - Oppenheimer - Volkoff) ((Adler, Bazin, y Schiffer 1975)) en el espacio-tiempo estructurado por la métrica $h_{\mu\nu}$ seguirá siendo siempre hipotética. En consecuencia, no es práctico tratar de estructurar el tensor de interacción $T_{\mu\nu}^{(g,h)}$ de la segunda ecuación de campo (34b). De hecho, nunca podremos comparar los resultados obtenidos calculando las geodésicas de $h_{\mu\nu}$ con los datos observacionales relacionados con el movimiento de las partículas de masa negativa. En su lugar, tenemos que trabajar con una función $\beta(r)$ (no ligada a la presión negativa) sólo para garantizar la existencia de una solución en este sistema de referencia. El aspecto más importante es asegurar que la derivada covariante de su tensor de interacción es cero (37).

Para entender completamente este efecto de la geometría inducida, necesitamos situarnos en el contexto del sistema con dos ecuaciones de campo acopladas del modelo. Es importante recordar que esto estructura una hipersuperficie 4D según 2 métricas asociadas a 2 capas distintas del espacio-tiempo. Cada tipo de masa está asociada a su propia métrica, lo que implica que una masa siempre crea una curvatura positiva en el espacio-tiempo según su propia métrica (donde la masa emite fotones de energía visible) y siempre una curvatura negativa en la métrica conjugada (donde la masa emite fotones de energía invisible), como puede verse en la siguiente figura 3.16.

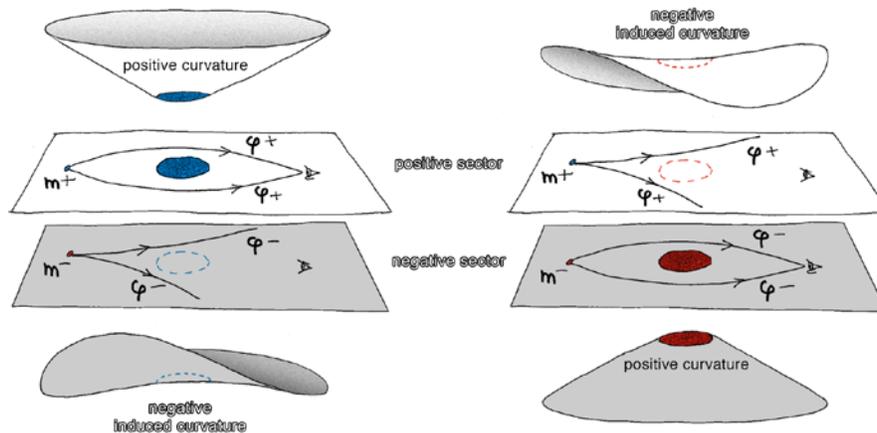


Figura 3. 16 - Efecto de geometría inducida

A la izquierda de la Figura 3.16, el objeto masivo azul perteneciente al universo positivo crea una curvatura positiva. Como resultado, produce un efecto de lente gravitatoria positiva sobre la imagen de una pequeña masa positiva m^+ provocando fotones de energía positiva ϕ^+ alrededor del objeto azul masivo. Sin embargo, este objeto masivo induce una curvatura negativa en el universo negativo. En consecuencia, aunque sea invisible, su masa aparente en el universo negativo se percibe como negativa.

Por el contrario, a la derecha de la Figura 3.16, el objeto masivo rojo pertenece al universo negativo. Crea una curvatura positiva con respecto a su propio sistema de referencia (y no una curvatura negativa). Este objeto masivo induce una curvatura negativa que se percibe en nuestro universo, aunque sus fotones de energía sean invisibles. Por tanto, concluimos que su masa aparente es negativa. Esto se debe a que produce un efecto de lente gravitatoria negativa sobre la imagen de una masa pequeña m^+ provocando fotones de energía positiva ϕ^+ alrededor del objeto masivo negativo invisible, cuyo efecto gravitatorio está siempre presente.

Podemos deducir varios corolarios del concepto de masa negativa:

- Básicamente, no hay masa negativa (y, por tanto, tampoco energía negativa). Al menos, la "negatividad de la masa" (y la "negatividad de la energía", porque ambas están obviamente relacionadas) no es una propiedad física intrínseca de una "partícula de masa negativa". De hecho, la "negatividad" o "positividad" de la masa es simplemente una cantidad de curvatura medida localmente en el espacio-tiempo por un observador. El signo de esta curvatura es relativo al marco de referencia de la hipersuperficie o métrica en la que se mide esta masa. De hecho, se trata de una masa aparente cuya presencia sólo se revela por la curvatura que induce en el espacio-tiempo.

En otras palabras, todas las partículas con masa en el universo tienen exclusivamente masa inercial positiva, pero su masa gravitatoria es relativa. El signo de su masa gravitatoria es opuesto (positivo o negativo) según la perspectiva adoptada: una masa distorsiona el espacio-tiempo en su propia métrica, induciendo

una cierta curvatura que siempre es positiva. Sin embargo, se percibirá como masa aparente en el universo opuesto, desde el cual un observador percibirá esta curvatura como negativa. Esto se debe a la naturaleza acoplada de las ecuaciones de campo y da lugar a un efecto denominado *curvaturas conjugadas*. Podría describirse como "*la misma masa induce dos curvaturas opuestas*".

Por ejemplo, la Tierra, vista desde nuestro marco de referencia, tiene masa positiva. Por algún proceso desconocido, imagina que pudieras invertir tu energía (invertir tu masa). La Tierra (y todas las estrellas del cielo) desaparecerían porque ya no podrías percibir fotones de energía positiva. Sin embargo, aún podrías percibir y medir la curvatura que sigue induciendo en el espacio-tiempo. Al tomar esta medida, detectarías que la Tierra, ahora invisible, tiene masa negativa.

Sin embargo, no existen universos distintos de energías positivas y universos de energías negativas. Se trata simplemente de una elección arbitraria de nomenclatura. Los dos son equivalentes. Por convención, llamamos universo positivo al sector en el que vivimos. La inversión de la flecha del tiempo no significa que empecemos a vivir "*al revés*" y que rejuvenezcamos. Se manifiesta físicamente por la inversión de las energías de las partículas. Una vez más, esta inversión es una observación relativa. En la práctica, se traduce en un desplazamiento hacia el universo opuesto.

- Es importante señalar que las partículas de energía negativa (y sus fotones) no pueden ser detectadas por los instrumentos ópticos porque siguen geodésicas de su propia métrica $h_{\mu\nu}$ distintas de las geodésicas de nuestra métrica $g_{\mu\nu}$. Por tanto, hay dos conjuntos de geodésicas que nunca se "*cruzan*". Dado que las especies de energía positiva y de energía negativa no pueden verse entre sí y evolucionan siguiendo dos familias distintas de geodésicas, los dos marcos de referencia espacio-temporales en los que residen se denominan marco de referencia de masa positiva y marco de referencia de masa negativa, respectivamente. Se trata, por tanto, de dos marcos de referencia dentro de la misma hipersuperficie 4D, estructurados por dos ecuaciones de campo acopladas, en lugar de una sola. Sin embargo, aunque las masas negativas son invisibles para nosotros porque no interactúan electromagnéticamente con nuestro universo y no intercambian fotones, sólo revelan su presencia a través de un efecto antigravitatorio, porque inducen curvaturas opuestas en el espacio-tiempo.
- Las masas negativas están muy extendidas en el universo, pero sus proporciones varían según la región del espacio en la que nos encontremos, y existen únicamente para contribuir a su estabilidad mediante un efecto antigravitatorio. El universo está definido por un único espacio-tiempo estructurado por dos métricas que nos permiten medir la longitud o la distancia entre dos puntos de este espacio-tiempo de dos maneras diferentes, utilizando dos conjuntos distintos de puntos de referencia (tres puntos de referencia espaciales y un punto de referencia temporal). A efectos didácticos, podemos considerar este espacio-tiempo como una hoja de papel con dos cuadrículas diferentes en cada una de las dos páginas.

3.3.5 Perspectivas de futuro

El enfoque científico de la comprensión de un fenómeno se resume en la capacidad de reproducirlo y medirlo. Es importante señalar que es totalmente posible demostrar el fenómeno de inversión de masa en el laboratorio invirtiendo una cantidad infinitesimal de materia, siempre que sea posible inducir una perturbación significativa en esta materia produciendo parámetros electromagnéticos del orden de varias decenas de millones de teslas durante un período muy corto, utilizando explosivos por ejemplo. La Unión Soviética ya había logrado una producción de 100 millones de amperios comprimiendo un flujo magnético mediante explosivos en los años 50, utilizando un generador magnetocumulativo ((Pavlovskii 1994)). Entonces sería posible demostrar esta inversión de masa midiendo las ondas gravitacionales emitidas y detectadas por los interferómetros láser Virgo y Ligo.

Una unificación de la Teoría de la Relatividad con la Mecánica Cuántica sólo sería posible mediante la cuantización de la gravedad. Sin embargo, no existe ningún concepto de cuantización de la energía en la Teoría de la Relatividad, con la excepción de la equivalencia masa-energía, porque la ecuación de campo de Einstein no describe fundamentalmente las partículas. Por ello, la Teoría de Cuerdas es el único enfoque contemporáneo aceptado y aceptable para tender un puente entre la Relatividad y la Mecánica Cuántica. Sin embargo, esta unificación es imposible siguiendo este enfoque porque la Mecánica Cuántica considera las fuerzas en términos de campos, y se necesita una partícula en estos campos para transmitir la interacción. Por ejemplo, el fotón es la partícula elemental que transmite el campo electromagnético, y su cuantificación es posible gracias a la inclusión de cargas eléctricas positivas y negativas. En cambio, la única partícula que se desprende de la teoría de cuerdas para transmitir la gravedad es el gravitón, pero esta pseudopartícula nunca se ha observado experimentalmente. De hecho, el concepto de gravedad cuántica sigue siendo especulativo en este modelo. Una conjetura alternativa para cuantificar la gravedad a escala cuántica sería considerar la existencia de masas de signos opuestos que presenten propiedades repulsivas en el modelo computacional, similar al modelo de fotones con cargas eléctricas de signos opuestos para transmitir la interacción.

4 Contribución a la Cosmología y la Física de Partículas

4.1 Introducción a los grupos dinámicos

La Teoría de Sistemas Dinámicos es una rama de las matemáticas que se centra en el estudio del movimiento y el cambio a lo largo del tiempo. Su objetivo es comprender cómo evolucionan los sistemas en función de sus condiciones iniciales y de las fuerzas externas que actúan sobre ellos. La Geometría Simpléctica es una integración de la teoría de sistemas dinámicos y la geometría diferencial, que estudia las formas y propiedades de los espacios curvos, en particular cómo estos espacios se deforman y doblan bajo la influencia de fuerzas externas. Este campo, enraizado en la mecánica hamiltoniana, examina objetos matemáticos conocidos como "variedades simplécticas", que poseen una estructura única que permite medir tamaños. A diferencia de la geometría de Riemann, que utiliza un tensor métrico para medir longitudes y ángulos, la geometría simpléctica utiliza una forma matemática llamada

"forma simpléctica" para medir áreas.

Jean-Marc Souriau fue uno de los principales pioneros de la geometría topológica simpléctica. Desarrolló el concepto de cuantificación geométrica, transformando magnitudes físicas fundamentales como la energía y el momento en objetos puramente geométricos. Los

trabajos de Souriau dieron sentido físico a la inversión de la flecha del tiempo en nuestro modelo cosmológico ((Bergmann y Einstein 1938), (Kaluza 1921)).

¿Qué es un grupo?

En términos matemáticos, se refiere a ciertas matrices que actúan sobre otras matrices. Pero físicamente, ¿qué representa?

Según J-M Souriau, un grupo se crea para transportarse, y el método de transporte es más significativo que la entidad transportada: "*Dime cómo te mueves y te diré quién eres*".

Nos centramos principalmente en los grupos de Lie (véase (Bourbaki 2006)), que son a la vez grupos y variedades diferenciales ("*espacios curvos*" proyectados localmente sobre un espacio euclidiano de n dimensiones). Son esenciales para describir movimientos y transformaciones en el espacio. Dos grupos clave son el grupo ortogonal $O(3)$ y el grupo euclídeo $E(3)$:

- **El grupo ortogonal $O(3)$** se utiliza para describir rotaciones y simetrías en tres dimensiones, preservando las distancias en el espacio. Incluye un subgrupo crucial llamado $SO(3)$, el grupo de rotación, que se encarga de las rotaciones alrededor de un eje.
- **El grupo euclidiano $E(3)$** describe movimientos tridimensionales como rotaciones, simetrías y traslaciones. Basado en el grupo ortogonal $O(3)$, puede descomponerse en una fuerza y un par aplicados a un objeto en mecánica de sólidos. Se trata de un grupo en el que se puede utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos. Este grupo transforma un punto de coordenadas x, y, z en un nuevo punto de coordenadas x', y', z' . La característica única de este grupo dinámico es su capacidad para generar una familia de objetos geométricos invariantes dentro del grupo. Por ejemplo, una recta sometida a traslación sigue siendo una recta, lo que la convierte en un objeto geométrico invariante unidimensional. Una esfera es un ejemplo perfecto de objeto simétrico tridimensional. Su propiedad única es que permanece invariable ante rotaciones en torno a su centro, lo que demuestra su simetría rotacional. En términos geométricos, esto significa que una esfera pasa a través de sí misma durante cualquier movimiento de rotación, manteniendo sus propiedades geométricas de forma constante en cada punto. En física, especialmente en el estudio del espacio-tiempo en la relatividad general, la solución de Schwarzschild es un concepto importante. Describe el campo gravitatorio fuera de una masa esféricamente simétrica y no giratoria, como un agujero negro. La métrica de Schwarzschild, una solución de las ecuaciones de campo de Einstein, es invariante

bajo rotaciones y traslaciones en el tiempo y el espacio, asemejándose a la invariancia observada en la geometría euclidiana pero aplicada al espaciotiempo curvo de la relatividad general. En el espaciotiempo de Schwarzschild, las geodésicas vienen determinadas por la curvatura del espaciotiempo, descrita por la métrica de Schwarzschild. Para un objeto que se desplaza a lo largo de una geodésica, se conservan ciertas cantidades, como su momento angular y su energía respecto a la masa causante de la curvatura del espaciotiempo. Esta conservación es el resultado de las simetrías del espacio-tiempo, análogas a las leyes de conservación de la mecánica clásica.

Por tanto, los grupos de Lie describen movimientos en el espacio conservando distancias y longitudes. Son grupos de isometría cuando las propiedades geométricas de los objetos en movimiento permanecen inalteradas (distancias y ángulos) en el espacio durante una transformación. Las rotaciones son ejemplos de simetrías en el espacio tridimensional, ya que no alteran las propiedades geométricas del espacio. Por ejemplo, la rotación de un cubo no altera las distancias entre sus vértices. En otras palabras, las propiedades geométricas del objeto permanecen inalteradas, aunque se haya modificado su posición.

Según la teoría de la relatividad especial, en lugar de vivir en un espacio euclidiano tridimensional $[x, y, z]$ con una signatura $(+ + +)$ donde el tiempo es una entidad separada, en realidad existimos en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones donde las tres dimensiones espaciales son perpendiculares a una dimensión temporal $[t, x, y, z]$ llamada espacio de Minkowski, cuya signatura es $(- + + +)$.

El grupo dinámico asociado a este espacio es el grupo de Poincaré. Permite generar movimientos particulares, como el movimiento de partículas sin masa como los fotones (que nunca están en reposo sino que siempre se mueven a la velocidad de la luz, no afectados por la gravedad en términos de velocidad, sólo modificables en energía) y una familia de partículas de masa distinta de cero. Este grupo dinámico, aplicado a la relatividad especial, incluye el movimiento de masas o fotones con una posible inversión de la flecha del tiempo, es decir, del pasado al futuro y viceversa, y puede representarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde L es la matriz del grupo de Lorentz que describe cómo cambian las coordenadas espacio-temporales entre distintos sistemas de referencia inerciales. Estas transformaciones incluyen rotaciones en el espacio, así como transformaciones de Lorentz (aumentos), que son cambios de los sistemas de referencia que se mueven a una velocidad constante entre sí. C es un vector correspondiente a las traslaciones espacio-temporales en $\mathbb{R}^{1,3}$.

De hecho, la mitad de los elementos del grupo dinámico invierten el tiempo, lo que significa que si consideramos un elemento espacio-temporal como una masa o un fotón y aplicamos un movimiento temporal del pasado al futuro, podemos realizar el mismo movimiento en sentido contrario utilizando el grupo de Poincaré. Por tanto, según la teoría de Souriau de su obra "*Estructura de los sistemas dinámicos*" ((Kaluza 1921)), si el grupo dinámico puede hacer que los fotones o las masas se muevan con una

flecha del tiempo en sentido contrario, entonces su energía, y por tanto su masa, también pueden invertirse.

N.B.: El grupo restringido de Poincaré se ocupa exclusivamente del movimiento relativista "ortócrono" en cuatro dimensiones del espacio de Minkowski, pasando del pasado al futuro. Su forma matricial incluye la submatriz de Lorentz L_0 como sigue:

$$\begin{pmatrix} L_0 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Podemos considerar ahora estos movimientos con energía y masa negativas y una flecha del tiempo opuesta como parte de la Física? ¿Pueden medirse u observarse?

Las partículas con energía negativa emiten fotones de energía negativa, por lo que no pueden observarse ni medirse ópticamente. Sin embargo, se ha observado y medido que la expansión del universo se está acelerando debido a la presión negativa ligada a la energía oscura ((Perlmutter et al. 1999)). La presión es una densidad de energía por unidad de volumen.

Así pues, la expansión del universo está directamente vinculada a la energía negativa. Esto sugiere que una parte sustancial del universo, actualmente definida como materia oscura con energía oscura, afecta a esta expansión a través del efecto gravitatorio. Así pues, este enfoque dinámico y geométrico ofrece una respuesta a su origen y naturaleza. Podría contener masas o fotones cargados de energía negativa.

4.2 Diversas simetrías asociadas a cada operador de inversión

El grupo de Poincaré restringido trata el movimiento relativista en cuatro dimensiones del espacio de Minkowski. El grupo de Poincaré es el grupo según la siguiente matriz :

$$\begin{pmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde C es el vector correspondiente a las traslaciones espacio-temporales en $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$C = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Actúa sobre puntos del espacio de Minkowski:

$$\xi = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Este grupo de 10 dimensiones es el grupo de isometría de este espacio, definido por su métrica :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

El grupo de Lorentz según su submatriz L perteneciente al espacio \mathcal{L} tiene cuatro componentes conectadas:

- \mathcal{L}_n el componente neutro, no invierte ni el espacio ni el tiempo.
- \mathcal{L}_s invierte el espacio.
- \mathcal{L}_t invierte el tiempo pero no el espacio.
- \mathcal{L}_{st} invierte tanto el espacio como el tiempo.

Los dos primeros componentes se agrupan para formar el subgrupo conocido como grupo "ortócrono" o restringido de Lorentz:

$$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_n \cup \mathcal{L}_s$$

Los dos últimos componentes forman el conjunto "anticrono", cuyos componentes invierten el tiempo:

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_t \cup \mathcal{L}_{st}$$

Tenga en cuenta que :

$$\mathcal{L}_t = -\mathcal{L}_s \quad \mathcal{L}_{st} = -\mathcal{L}_n$$

$$\mathcal{L}_{st} = -\mathcal{L}_n \quad \mathcal{L}_t = -\mathcal{L}_s$$

4.3 Grupo de dinámica de Lorentz

La aplicación de la acción coadjunta de un grupo dinámico al dual de su álgebra de Lie, iniciada por el matemático Jean-Marie Souriau, ha arrojado luz sobre ciertos aspectos del enfoque seguido en física. El grupo dinámico restringido de Lorentz, limitado a sus dos componentes ortocronas, traduce aspectos de la relatividad especial a través de sus propiedades de invariancia resultantes. En 1970, J-M Souriau estableció que el análisis de las componentes de su momento pone de manifiesto la naturaleza geométrica de un espín (no cuantificado) ((J. M. Souriau 1964) (J. M. Souriau 1997)). El grupo de Lorentz tiene dos componentes ortocronas conectadas, a saber, su primera componente neutra, que contiene el elemento neutro del grupo, y su segunda componente enantiomorfa, que invierte el espacio sinónimo de la *simetría P*. En la teoría de los grupos dinámicos, resulta evidente una clasificación en términos de movimientos. En esta etapa, la acción de estos elementos que invierten el espacio se ilustra en el fenómeno de la polarización de la luz, donde cualquier fotón "*derecho*" puede convertirse en un fotón "*izquierdo*". Este grupo puede representarse mediante una familia de matrices 4×4 L definidas axiomáticamente como $L^T G L = G$ donde L^T es la transposición de la matriz de Lorentz L y G es la matriz métrica de Minkowski, a menudo llamada matriz de Gram en este contexto. En relatividad especial, se representa generalmente por una matriz diagonal con elementos $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Esta ecuación significa que la transformación de Lorentz preserva el

producto escalar de Minkowski, una condición crucial para la coherencia de la teoría de la relatividad especial.

4.4 Grupo dinámico de Poincaré restringido

El producto del grupo de Lorentz con el grupo de traslaciones espacio-temporales nos permite construir el grupo dinámico restringido de Poincaré, siempre limitado a sus dos componentes ortocrónicas. En su momento, encontramos primero la energía vinculada al subgrupo de las traslaciones temporales. Luego el impulso, ligado a las traslaciones espaciales, estando ambos ligados por la invariancia del módulo del cuadvectores energía-impulso bajo la acción del grupo de Lorentz. La matriz asociada a este grupo debe incluir la submatriz "ortócrona" de Lorentz L_o de dimensión 3×3 así como el vector de traslación C y componentes adicionales para completar su estructura (véase (45)).

4.5 Grupos dinámicos restringidos de Kaluza y Janus

Añadiendo una traslación a lo largo de una quinta dimensión al grupo restringido de Poincaré, formamos un grupo de Lie que denominamos *grupo restringido de Kaluza* ((Bargmann, Bergmann y Einstein 1941), (Bergmann 1942), (Bergmann y Einstein 1938), (Kaluza 1921), (Klein 1926)). Este grupo no es el grupo de Kaluza de 15 dimensiones asociado a una variedad lorentziana de 5 dimensiones, sino un nuevo grupo de 5 dimensiones que sólo cuenta las traslaciones. Esta nueva dimensión confiere al impulso un escalar adicional que puede identificarse con la carga eléctrica q que puede ser positiva, negativa o nula, y que aún no se ha cuantificado. A continuación demostramos la traslación geométrica según un escalar ϕ dando a las masas una carga eléctrica invariante. A continuación, introduciendo una nueva simetría que refleja la inversión de la quinta dimensión, sinónimo de la inversión del escalar de q a $-q$ duplicamos el número de componentes conectadas de 2 a 4. La acción sobre el momento vincula entonces esta nueva simetría a la inversión de la carga eléctrica q . Derivamos así el modelo geométrico de conjugación de cargas o *Simetría C*, que traduce la simetría materia-antimateria introducida por Dirac. Por tanto, es lógico llamar a esta nueva extensión *Grupo de Janus Restringido*.

4.6 Grupo dinámico Janus

Al introducir una nueva simetría en el grupo anterior, que describimos como *Simetría T* y que convierte la materia en antimateria con masa negativa -un concepto que podríamos llamar *antimateria en el sentido de Feynman*-, construimos el *Grupo Dinámico de Janus*. De este modo, duplicamos el número de componentes conectados de cuatro a ocho, agrupados en dos subconjuntos: "ortocrónico", que conserva las propiedades de tiempo y energía, y "anticrónico", que invierte el tiempo y la energía. En consecuencia, destacamos la traslación geométrica que consiste en dotar a las masas de una carga eléctrica invariante. Como demostró Jean-Marie Souriau, pionero de la teoría de los grupos dinámicos, ya en 1970 ((J. M. Souriau 1964), (J. M. Souriau 1997)), este enfoque ha permitido conferir una naturaleza puramente geométrica a elementos clave que han marcado el progreso de la física relativista.

He aquí la matriz asociada al grupo dinámico de Janus, a partir de la cual es posible reconstruir todos los grupos de simetría:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^\mu & 0 & \phi \\ 0 & T^\lambda S^\nu L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \{0,1\}, \phi \in \mathbb{R}, L \in \mathcal{L}, C \in \mathbb{R}^{1,3} \right\}$$

- **Simetría P:**

Debemos aplicar $\mu = 0, \lambda = 0$ y $\nu = 1$ entonces obtenemos :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Este operador de simetría corresponde a la inversión del espacio, donde se considera un elemento de la segunda componente conexas del grupo ortocrónico. Es esta simetría la que invierte la helicidad de un fotón, transformando un "fotón derecho" en un "fotón izquierdo", lo que corresponde al fenómeno de la polarización de la luz.

- **Simetría C:**

Debemos aplicar $\mu = 1, \lambda = 0$ y $\nu = 0$.

Partiendo del elemento L_n elemento del grupo Lorentz restringido ortocrónico, invirtiendo la quinta dimensión portadora de la carga eléctrica q obtenemos el operador "simetría C" o "conjugación de carga" (cuántica) :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es esta simetría la que representa la transformación "Materia-Antimateria".

- **Simetría T:**

Debemos aplicar $\mu = 0, \lambda = 1$ y $\nu = 0$.

Esta operación elimina la simetría C ($Jan_{11} = 1$) y la simetría P ($Jan_{22} = -L_s$) de la siguiente manera:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_t & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simetría CP:**

Debemos aplicar $\mu = 1, \lambda = 0$ y $\nu = 1$.

Esta operación añade la simetría C ($Jan_{11} = -1$) y la simetría P ($Jan_{22} = L_s$) de la siguiente manera:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & SL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

NB: También se puede deducir eliminando la simetría T ($Jan_{22} = L_s$) de la simetría CPT mediante esta operación : $\mathbf{CP} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{CPT}$

- **Simetría CPT:**

Debemos aplicar $\mu = 1, \lambda = 1$ y $\nu = 1$.

Sabemos que el elemento L_n del grupo neutro no invierte ni el tiempo ni el espacio, por lo que el elemento $Jan_{22} = -L_n$ invierte tanto el espacio como el tiempo para formar el operador de simetría PT . Sin embargo, si añadimos la simetría C ($Jan_{11} = -1$), formamos el grupo de *Janus CPT con simetría de carga* como sigue:

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simetría PT:**

Debemos aplicar $\mu = 0, \lambda = 1$ y $\nu = 1$.

Eliminando la simetría C ($Jan_{11} = 1$) de la simetría CPT mediante esta operación : $\mathbf{PT} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{CPT}$ obtenemos :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & TSL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Simetría CT:**

Debemos aplicar $\mu = 1, \lambda = 1$ y $\nu = 0$.

Eliminando la simetría P ($Jan_{22} = -L_s$) de la simetría CPT siguiendo esta operación : $\mathbf{CT} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{CPT}$ obtenemos :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & TL_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \phi \\ 0 & -L_s & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- **Operador neutro:**

Debemos aplicar $\mu = 0, \lambda = 0$ y $\nu = 0$.

El objeto se desplaza por las cinco dimensiones sin cambiar de naturaleza. Sólo se considera

el elemento neutro del subgrupo "ortocrono" ($Jan_{22} = L_n$) :

$$Jan = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L_n & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es importante señalar que Feynman considera que la aplicación de la *simetría PT* al movimiento de las partículas conduce a la creación de antimateria mediante la aplicación de la *simetría C*. En consecuencia, la *simetría PT* es equivalente a la *simetría C*, lo que significa que una partícula de materia "vista en un espejo" y que se mueve hacia atrás en el tiempo es antimateria.

Esta perspectiva se desprende de la obra de Weinberg, "*Teoría cuántica de campos*", en la sección 2.6, titulada "*Inversión del espacio e inversión del tiempo*" ((Weinberg 2000)). En efecto, se aplica una elección arbitraria para el operador de inversión *T*, que hace que el operador *CPT* se convierta en la identidad.

Así, dado que **CPT = I** resulta que **PT = PT · I = PT · CPT = C**. Por tanto, el punto de vista de Feynman se basa principalmente en la mecánica cuántica, donde los teóricos cuánticos hacen elecciones a priori totalmente arbitrarias sobre los operadores *P* y *T*, constreñidos por la "*necesidad de evitar la aparición de estados de energía negativa (considerados no físicos)*". En consecuencia, el operador *P* debe ser lineal y unitario, y el operador *T* antilineal y antiunitario. Y concluir añadiendo en la página 104 que: "*No se conocen ejemplos de partículas que proporcionen representaciones no convencionales de las inversiones, por lo que estas posibilidades no se explorarán más aquí. En adelante, se supondrá que las inversiones tienen la acción convencional descrita en la sección 2.6*". Los

estados de energía negativa (asociados a la presión negativa) existen porque son responsables de la aceleración de la expansión cósmica, como demuestra el trabajo de Perlmutter

ganador del Premio Nobel en 2011 ((Perlmutter et al. 1999)). Sin embargo, en el momento de la aparición de la teoría cuántica de campos, este fenómeno aún no se conocía.

En consecuencia, para Feynman, la presencia del operador de inversión temporal *T* en su *simetría PT* global no conduce a la inversión de masa, sino que transforma la materia en antimateria de masa positiva por inversión de carga a través de la *simetría C*.

Desde la perspectiva del grupo de Janus, partiendo del movimiento de una partícula de masa positiva en un espacio de 5 dimensiones, la *simetría C* (llevada por la inversión de la quinta dimensión) transforma esta partícula (este movimiento) en una antipartícula de masa positiva que podemos llamar "*antipartícula de tipo Dirac*". Por otra parte, la *PT* aplicado a una partícula produce una antipartícula con energía y masa negativas, debido a la *simetría T*, que podemos llamar "*antipartícula de tipo Feynman*". La equivalencia *PT = C* según Feynman ya no es aplicable.

4.7 Implicaciones

Las aportaciones significativas de este estudio afectan principalmente a los campos de la mecánica cuántica y la cosmología:

- Un aspecto notable **de la mecánica cuántica** es la inversión de la energía y la masa de ciertos objetos. Esto lleva a explorar dos categorías de antimateria: un tipo de antimateria con masa positiva resultante de la simetría C , conocida como *antimateria en el sentido de Dirac*, es la que se produce en el laboratorio y recientemente se ha demostrado que se comporta de la misma manera que la materia ordinaria bajo la influencia de la gravedad ((Anderson 2023)). La otra, procedente de la *simetría PT* con masa negativa, conocida como *antimateria en el sentido de Feynman*, corresponde a la antimateria primordial situada entre las galaxias y se encuentra en particular en forma de conglomerados en el *Gran Deflector* ((Hoffman et al. 2017)). Se plantea la intrigante cuestión de la posibilidad de que existan objetos con masa y energía negativas en la física. Tales entidades sugerirían la presencia de estados de energía negativa en la mecánica cuántica. Cuando se trata de la *simetría T* , los físicos cuánticos adoptan tradicionalmente una perspectiva antilineal y antiunitaria para el operador T , con el fin de excluir los estados de energía negativa, que generalmente se consideran no intrínsecos a la física. Del mismo modo, se elige un operador P unitario y lineal por razones similares (véase (Weinberg 2000)). Estas elecciones sustentan el teorema CPT, reforzando la idea de que *la simetría PT* se alinea con la *simetría C* . Por otro lado, la adopción de un operador T lineal y unitario revela que los estados de energía negativa son un resultado natural en las ecuaciones de Schrödinger y Dirac (véase (Debergh et al. 2018)), allanando el camino para nuevas áreas de investigación. Además, las observaciones cosmológicas han confirmado que la expansión del universo se está acelerando, lo que se atribuye a la presión negativa asociada a la energía oscura, como puso de manifiesto el trabajo de Perlmutter, galardonado con el Premio Nobel en 2011. Dado que la presión representa una densidad de energía por unidad de volumen, este fenómeno está directamente relacionado con la energía negativa que influye en la expansión del universo.
- En el campo de la cosmología**, la relatividad general rechaza firmemente el concepto de masas negativas, alegando la aparición del fenómeno de fuga y conflictos con los principios de acción-reacción y equivalencia (véase (Bondi 1957)). En consecuencia, cualquier nuevo modelo que proponga la integración de estados de energía y masa negativos requeriría una ampliación del marco geométrico fundamental de la relatividad. La teoría de grupos dinámicos, centrada en varios grupos como Lorentz, Poincaré y Kaluza, proporciona un marco para describir un universo sin fuerzas caracterizado por una estructura plana y no curva. En un universo así, las partículas siguen las geodésicas del espacio de Minkowski en una métrica lorentziana o navegan en un espacio fibrado influido por una quinta dimensión, abierta o cerrada. Este enfoque teórico sugiere la coexistencia de dos tipos distintos de materia, que existen de forma aislada sin interacción mutua. Las partículas de estos espacios no interactúan entre sí. Esta perspectiva innovadora abre nuevas vías de comprensión de las interacciones entre partículas, espacio y tiempo.

5 Interpretación alternativa del modelo de agujero de gusano acoplado a una fuente blanca como *membrana unidireccional*

El estudio de la métrica exterior desarrollada por K. Schwarzschild en 1916, como solución a la ecuación de Einstein en el vacío, revela la introducción de una hipótesis: la invariancia por simetría temporal de $t \rightarrow -t$ conocida comúnmente como "*estaticidad*". Esta suposición, que no tenía entonces ninguna base física demostrada, condujo a la eliminación de un término transversal $dr dt$ en la métrica. Así, se hizo una elección arbitraria de coordenadas, marcada específicamente por la ausencia de este término cruzado $dr dt$. El objetivo de este estudio es explorar las posibilidades físicas de un nuevo enfoque basado en la introducción de un término cruzado $dr dt$ en la métrica y demostrar la posibilidad de construir un *Agujero de Gusano* y una *Fuente Blanca* como *Membrana Unidireccional*, conectando dos espacios semi-Riemannianos *PT-simétricos* a través de un "*puente*" que sólo puede cruzarse en una dirección.

5.1 Soluciones de la ecuación de Einstein que reflejan diferentes topologías

En 1916, Karl Schwarzschild publicó dos artículos sucesivos ((Schwarzschild 1916b),(Schwarzschild 1916a)). El primero presentaba la construcción de la solución de la ecuación de Einstein en el vacío, basada en los siguientes supuestos:

- *Estacionariedad*: Independencia de los términos de la métrica con respecto a la coordenada temporal, es decir, invariancia por traslación temporal.
- *Isotropía* y simetría esférica, es decir, invariancia por $SO(3)$.
- Ningún término cruzado $dr dt$.
- Lorentziano hasta el infinito.

Rápidamente complementó esta solución, denominada métrica exterior de Schwarzschild, con una métrica interior (Schwarzschild 1916a) que describe la geometría dentro de una esfera llena de un fluido de densidad constante ρ_o y una solución de la ecuación de Einstein con un segundo miembro. Se cumplían las condiciones para vincular las dos métricas (continuidad de las geodésicas). Los fenómenos del avance del perihelio de Mercurio y la desviación de los rayos luminosos confirman esta solución (figura 3.4). K. Schwarzschild trabajó para que las condiciones que regían estas dos métricas se ajustaran a la realidad física.

A modo de ejemplo, hoy en día las estrellas de neutrones, debido a su asombrosa densidad y formidable masa, sirven como laboratorios cósmicos naturales, explorando regiones de densidad y gravedad inaccesibles en los laboratorios terrestres. Consideremos dos formas distintas en las que una estrella de neutrones podría alcanzar un estado de criticidad física. En un escenario en el que la densidad de la estrella ρ_o permanece constante, puede definirse un radio característico \hat{r} característico. Entonces, la criticidad física se alcanza cuando el radio de la estrella es :

$$R_{\text{cr}\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_o}}$$

con

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_o}}$$

Y así,

- Para la métrica externa, el radio de la estrella debía ser inferior a \hat{r} .
- En cuanto a la métrica interna, el radio de la estrella debía ser inferior a $R_{\text{cr}\phi}$ porque un radio mayor conduce a un aumento de la presión hasta el infinito en el centro de la estrella.

En segundo lugar, para las estrellas masivas, una esfera de hierro en implosión puede presentar un escenario complejo. Suponiendo que la masa de la esfera M se conserva durante la implosión, tenemos que considerar dos radios críticos importantes:

- En la parte central, el radio geométrico crítico viene dado por el *radio de Schwarzschild*, que es :

$$R_{\text{cr}\gamma} = R_s = 2 \frac{GM}{c^2}$$

- Fuera de esta masa, el radio crítico físico viene dado por (38)

Con la conservación de la masa expresada como $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o$ podemos explorar cómo la variación de la densidad ρ_o durante la implosión afecta a estos radios críticos.

En efecto, si se alcanza la criticidad física durante la implosión, tenemos $R = R_{\text{cr}\phi}$.

Entonces, sustituyendo la ecuación de conservación de la masa en (38), obtenemos :

$$R = R_{\text{cr}\phi} = 2,25 \frac{GM}{c^2} > R_{\text{cr}\gamma}$$

Podemos deducir de ello que si se alcanza la criticidad física para una masa M se produce antes de que aparezca la criticidad geométrica.

K. Schwarzschild también señaló que las mediciones se referían a condiciones mucho más allá de lo que se entendía en el marco de la realidad astrofísica de su época.

También es importante señalar que la topología de esta solución geométrica se construye conectando dos variedades limitadas a lo largo de su frontera común, una esfera S^2 con un área de $4\pi R_o^2$ (*radio de la estrella*).

En 1916, Ludwig Flamm consideró que la solución externa podía describir un objeto geométrico. La preocupación entonces era intentar describir las masas como una región del espacio no contráctil ((Flamm 1916)).

En 1934, Richard Tolman fue el primero en considerar una posible manipulación de la solución métrica más general introduciendo un término cruzado $dr dt$. Sin embargo, en aras de la simplificación, lo eliminó inmediatamente mediante un simple cambio de variable ((Tolman 1934)).

En 1935, Einstein y Rosen propusieron una estructura geométrica no contráctil en el contexto de un modelo geométrico de partículas, gracias al siguiente cambio de coordenadas ((Einstein y Rosen 1935)):

$$u^2 = r - 2m$$

La solución métrica es entonces :

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4u^2(u^2 + 2m)du^2 - (u^2 + 2m)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Los autores obtienen así una estructura geométrica no contráctil, denominada "*punte espacial*", en la que una superficie cerrada de área $4\pi\alpha^2$ correspondiente al valor $u = 0$ conecta dos "*hojas*": una correspondiente a los valores de u de 0 a $+\infty$ y la otra de $-\infty$ a 0. Obsérvese que esta métrica no es lorentziana en el infinito. Aunque esta métrica, expresada en este nuevo sistema de coordenadas, es regular, los autores señalan que en la superficie del desfiladero su determinante se hace cero. En esta estructura geométrica se distinguen dos láminas semi-Riemannianas acotadas, la primera correspondiente a $u > 0$ y la segunda a $u < 0$. Corresponde a su unión a lo largo de su frontera común. El espaciotiempo global no encaja en el marco estándar de la geometría semi-Riemanniana porque no satisface la condición $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ en la garganta. Como se indica en (Stoica 2014), encaja en el marco más general de la geometría semirriemanniana singular, que permite tensores métricos degenerados.

En 1939, Oppenheimer y Snyder, aprovechando el desacoplamiento completo entre el tiempo propio y el tiempo experimentado por un observador distante, en ausencia de un término cruzado en $dr dt$, sugirieron utilizar la solución métrica externa para describir el "*fotograma congelado*" de la implosión de una estrella masiva al final de su vida. Considerando que la variable t se identifica con el tiempo propio de un observador distante, esto crea un motivo de "*marco congelado*" como un fenómeno de contracción cuya duración, en tiempo propio, medida en días, a un observador distante le parece que tiene lugar en un tiempo infinito ((Oppenheimer y Snyder 1939)). Este documento se considera la base del modelo de los agujeros negros (véase el apartado [2.3.8](#)).

En 1960, Kruskal amplió la solución geométrica para abarcar un espaciotiempo contráctil, organizado en torno a una singularidad central correspondiente a $r = 0$. Las geodésicas se amplían a $r < \alpha$. El modelo del agujero negro (con simetría esférica⁴) toma entonces su forma definitiva como la implosión de una masa, en un breve instante, percibido como un "fotograma congelado" por un observador distante ((M. D. Kruskal 1960)). La esfera de Schwarzschild se denomina entonces "horizonte de sucesos".

En 1988, M. Morris y K. S. Thorne revisaron esta interpretación geométrica abandonando la contractibilidad, no en un intento de obtener un modelo geométrico de la solución, sino para estudiar la posibilidad de viajes interestelares, a través de "agujeros de gusano", utilizando la siguiente métrica ((Morris y Thorne 1988)):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Al centrarse en el estudio de la viabilidad de los viajes interestelares, los autores ponen de relieve las enormes limitaciones asociadas a dicha geometría, así como su naturaleza inestable y transitoria.

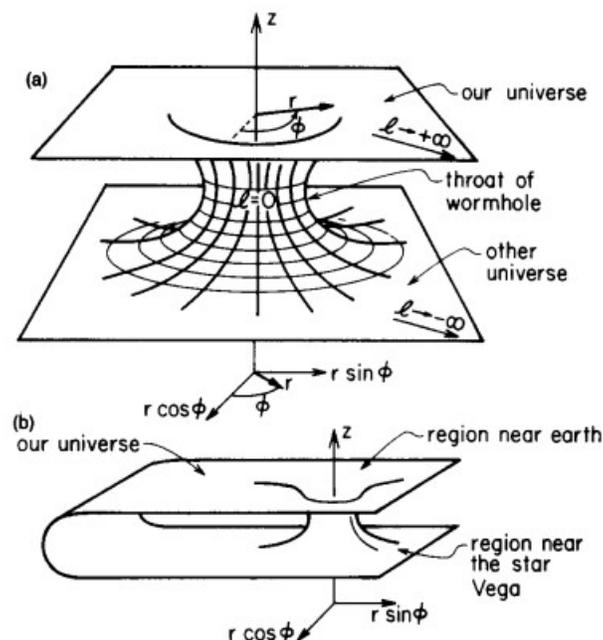


Figura 5.1 - Página 396 del artículo de M. Morris y K.S. Thorne (1988)

⁴ En 1963, Roy Kerr construyó la solución estacionaria axisimétrica de la ecuación de Einstein en el vacío. Sin embargo, en este estudio nos limitamos a las interpretaciones de la solución estacionaria con simetría esférica (2.3.9).

5.2 La hipótesis de la *estaticidad*: ausencia del término cruzado $dr dt$

El concepto de "*estaticidad*" en relatividad general se refiere a una métrica que es estacionaria, es decir, invariante bajo la traslación temporal de $t \rightarrow t + t$ "*independiente del tiempo*" y *estática*, es decir, invariante bajo la simetría de "*reflexión temporal*" de $t \rightarrow -t$, lo que conduce naturalmente a la ausencia del término cruzado $dr dt$. De hecho, cuando una métrica tiene un término cruzado $dr dt$, significa que existe una dependencia mixta entre las coordenadas espaciales y temporales. Esta dependencia mixta rompe la invariancia por simetría de *reflexión temporal*, porque la métrica no permanece igual bajo la transformación $t \rightarrow -t$. R. Wald menciona esta peculiaridad en 1984 en su libro "*General Relativity*" en la página 120 (Wald 1984).

También podemos observar que en la página 186 de (Adler, Bazin y Schiffer 1975), el requisito de simetría de *reflexión temporal* para una línea dx^0 que pueda trazarse "*hacia atrás*" hasta $-dx^0$ (llamada "*estaticidad*") se establece como suposición inicial.

De hecho, la noción de *estaticidad* en el sentido de R. Wald se refiere a la invariancia por la simetría de *reflexión temporal* de $t \rightarrow -t$ que es una hipótesis puramente matemática sin significado físico. Sin embargo, nuestro estudio ofrece un enfoque diferente de esta hipótesis.

5.3 Construcción de una solución geométrica infinita lorentziana de dos hojas

Consideremos la métrica exterior de Schwarzschild en su forma clásica bajo la firma (+ - - -):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

5.3.1 Simetría T

Esta métrica construida en 1916 ((Schwarzschild 1916b)), como solución a la ecuación de Einstein en el vacío, estaba dotada de una suposición adicional, que su autor no mencionó, la de invariancia por simetría temporal. Es importante señalar que esta suposición carece de base física y conduce a la eliminación de un término cruzado $dr dt$ en la métrica, tal como Tolman había previsto ya en 1934 (Página 239 de (Tolman 1934)).

A la inversa, A. Eddington la introdujo para eliminar la singularidad de coordenadas en la superficie de Schwarzschild en $r = \alpha$ mediante el cambio de variable ((Eddington 1925),(Koiran 2021)):

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

La métrica se convierte entonces en :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Sabemos que con estas condiciones, desde el punto de vista de un observador lejano, el tiempo de caída libre se hace finito (39), mientras que el tiempo de escape permanece

infinito. La métrica para la cual el tiempo de escape es finito se obtendrá haciendo este cambio de variable :

$$t_E^- = -t - \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} - 1 \right|$$

La métrica se convierte así en :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Esto equivale a invertir la coordenada temporal en (40). Así, esta elección de asociar dos métricas que describen dos espacios semi-Riemannianos nos lleva a considerar una solución geométrica global con dos láminas *simétricas* T conectadas por un "puente" en este sistema de coordenadas particular así como en el sistema de coordenadas de Einstein y Rosen ((Einstein y Rosen 1935)).

Ahora demostremos que estas transformaciones también van acompañadas de una *simetría* P .

5.3.2 Simetría P

En esta representación, las geodésicas radiales de la primera hoja son ortogonales al plano tangente del "puente espacial" cuando llegan a él. Estas mismas geodésicas, al emerger en la segunda hoja, son también ortogonales a este mismo plano tangente. Consideremos ahora cuatro puntos que forman un tetraedro y que convergen hacia el "puente espacial" siguiendo trayectorias radiales. Podemos definir una orientación 3D definiendo una dirección de cruce para los puntos de cada uno de los triángulos equiláteros que forman el tetraedro. Con respecto al r parece que estos puntos rebotan en una superficie rígida, provocando la inversión de la orientación del tetraedro. Los tetraedros ascendente y descendente se convierten entonces en *enantiomorfos* (Figura 5.2).

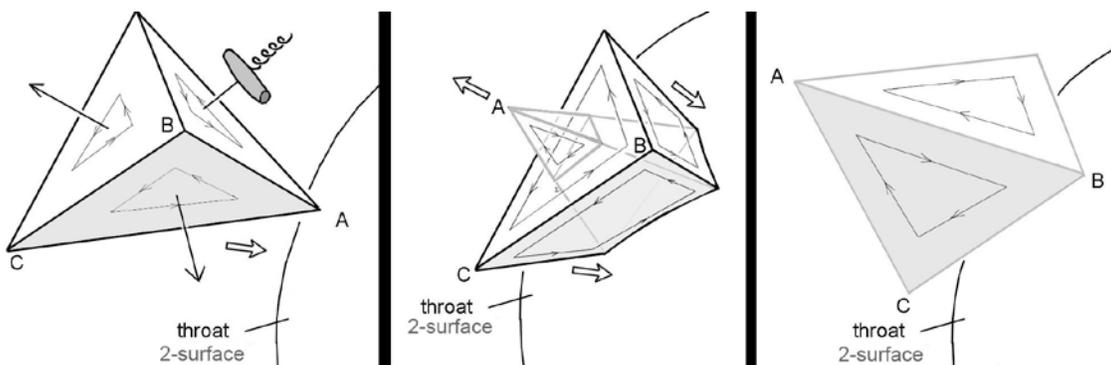


Figura 5.2 - Inversión del espacio al cruzar el "puente espacial"

El cambio de orientación ya es visible en la representación 2D simplificada de un agujero de gusano de la figura 5.1. Observemos esta figura desde arriba e imaginemos un triángulo deslizándose por la superficie de la lámina superior hacia la ranura. Tras cruzar la ranura, el

triángulo comienza a deslizarse por la lámina inferior y ahora lo vemos boca abajo desde nuestra posición sobre la lámina superior. Desde nuestro punto de vista, su orientación ha cambiado. El significado físico de este cambio de orientación se tratará en el apartado 5.3.3. La estructura geométrica del par de métricas (41) y (42) representa, pues, un "puente" que conecta dos espacios semi-Riemannianos *PT-simétricos*.

El elemento de esta superficie 2D viene dado entonces por :

$$\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} = \alpha^2 \sin(\theta)$$

Como esta métrica describe una superficie esférica 2D (como una esfera de radio constante en un espacio-tiempo 4D), el elemento diferencial de superficie viene dado por :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Para hallar la superficie mínima de este "puente espacial", tenemos que integrar este elemento de superficie en todos los ángulos posibles:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

Por tanto, no es contráctil y tiene una superficie mínima de $4\pi\alpha^2$.

5.3.3 Identificación de las dos hojas

En el apartado 5.3.2 hemos descrito el cambio de orientación de un tetraedro que atraviesa la ranura del agujero de gusano en la figura 5.2, y de un triángulo que atraviesa la ranura en la figura 5.1. El cambio de orientación del triángulo sólo es visible para una persona que observe la figura 5.1 en su conjunto. Por consiguiente, no corresponde a ningún fenómeno físicamente observable, ya que cualquier observador físico debe estar situado en una de las dos hojas y no puede ver directamente la otra hoja. La situación es la misma en la figura 5.2: la foto del centro representa la situación desde un punto de vista en el que pudiéramos mirar simultáneamente a ambos lados del agujero de gusano (B y C aún no han llegado al desfiladero, mientras que A ya lo ha cruzado y está saliendo por el otro lado). De nuevo, esto es imposible para un observador físico: parece que la *simetría P*, tal como se ha descrito hasta ahora, no corresponde a ningún fenómeno físicamente observable. Sin embargo, podemos darle un significado físico real con un ingrediente adicional introducido por Einstein y Rosen (Einstein y Rosen 1935).

Hay que recordar que su motivación no era estudiar los viajes interestelares, como en la figura 5.1, sino describir las partículas elementales utilizando soluciones a las ecuaciones de la relatividad general. Citando el resumen de su artículo: "*Estas soluciones implican la representación matemática del espacio físico por un espacio de dos láminas idénticas, representándose una partícula por un 'puente' que conecta estas láminas*". Einstein y Rosen también sugieren que el problema de las partículas múltiples podría estudiarse con métodos similares, pero este trabajo no se lleva a cabo en su artículo.

Citemos de nuevo (Einstein y Rosen 1935): "Si están presentes varias partículas, este caso corresponde a la búsqueda de una solución sin singularidades de las ecuaciones modificadas (3a), la solución que representa un espacio con dos láminas congruentes conectadas por varios "puentes" discretos". Desde su punto de vista, dos puntos de la representación matemática (41) con valores idénticos de θ, ϕ pero valores opuestos de u corresponden, por tanto, a dos puntos del espacio físico con el mismo valor de r ($r = u^2 + m$). Si hacemos la misma identificación de puntos con valores opuestos de u un observador físico puede ver la situación representada en la foto del medio de la figura 5.2. La simetría P descrita en el apartado 5.3.2 tiene ahora un significado físico real. Desarrollaremos la interpretación de la simetría PT combinada en la próxima sección.

5.4 Otra representación de esta geometría

Aplicando el siguiente cambio de variable a las ecuaciones (40) y (43) :

$$r = \alpha(1 + \text{Log ch}(\rho))$$

Obtenemos las dos métricas siguientes:

$$ds^2 = \left(\frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{+2} - \left(\frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ - 2c\alpha \left(\frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^+ - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$ds^2 = \left(\frac{\text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) c^2 dt_E^{-2} - \left(\frac{2 + \text{Log ch}(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) \alpha^2 \tanh^2(\rho) d\rho^2 \\ + 2c\alpha \left(\frac{\tanh(\rho)}{1 + \text{Log ch}(\rho)} \right) d\rho dt_E^- - \alpha^2 (1 + \text{Log ch}(\rho))^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Para obtener la métrica que estructura la segunda hoja para $\rho < 0$ con el fin de garantizar la continuidad de las geodésicas que trasladan el paso de la materia a través del "puente" con un tiempo de escape finito en esta hoja, debemos aplicar la simetría T donde la coordenada temporal se invierte durante el cruce, es decir $t_E^+ = -t_E^-$

Estas métricas, que son lorentzianas hasta el infinito, estructuran por tanto dos láminas correspondientes a valores de ρ que varían respectivamente de 0 a $+\infty$ y de $-\infty$ a 0. En el "puente espacial" para $\rho = 0$ las componentes g_{tt} y $g_{\rho\rho}$ del tensor métrico desaparecen, quedando sólo las dos últimas componentes espaciales $g_{\theta\theta}$ y $g_{\phi\phi}$ que son :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

En este sistema de coordenadas particular, podemos deducir que su determinante es cero. La simetría P se deduce del hecho de que los puntos adyacentes, esta vez explícitamente

diferenciados, se deducen por $\rho \rightarrow -\rho$. Esta transformación desempeña el mismo papel que $u \rightarrow -u$ en (41).

Combinando estas soluciones métricas bajo estas dos condiciones, obtenemos un Agujero de Gusano y una Fuente Blanca como Membrana Unidireccional, que conecta dos espacios semi-Riemannianos a través de un "puente" que sólo se puede cruzar en una dirección. Supongamos además que el Agujero de Gusano no conduce a otro universo, como en la figura 5.1.a, o a un punto distante del mismo universo, como en la figura 5.1.b; sino que las dos hojas congruentes corresponden a los mismos puntos del universo físico por la transformación $u \rightarrow -u$ transformación (o $\rho \rightarrow -\rho$), como se sugiere en (Einstein y Rosen 1935) y en la Sección 5.3.3. Podemos concluir entonces que las dos hojas son *PT-simétricas*.

En la literatura, la inversión de la coordenada temporal se ha analizado de varias formas. En particular:

- Por la teoría de los grupos dinámicos de J. M. Souriau ((J. M. Souriau 1964),(J. M. Souriau 1997)), donde se demostró que induce una inversión de la energía. En consecuencia, la simetría de inversión del tiempo transforma cualquier movimiento de una partícula de masa m en un movimiento de una partícula de masa $-m$ ((Oppenheimer y Volkoff 1939), página 191). En la página 192 del mismo libro, el autor ofrece un análisis alternativo que evita las masas negativas. Souriau subraya que estas alternativas deben evaluarse en función de su capacidad para ser confirmadas por los experimentos.
- Feynman propuso una interpretación de la antimateria como materia ordinaria que *retrocede* en el tiempo.
- Se sabe por análisis teóricos (el teorema *CPT*) y experimentos que las partículas elementales obedecen leyes físicas que son invariantes bajo la *simetría CPT*.

La *simetría PT* descubierta en el apartado 5.3 puede considerarse como una *simetría CPT* seguida de una *simetría C* (inversión de la carga eléctrica). Por tanto, obtendríamos antimateria en la segunda hoja. Si la segunda hoja ya contiene materia ordinaria, podría interactuar con la antimateria de la primera hoja, constituyendo así una fuente de energía.

5.5 Conclusión

Introducimos una nueva construcción geométrica basada en la solución estacionaria esféricamente simétrica de la ecuación de Einstein en el vacío, con sólo dos supuestos inspirados en la física: *isotropía* (invariancia por $SO(3)$) y *estacionariedad* (invariancia por traslación en el tiempo). Al hacerlo, no estamos añadiendo, como se hizo anteriormente sin ninguna justificación física real, la invariancia por la simetría *tiempo-reversión* de $t \rightarrow -t$

(solución "estática"). Este nuevo conjunto de supuestos menos restrictivos introduce la presencia de un término cruzado $dr dt$, que el supuesto de *estaticidad* había prohibido anteriormente. Este nuevo objeto geométrico se comporta como una "membrana unidireccional", una combinación de *agujero de gusano* y *fuentes blancas* a través de un "puente". Con una métrica lorentziana en el infinito, esta estructura conecta dos espacios semiriemannianos enantiomórficos *PT-simétricos* con flechas temporales opuestas. En consecuencia, este objeto corresponde al recubrimiento de dos láminas de un espacio-tiempo cuatridimensional, que se presenta como *PT-simétrico*, conectadas a lo largo de un "puente". Inspirándonos en Einstein y Rosen, propusimos representar un punto del espacio físico mediante un par de puntos congruentes, uno en cada una de las dos hojas. Demostramos que esta identificación de puntos congruentes debería conducir a efectos físicos observables cuando un objeto cruza el puente espacial entre las dos hojas.

5.6 Anexo

Consideremos ahora el caso de transferencia de materia a una segunda capa del universo, donde tenemos libertad para definir la métrica de salida a la segunda hoja. Aplicando el siguiente nuevo cambio de variable a la métrica de Schwarzschild (42), invirtiendo el signo de la constante de integración $\alpha \rightarrow -\alpha$ podemos así construir una métrica "repulsiva" en la segunda hoja :

$$t_E^+ = t + \frac{\alpha}{c} \ln \left| \frac{r}{\alpha} + 1 \right|$$

Garantiza la continuidad de las geodésicas de la primera hoja a la segunda con un tiempo de caída libre finito en la primera y un tiempo de escape finito en la segunda.

La métrica entrante que estructura la primera hoja pasa a ser :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{+2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 - \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^+ - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Y la métrica de salida que estructura la segunda hoja pasa a ser :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{-2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E^- - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Tomando la forma general :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt_E^{\delta 2} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dr^2 + \delta \frac{2\alpha c}{r} dr dt_E - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

donde $\delta = -1$ para la métrica que estructura la primera hoja y $\delta = +1$ para la métrica saliente que estructura la segunda hoja. Así, como las dos métricas son simétricas por inversión del tiempo $t \rightarrow -t$ la continuidad de las geodésicas está asegurada de una hoja a la otra con un tiempo de caída libre finito en la primera y un tiempo de escape finito en la segunda.

Esto implica que la materia ordinaria podría convertirse potencialmente en antimateria de masa negativa, que se trasladaría a una capa separada del universo. Este proceso implica esencialmente la transformación de materia en antimateria de masa negativa. Combinando esta solución geométrica con la solución desarrollada anteriormente en el apartado 5.3,

podemos explorar la viabilidad de los viajes interestelares explotando las propiedades métricas de esta segunda capa.

6 Interpretación topológica del modelo

6.1 Definición

En cosmología, la topología se refiere al estudio de las propiedades espaciales fundamentales del universo que permanecen invariantes bajo transformaciones continuas. A diferencia de la geometría, que se centra en distancias y ángulos precisos, la topología se interesa más por cómo está conectado y estructurado el espacio a gran escala. Examina aspectos como la conectividad, la continuidad y los límites del espacio cósmico, independientemente de su forma y tamaño exactos.

En un contexto cosmológico, la topología ayuda a comprender la estructura general del universo, incluyendo cuestiones como si el universo es finito o infinito, si tiene "bordes" o es ilimitado, y si podría estar conectado de formas no triviales (como en los modelos de universos multiconectados). Esto incluye el examen de la forma y la estructura a gran escala del universo, determinadas por la distribución de las galaxias, los fondos de radiación cósmica y otras observaciones astrofísicas.

La topología es especialmente relevante para los modelos cosmológicos avanzados, como el modelo cosmológico Janus, ya que proporciona un marco para explorar conceptos como el universo multicapa, la conectividad entre diferentes regiones del espacio-tiempo y otras propiedades no intuitivas que pueden surgir de la física teórica avanzada.

En resumen, la topología en cosmología es una poderosa herramienta para explorar y comprender la estructura fundamental y la naturaleza de nuestro universo, más allá de las limitaciones de la geometría clásica.

Antes de continuar con este capítulo, es fundamental leer y comprender a fondo el cómic *Topologicon* (Petit 1985), escrito por el Dr. Jean-Pierre Petit, que está disponible gratuitamente en este sitio web <http://www.savoir-sans-frontieres.com/>. Esta obra populariza los conceptos de topología en relación con la cosmología y la relatividad general. De hecho, este capítulo trata principalmente de herramientas conceptuales que son más bien contraintuitivas. Por ello, se recomienda encarecidamente la lectura previa de este cómic para una mejor comprensión.

6.2 Modelo de agujero de gusano

Al desarrollar la nueva interpretación del modelo de agujero de gusano discutida en el anterior capítulo 5, proponemos una perspectiva topológica más profunda en relación con la relatividad general. Por ejemplo, consideremos la esfera del desfiladero S^2 que conecta dos capas del espacio-tiempo a través de la simetría PT . ¿Podría ser esta configuración análoga a un plano proyectivo? En topología, un plano proyectivo es una superficie no orientable con propiedades únicas, como líneas que divergen en un punto pero se encuentran en el otro. Esto sugiere que la conexión entre las capas del espacio-tiempo a través del desfiladero del agujero de gusano podría desafiar la orientación tradicional del espacio, evocando el plano proyectivo.

Nuestra conjetura se basa en la nulidad del determinante métrico en esta superficie, lo que podría indicar una naturaleza 2D no orientable. Si esta esfera del desfiladero es cerrada y tiene una superficie acotada, podría identificarse con un plano proyectivo. P^2 . Aunque esta

idea pueda parecer contraintuitiva, se deduce directamente de la topología del objeto descrita por la solución externa de Schwarzschild (42).

En el contexto de la relatividad general, el concepto de volumen elemental en el espacio-tiempo curvo es crucial. El volumen elemental en dimensiones n definido por una métrica de Riemann, viene dado por $dV = \sqrt{|\det(g)|} d^n x$ donde g es el tensor métrico y $\det(g)$ su determinante. Este volumen elemental no es simplemente el producto de diferenciales de coordenadas, como en el espacio euclídeo, sino que está modificado por la estructura curva del espacio-tiempo. El factor $\sqrt{|\det(g)|}$ refleja cómo se distorsiona el espacio-tiempo por la presencia de masa y energía, según las ecuaciones de Einstein. En regiones de gran curvatura, este volumen elemental puede comportarse de forma contraintuitiva, revelando características topológicas fascinantes y a veces sorprendentes del espacio-tiempo.

Recordemos que la esfera S^2 tiene una métrica definida por la expresión :

$$ds^2 = \alpha^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

La métrica de una esfera es una función matemática que describe las distancias entre puntos de la superficie de la esfera. Como esta métrica describe una esfera 2D (como una esfera de radio constante en un espacio-tiempo 4D), el elemento diferencial de superficie viene dado por :

$$dA = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} d\theta d\phi = \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Y en realidad es un elemento de superficie, porque una esfera es una superficie bidimensional en un espacio tridimensional. Cuando integramos este elemento de superficie, obtenemos la superficie descrita por la expresión :

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \alpha^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi\alpha^2$$

Esto corresponde a la superficie de una esfera de radio α . También podemos ver que esta superficie es análoga a la de un plano proyectivo P^2 un concepto poco frecuente en la geometría estándar.

6.3 Modelo del Universo

En geometría, una esfera S^2 puede visualizarse fácilmente porque podemos *sumergirla en* nuestro familiar espacio tridimensional R^3 . Sin embargo, un plano proyectivo, como P^2 no puede *sumergirse del* mismo modo. El plano proyectivo es un tipo de superficie no orientable, lo que significa que no puede disponerse plano en el espacio tridimensional sin que se produzca una autointersección. Para visualizar un plano proyectivo, necesitamos utilizar la "*inmersión*", un método en el que la superficie *se interseca a sí misma* según un conjunto de *auto-intersecciones*. Este concepto desafía nuestra comprensión tradicional de

las formas y los espacios.

Para comprender planos proyectivos de mayor dimensión, como P^3 o P^n tenemos que abandonar las representaciones visuales y adoptar el pensamiento abstracto. Este cambio mental es necesario para explorar estructuras topológicas complejas que van más allá de nuestras propias dimensiones.

Por ejemplo, una esfera puede voltearse si consideramos que cada banda que forma los meridianos que la recubren es capaz de cruzarse por "inmersión" para formar un recubrimiento de dos láminas de una banda de Möbius con tres medios giros ((Morin y Petit 1978)). Este efecto de "auto-intersección" sólo está ligado a la inmersión de este recubrimiento en nuestro espacio de representación tridimensional R^3 .

Podemos entonces hacer que el polo M de una lámina de esta esfera S^2 con el polo opuesto M' de la otra hoja del mismo revestimiento. Esto se llama "la conjunción de los puntos antípodas". Esta transformación permite que las flechas del tiempo, llevadas por los meridianos de esta esfera, se encuentren pero en oposición en cada hoja del mismo revestimiento, como en la figura 6.1.

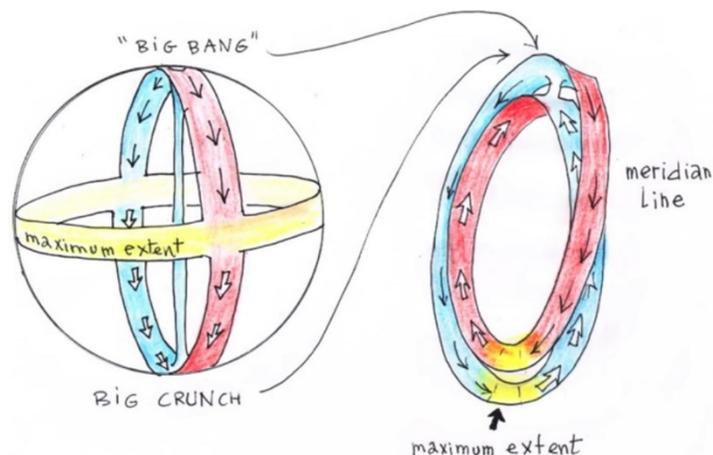


Figura 6.1 - Voltear una esfera uniendo los puntos antípodas

NB: La banda de Möbius es una superficie con un solo lado y una sola arista. Es un objeto matemático clásico de la topología, rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los espacios que permanecen invariantes bajo transformaciones continuas. La banda de Möbius puede crearse tomando una tira de papel, dándole una media vuelta y uniendo después los dos extremos de la tira. Esta configuración produce una superficie que, si se empieza a dibujar una línea a lo largo de ella, volverá a su punto de partida después de cruzar ambos "lados" de la tira sin levantar nunca el bolígrafo.

Lo que hace fascinante a la banda de Möbius es su naturaleza no orientable. En un espacio normal, como una hoja de papel, hay una clara distinción entre "arriba" y "abajo". En una banda de Möbius, sin embargo, no existe tal distinción: al desplazarse por la superficie, se pasa sin solución de continuidad de arriba abajo y viceversa.

La banda de Möbius se utiliza a menudo para ilustrar conceptos importantes de topología y

geometría, como la idea de superficie unilateral y los límites de nuestra intuición espacial. En física teórica y cosmología, la banda de Möbius también puede utilizarse como modelo para explorar estructuras espaciales complejas y fenómenos como la torsión del espacio-tiempo o la conexión entre distintas dimensiones.

Por ejemplo, la simetría PT puede interpretarse como el recorrido de un plano proyectivo de una lámina de revestimiento a otra (figura 6.2).

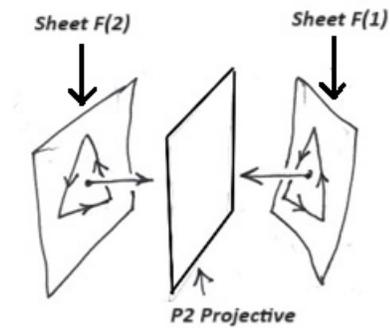


Figura 6.2 - P^2 Proyector

Para que un objeto geométrico esté dotado de un sistema de coordenadas funcional, la no nulidad del determinante de su métrica es esencial. En particular, en el contexto de las "coordenadas gaussianas", este principio es crucial. En un espacio de cuatro dimensiones, este requisito permite foliar el espacio mediante un conjunto de hipersuperficies tridimensionales. Estas hipersuperficies son "ortogonales" a las geodésicas, es decir, perpendiculares a las trayectorias que seguiría un objeto en movimiento libre, y se caracterizan únicamente por la coordenada temporal. La distinción entre "flecha del tiempo" y "tiempo propio" es importante: la flecha del tiempo se refiere a una dimensión temporal unidireccional, mientras que el tiempo propio es una medida de tiempo específica del observador.

En el contexto del espacio-tiempo bidimensional que estamos examinando, la foliación se realiza mediante una serie de círculos. Cada punto de estos círculos puede asociarse a un "vector temporal", que es ortogonal a los círculos. La ortogonalidad en este caso significa que el vector temporal se sitúa perpendicular a la superficie de cada círculo, formando una componente temporal distinta del espacio-tiempo (Figura 6.3).

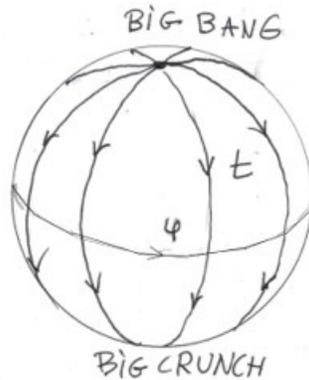


Figura 6.3 - Ilustración del "Vector Tiempo" ortogonal a un círculo en una familia de círculos que folian una esfera S^2

Aun así, este "objeto" tiene dos puntos singulares, a saber, sus polos, en los que el acimut no está definido. Estos polos representan "singularidades de malla" inevitables. Son dos porque la característica Euler-Poincaré de este objeto es igual a 2. Por ejemplo, si consideramos un poliedro simple, como un tetraedro, para representar una aproximación de la esfera, que es una pirámide de base triangular, su característica Euler-Poincaré es 4 (vértices) - 6 (aristas) + 4 (caras) = 2 . La característica de Euler-Poincaré de una esfera S^n es igual a 2 si n es par y cero si n es impar (5.3.3).

Desde nuestro punto de vista, el universo sería una esfera S^4 con dos singularidades, el Big Bang y el Big Crunch. Una esfera de cuatro dimensiones S^4 es análoga a una esfera regular, extendiendo el concepto a dimensiones superiores. Si consideramos esta esfera con sus dos polos, el Big Bang y el Big Crunch, se puede cartografiar mediante "paralelas" (similares a círculos paralelos en una superficie 2D S^2). Este proceso de foliación implica la creación de capas, o "rebanadas", a través de la esfera, que son análogas a las líneas que representan las latitudes en la Tierra. La orientación pasado-futuro se vuelve entonces uniforme en todas partes. En este contexto, la orientación pasado-futuro se refiere a la dirección del tiempo desde el Big Bang hasta el Big Crunch, que se hace coherente en toda esta estructura foliada. En relación con esta normal a las superficies paralelas, el espacio-tiempo es orientable, lo que significa que existe una noción bien definida de "arriba" y "abajo" en la estructura del espacio-tiempo.

Sin embargo, al "plegar" esta superficie (ya sea S^2 o S^4), creamos una situación en la que se superponen dos paralelas. Plegar, en este sentido, significa manipular la estructura de la esfera de tal manera que diferentes partes de la superficie entren en contacto. Sus vectores temporales se vuelven entonces antiparalelos u opuestos, como ya se ha mencionado. El vector tiempo es una forma de representar la dirección del tiempo en cada punto del espacio-tiempo. Cuando estos vectores se vuelven antiparalelos, significa que la dirección del tiempo se invierte en los puntos de contacto. Se produce lo que podríamos llamar una "orientación inducida". La orientación inducida se refiere aquí a la nueva orientación de los vectores temporales resultante del proceso de plegado. En cada punto de este espacio-tiempo, estructurado como una cubierta de dos hojas de una banda de Möbius con tres

semiflexiones (*cubierta de dos pliegues*), la "materia antípoda" (tanto espacial como temporal) aparece "retrocronica". Una banda de Möbius con tres semiflexiones es una superficie de una sola cara que puede visualizarse retorciendo una tira de papel tres veces antes de unir los extremos.

En el artículo de Jean-Pierre Petit (Petit 1994), se considera la interacción del universo con el campo gravitatorio creado por su antípoda, suponiendo que las leyes de interacción son :

1. Las masas ordinarias se atraen mutuamente según Newton.
2. Según Newton, las masas "antípodas" se atraen.
3. Las masas ordinarias y las masas "antípodas" se repelen según una ley "anti-Newton".

Esta hipótesis le llevó a "plegar" el universo dándole la topología de una "cubierta de dos hojas" de una superficie 2D.

Así "plegada", la esfera S^2 (superficie cerrada) se convierte en el recubrimiento de otra superficie cerrada, la superficie de Boy, que tiene un único polo y cuya característica de Euler-Poincaré es igual a 1, como en la figura 6.4. La superficie Boy es una superficie única 3D no orientable con una sola cara y una sola arista, que tiene un punto singular en el que convergen todos los puntos antípodas. La superficie Boy es un ejemplo de superficie no orientable en 3D con una sola cara y una sola arista. Es intrigante porque, a diferencia de la esfera clásica, tiene un punto singular donde convergen todos los puntos antípodas. Esto significa que si empiezas a trazar una línea sobre la superficie de Boy, al final volverás a tu punto de partida sin haber cruzado nunca una arista ni utilizado la otra cara, porque no las hay.

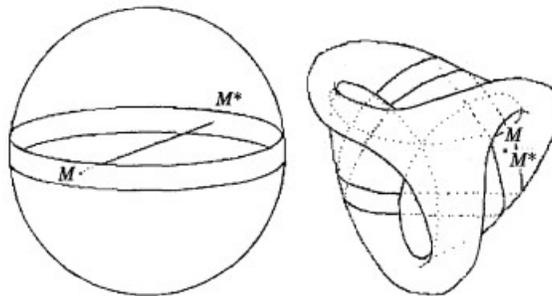


Figura 6.4 - La vecindad del ecuador de una 2-Esfera y su localización en una superficie Boy.

En esta fase, el Big Bang y el Big Crunch "coinciden".

En lugar de esta singularidad polar podría preverse un "tubo" que uniera estas dos singularidades de malla:

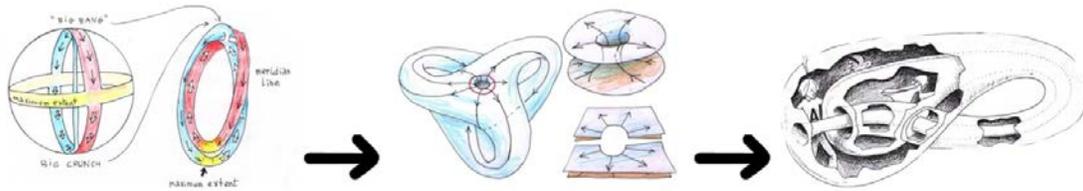


Figura 6.5 - Superficie de Boy en el centro tras la foliación de la esfera S^2 y la botella de Klein K^2 a la derecha

El carácter singular desaparece, y el objeto se convierte entonces en el revestimiento de una botella de Klein K^2 . La botella de Klein es una superficie no orientable sin límite ni interior definido, cuya característica de Euler-Poincaré es cero, como se muestra en la figura 6.5. La botella de Klein es otra superficie no orientable sin límite ni interior definidos. Imaginemos una banda de Möbius cuyos bordes también están unidos. A diferencia de la superficie de Boy, la botella de Klein no puede representarse en nuestro espacio tridimensional sin autointersección. Su interés reside en su comportamiento topológico, donde los conceptos de "interior" y "exterior" no están separados, lo que proporciona una representación útil para ciertas ideas de topología y cosmología teórica.

Creo que las limitaciones de la física teórica y la cosmología durante la década de 1950 pueden atribuirse al retraso de este campo en adoptar la topología. La topología, el estudio de las propiedades que se conservan mediante deformaciones continuas, podría haber ofrecido nuevas formas de entender el tejido del universo y sus complejas estructuras.

7 Interpretación alternativa de los objetos supermasivos subcríticos M87 y Sagitario A*.

Las primeras imágenes de objetos supermasivos situados en el centro de galaxias, publicadas en *Astrophysical Journal*, se han interpretado principalmente como agujeros negros gigantes. Esta interpretación se basa en la ausencia de explicaciones alternativas ampliamente aceptadas. Este estudio reexamina estas imágenes, en particular las de los objetos situados en el centro de la galaxia M87 y de la Vía Láctea. Destaca la posibilidad de supermasas subcríticas, cuyo radio es sólo un 5,72% más corto que el radio de Schwarzschild calculado a partir de su masa. También veremos que las partes centrales de estos rasgos están oscurecidas por el efecto de corrimiento al rojo gravitacional, representado por $z + 1$. Este desplazamiento se calcula como la relación entre la longitud de onda de la luz recibida por un observador lejano y la emitida desde la superficie, correspondiente a la relación entre las temperaturas máxima y mínima observadas del centro y la corona de estos objetos, un valor notablemente cercano a 3. Exploraremos la idea de que su estabilidad podría ser el resultado de un equilibrio entre el colapso gravitatorio, debido a una criticidad física que se produce mucho antes de la criticidad geométrica, y una presión radiativa extremadamente alta a densidad constante que emana de sus centros, proporcional al cuadrado de la velocidad de la luz - un fenómeno considerado por primera vez por Karl Schwarzschild en su segundo artículo publicado en febrero de 1916. Nuestro análisis pretende enriquecer nuestra comprensión de los objetos supermasivos situados en el centro de las galaxias proponiendo una interpretación alternativa.

7.1 Introducción

Las imágenes de los dos objetos supermasivos situados en el centro de la galaxia M87 y de la Vía Láctea han suscitado un gran interés mediático, siendo descritas inmediatamente como "*las primeras imágenes de agujeros negros gigantes*". Estas imágenes fueron publicadas en la prestigiosa revista *Astrophysical Journal* (M87 (Akiyama 2019) y Sagitario A en el centro de la Vía Láctea (Akiyama 2022)). Debajo, una barra relaciona el tono de color con lo que se denomina "*temperatura de brillo*":

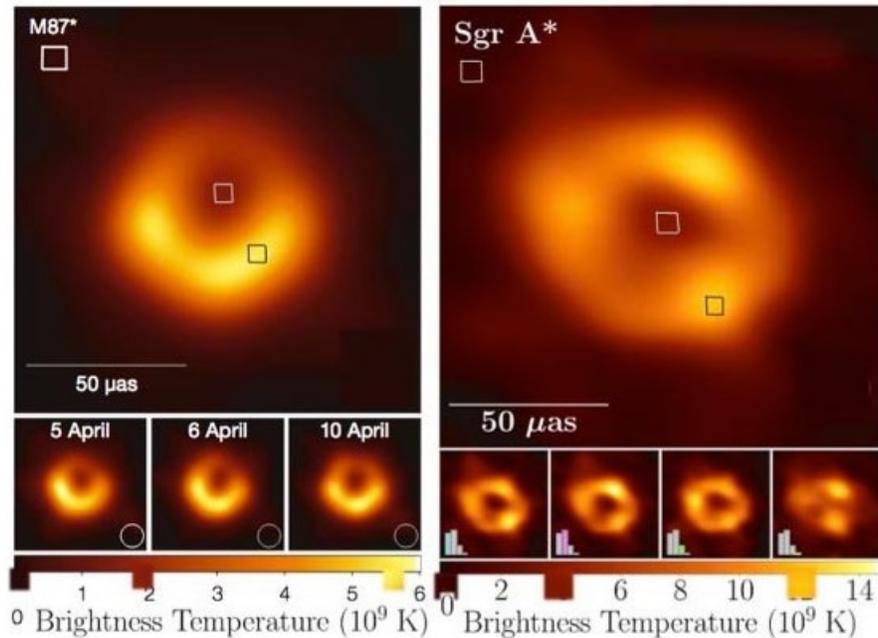


Figura 7.1 - Imágenes de los objetos M87 y Sagitario A

En la figura 7.1, a la izquierda, la primera imagen del objeto situado en el centro de la galaxia M87 se publicó en 1999, mostrando temperaturas luminosas mínimas de 1.800 millones de grados y máximas de 5.700 millones de grados, con una relación cercana a 3. Tres años después, en 2022, se publicó una segunda imagen a la derecha, mostrando temperaturas mínimas de 4.000 millones de grados y máximas de 12.000 millones de grados, también con una relación cercana a 3. Tres años más tarde, en 2022, se publicó una segunda imagen a la derecha, que muestra temperaturas mínimas de 4.000 millones de grados y máximas de 12.000 millones de grados, también con una relación cercana a 3. Estos dos objetos tienen masas muy diferentes, siendo el primero 1.625 veces más masivo que el segundo. Parece curioso que, en estas circunstancias, para ambos objetos, una nube de gas caliente en primer plano tenga unas características tales que la relación entre temperaturas máximas y mínimas sea tan cercana a 3 en ambos casos. Si la imagen de un tercer objeto condujera a la misma observación, sería prudente cuestionarse la verdadera naturaleza de estos objetos.

Las primeras imágenes de objetos supermasivos situados en el centro de las galaxias se asociaron a agujeros negros gigantes, y la parte central que no es perfectamente negra parece deberse a la luz que emana de un disco de gas caliente que orbita alrededor del agujero negro. Sin embargo, como veremos más adelante en este estudio, una estrella de neutrones puede alcanzar la criticidad en dos escenarios:

- De forma abrupta, implica el colapso repentino de una estrella supermasiva sobre su núcleo de hierro antes de transformarse en supernova.

- Más progresivamente, en los sistemas binarios, una estrella de neutrones subcrítica acumula lentamente masa absorbiendo el gas emitido por una estrella compañera a través de un "*viento estelar*". La masa crítica hasta la que podría sufrir una transformación posterior depende de la ecuación de estado de la materia en el interior de la estrella de neutrones y puede variar. Por lo general, los modelos actuales estiman que la masa crítica necesaria para una mayor transformación se sitúa aproximadamente entre 2 y 3 veces la masa solar, cerca del límite Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

La particularidad de tal modelo es que el objeto masivo debe tener una relación de temperatura de brillo de 3 entre su corona y su centro (temperaturas máxima y mínima). Como demostraremos más adelante, una interpretación alternativa más coherente sería atribuir el oscurecimiento de la parte central de estos objetos a un efecto de corrimiento al rojo gravitacional, que dilata o ralentiza el tiempo cerca de su horizonte.

Esto se debe a que un objeto masivo curva el espacio-tiempo a su alrededor, afectando a la trayectoria no sólo de los objetos masivos, sino también de la luz. Cuando un fotón pasa cerca de un objeto de este tipo, su trayectoria se curva debido a esta curvatura del espacio-tiempo, fenómeno conocido como lente gravitatoria (véase la figura 3.4). Sin embargo, no es sólo la trayectoria del fotón la que cambia: a medida que se aleja del objeto masivo, el fotón pierde energía para escapar del fuerte campo gravitatorio. Esta pérdida de energía se traduce en una disminución de su frecuencia, lo que amplía su longitud de onda hacia el extremo rojo del espectro luminoso, fenómeno conocido como corrimiento al rojo gravitatorio.

Para calcular la energía perdida por un fotón debido al corrimiento al rojo gravitatorio, es esencial comprender que la energía de un fotón está directamente relacionada con su frecuencia f mediante la ecuación $E = hf$ donde h es la constante de Planck.

Si consideramos un fotón emitido con una frecuencia f_e y observado a una frecuencia reducida f_r debido al desplazamiento gravitatorio al rojo, la energía perdida por el fotón puede expresarse como la diferencia entre las energías inicial y final :

$$\Delta E = h(f_e - f_r)$$

Utilizando la relación entre frecuencia y longitud de onda ($f = \frac{c}{\lambda}$), donde c es la velocidad de la luz, esta ecuación puede reescribirse en términos de longitudes de onda :

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_r} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

Y utilizando la definición de corrimiento al rojo gravitatorio $z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e}$ podemos obtener una expresión en términos de z :

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_e(1+z)} - \frac{1}{\lambda_e} \right)$$

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda_e} \left(\frac{z}{1+z} \right)$$

Esta ecuación muestra que la energía perdida por un fotón debido al corrimiento al rojo gravitatorio depende de la longitud de onda a la que fue emitido y del valor del corrimiento al rojo gravitatorio. Un signo negativo indica una pérdida de energía.

Esta pérdida de energía no es sólo aparente. Por ejemplo, el fondo cósmico de microondas es la radiación que ha sufrido el mayor corrimiento al rojo gravitacional, con un factor z de aproximadamente 1.100, lo que corresponde a una temperatura y una energía muy bajas, de unos 3 Kelvin (-270°C), muy por debajo de la energía original (véase la figura 3.10).

También es importante señalar que los chorros muy finos y colimados que se observan cerca de los objetos supermasivos indican la presencia de un potente campo magnético que se opone al colapso del objeto bajo el efecto de la gravedad, ejerciendo una intensa presión magnética opuesta. Estos objetos, al igual que las estrellas de neutrones en su masa máxima, son subcríticos, lo que da lugar a un efecto de corrimiento al rojo gravitatorio limitado a 3. Esto sugiere que estos objetos podrían ser objetos subcríticos masivos.

En ciencia, cuando una observación no coincide con la teoría, suele ser ésta la que se cuestiona. Sin embargo, en este trabajo muy reciente publicado en la revista *Astrophysical Journal* (Medeiros 2023), los investigadores modificaron las observaciones para ajustarlas al modelo de agujero negro. Generaron imágenes sintéticas de agujeros negros manipulando diversos parámetros, como la masa, el momento angular, etc., y seleccionando la que mejor se ajustaba a los datos observados mediante el software PRIMO, como se muestra en la figura 7.2.

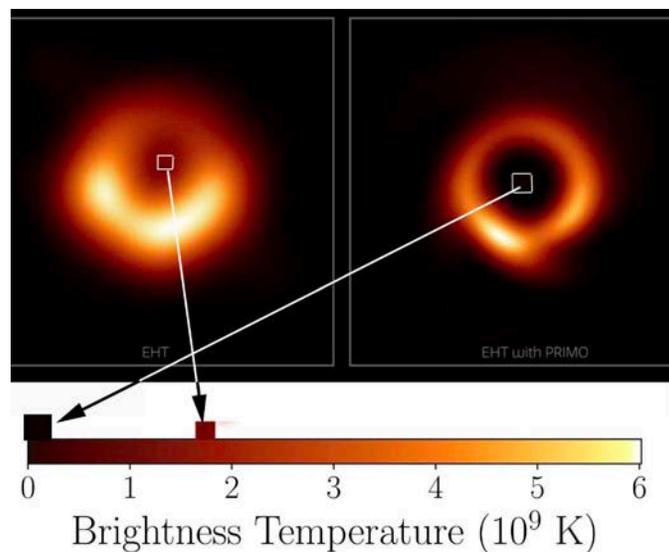


Figura 7.2 - Imagen sintética del agujero negro procesada por PRIMO a la derecha comparada con la imagen original a la izquierda

El resultado confirmó la teoría, pero planteó dudas sobre el rigor científico y la objetividad de la investigación.

7.2 Interpretación alternativa del fenómeno

Una interpretación alternativa es atribuir esta variación de color desde el centro hacia el borde a un desplazamiento gravitacional al rojo, con $z = 2$ que provoca un alargamiento de la longitud de onda en un factor de $1 + z = 3$. ¿Qué podemos decir de estos objetos?

7.2.1 Comparación de criticidades físicas y geométricas

En la sección 5.1 examinamos las soluciones de Schwarzschild de las ecuaciones de Einstein, destacando la métrica exterior de Schwarzschild y la métrica interior correspondiente para un fluido de densidad constante ρ_0 . Estas soluciones fueron confirmadas por fenómenos como el avance del perihelio de Mercurio y el fenómeno de lente gravitatoria (figura 3.4). Karl Schwarzschild trató de garantizar que las condiciones que rigen estas dos métricas fueran coherentes con la realidad física.

En un escenario en el que la densidad de la estrella ρ_0 permanece constante, puede definirse un radio característico \hat{r} puede definirse. De hecho, si consideramos la métrica interna publicada por Schwarzschild en su segundo artículo de febrero de 1916 (Schwarzschild 1916a) :

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \frac{3}{\kappa\rho_0} (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

Schwarzschild consideró la velocidad de la luz c igual a uno. Por tanto, la expresión $\frac{3}{\kappa\rho_0}$ debe escribirse como $\frac{3c^2}{\kappa\rho_0}$. A continuación, K. Schwarzschild definió una constante κ igual a $8\pi k^2$ "donde k^2 es la constante gravitatoria de Gauss", lo que le permitió introducir el radio característico \hat{r}^2 igual a $\frac{3}{\kappa\rho_0}$ que es también el radio del círculo que forma parte del meridiano de la superficie de Flamm ((Oppenheimer y Snyder 1939)). Así, la ecuación anterior nos lleva a:

$$ds^2 = \left(\frac{3\cos\chi_a - \cos\chi}{2} \right) dt^2 - \hat{r}^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta d\phi^2)$$

Entonces, como K. Schwarzschild utiliza el ángulo χ para localizar los puntos dentro de la esfera, cambia a la variable r aplicando el cambio de variable $r = \hat{r}\sin\chi$ Esto nos da la forma moderna de la métrica. Tolman proporcionó una declaración precisa en 1934 dando lo siguiente ((Tolman 1934)) :

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2} \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2} \right)} \right]^2 c^2 dt^2$$

Donde r_n es el radio de la estrella y \hat{r} es una constante estelar en función de su densidad ρ_0 . Nótese que formula el orden de los términos, en la métrica, según la firma (---+) pero conserva los signos de los términos respectivos.

Consideremos un observador estacionario ($dr = d\theta = d\phi = 0$) situado en el interior de una estrella. La métrica pasa a ser :

$$ds = cd\tau = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r_n^2}{\hat{r}^2}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{r^2}{\hat{r}^2}\right)} \right] cdt = f(r)dt$$

donde τ es el tiempo propio observado por el observador estacionario dentro de la estrella y $f(r)$ es el factor tiempo.

Entonces, como se vio en la sección 5.1, cuando el factor tiempo es cero en el centro de la estrella, se alcanza la criticidad física antes de que aparezca la criticidad geométrica, cuando el radio de la estrella es sólo un 5,72% menor que el radio crítico \hat{r} deducido de su densidad:

$$r_n = R_{cr\phi} = \sqrt{\frac{8}{9}} \hat{r} = \sqrt{\frac{c^2}{3\pi G \rho_0}}$$

7.2.2 Desplazamiento al rojo gravitacional próximo a la criticidad física

La solución de Schwarzschild fue retomada, en una forma diferente, por Tolman ((Tolman 1934)), Oppenheimer ((Oppenheimer y Snyder 1939)) y otros ((Adler, Bazin y Schiffer 1975)), dando lugar a la ecuación de estado, conocida como ecuación Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), presentada en su forma diferencial:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho c^2 + p}{r^2} \left(\frac{4\pi G}{c^4} p r^3 + \frac{Gm(r)}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}$$

cuyo valor integrado fue dado por Karl Schwarzschild un siglo antes (véase la figura 7.3), donde en su segundo artículo (Schwarzschild 1916a) publicado en febrero de 1916, describe la geometría en el interior de una esfera llena de un fluido incompresible de densidad constante ρ_0 :

$$f_2 = \frac{3}{\alpha \rho_0} \sin^2 \chi, \quad f_4 = \left(\frac{3 \cos \chi_a - \cos \chi}{2} \right)^2, \quad f_1 f_2 f_4 = 1. \quad (29)$$

$$\longrightarrow \rho_0 + p = \rho_0 \frac{2 \cos \chi_a}{3 \cos \chi_a - \cos \chi} \quad (30)$$

$$3x = r^3 = \left(\frac{\alpha \rho_0}{3} \right)^{-3/2} \left[\frac{9}{4} \cos \chi_a \left(\chi - \frac{1}{2} \sin 2\chi \right) - \frac{1}{2} \sin^3 \chi \right]. \quad (31)$$

Figura 7.3 - La ley de la presión obtenida en 1916 por Karl Schwarzschild

En esta fórmula, la velocidad de la luz se ajusta siempre a un valor unitario. En consecuencia, esta fórmula es equivalente a:

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{\cos\chi - \cos\chi_a}{3\cos\chi_a - \cos\chi} \right)$$

Entonces, como se vio en la sección 7.2.1, K. Schwarzschild cambió a la variable r mediante el siguiente cambio simple de variable :

$$r = \hat{r} \sin\chi$$

La presión se hace cero en la superficie de la estrella para $\chi = \chi_a$ con un radio dado por :

$$r_a = \hat{r} \sin\chi_a$$

El centro de la estrella corresponde a $\chi = 0$ por lo que la presión se convierte en :

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{1 - \cos\chi_a}{3\cos\chi_a - 1} \right)$$

Esto impone un límite máximo a este radio para $\cos\chi_a = \frac{1}{3}$ significado :

$$r_a = R_{cr\phi} = \hat{r} \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,9428\hat{r}$$

Sin embargo, si consideramos la masa correspondiente a una criticidad física :

$$M_{cr\phi} = \frac{4}{3} \pi \hat{r}^3 \rho_0$$

y la correspondiente a la criticidad geométrica :

$$M_{cr\gamma} = \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0$$

obtenemos la siguiente relación :

$$M_{cr\phi} = \left(\frac{8}{9} \right)^{\frac{3}{2}} M_{cr\gamma} = 8.838 M_{cr\gamma} = 2.5 M_{solar}$$

Este valor es compatible con las masas de algunas estrellas de neutrones que hemos podido deducir directamente a partir de las observaciones disponibles y para las que Thorne, Wheeler y Misner estimaron en su libro (página 611 de (Thorne, Wheeler y Misner 1973)) la masa crítica más allá de la cual la presión vuela hacia el infinito, como se muestra en la figura 7.4 :

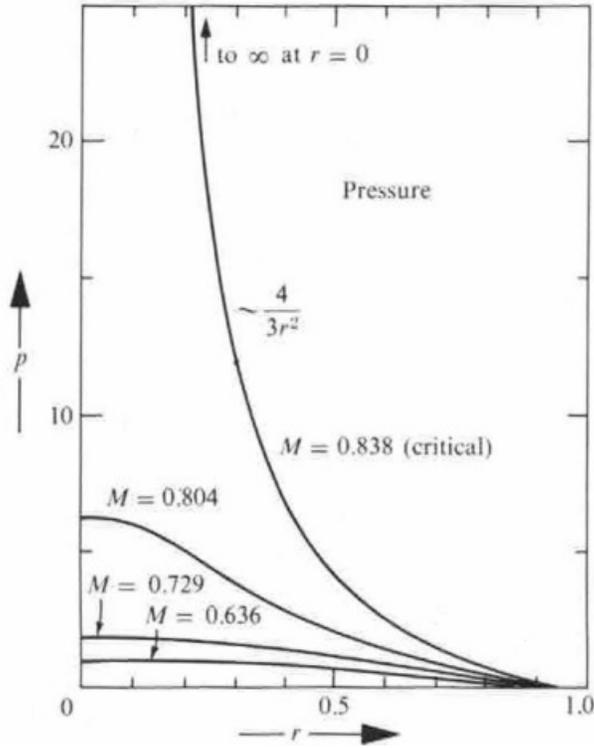


Figura 7.4 - Variación de la presión en el interior de una estrella de neutrones de densidad constante

Por supuesto, nunca dispondremos de imágenes de estrellas de neutrones comparables a las de los objetos del centro de M87 y de la Vía Láctea. Así que calculemos el efecto de corrimiento al rojo gravitacional $z + 1$ (correspondiente a los cuerpos celestes masivos cercanos a esta criticidad física. Este efecto incide en la luz emitida desde su superficie en dirección radial hacia un observador lejano, que la percibirá con una longitud de onda estirada (corrimiento al rojo). λ_r longitud de onda (corrimiento al rojo). Viene dada por:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_a}}}$$

Sin embargo, en la parte central, el radio de criticidad geométrica viene definido por el *radio de Schwarzschild*, que es :

$$R_s = \frac{2GM_{cr\gamma}}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \left(\frac{4}{3} \pi r_a^3 \rho_0 \right) = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} r_a^3 = \frac{r_a^3}{\hat{r}^2}$$

Entonces el corrimiento al rojo gravitacional dará :

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_a^2}{\hat{r}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_a c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}}} = 3$$

Este es precisamente el valor deducido de la relación entre las temperaturas máxima y mínima deducidas de las dos primeras imágenes de agujeros negros situados en el centro de las galaxias M87 y Vía Láctea. Así pues, las imágenes de estos objetos supermasivos también podrían corresponder a entidades subcríticas, en las que la presión en su centro - definida como densidad de energía por unidad de volumen- sería infinita o, al menos, extremadamente elevada.

7.2.3 Variación de la velocidad de la luz y la presión en plasmas de densidad constante

Consideremos ahora un fluido (plasma de hidrógeno) con una densidad supuestamente constante. A una temperatura inferior a 3000° la presión interior viene dada por :

$$p = \frac{\rho_0 v^2}{3}$$

donde v es la velocidad media de agitación térmica de las partículas que componen el plasma. Así, el razonamiento de que "si la presión p tiende hacia el infinito, entonces esta velocidad también debería tender hacia el infinito, lo que contradice un principio central de la relatividad especial, el "principio de causalidad", según el cual ningún efecto físico puede propagarse a una velocidad $v > c$ " (Thorne, Wheeler y Misner 1973), conduciría a una aberración física.

Sin embargo, en esta región del espacio-tiempo, la presión dentro de este plasma se vuelve radiativa:

$$p_r = \frac{\rho_0 c^2}{3}$$

Si prevemos aumentar esta presión radiativa a densidad constante, esto sólo puede lograrse considerando una variación de la velocidad de la luz en el medio, que Karl Schwarzschild fue el primero en prever (Schwarzschild 1916a):

Die Lichtgeschwindigkeit in unserer Kugel wird:

$$v = \frac{2}{3 \cos \chi_a - \cos \chi_s}, \quad (44)$$

Figura 7.5 - Variación de la velocidad de la luz en una esfera de densidad constante

Así pues, como señalaba en su artículo, el aumento de la velocidad de la luz sigue al aumento de la presión. ¿Qué ocurre cuando esta presión aumenta, al igual que el valor de la velocidad de la luz? Sencillamente, según Karl Schwarzschild (página 433 de (Schwarzschild 1916a)) estas dos magnitudes se vuelven infinitas para $\cos \chi_a = \frac{1}{3}$ correspondiente a $r = R_{cr\phi}$ (44) como se ha visto en el apartado 7.2.2.

Del estudio de Karl Schwarzschild podemos deducir que la estabilidad de estos objetos supermasivos subcríticos se debe a que el colapso gravitatorio, debido a la criticidad física que se produce mucho antes de la criticidad geométrica, se compensa con una presión radiativa extremadamente alta a densidad constante desde sus centros, proporcional al cuadrado de la velocidad de la luz.

7.3 Conclusión

Hemos analizado imágenes de objetos supermasivos situados en el centro de galaxias, que se presentaron inicialmente en *Astrophysical Journal* como las primeras imágenes de agujeros negros gigantes. Mediante nuestro estudio en profundidad, proponemos una interpretación alternativa de estos objetos, que podrían corresponder a rasgos supermasivos subcríticos, exhibiendo una relación de temperatura máxima a mínima cercana a 3. De hecho, su radio es sólo un 5,72% más corto que las longitudes de Schwarzschild deducidas a partir de su masa. Esta observación concuerda perfectamente con el efecto de corrimiento gravitatorio hacia el rojo, potencialmente característico de las estrellas de neutrones que se acercan a la criticidad física, como sugiere la solución geométrica interior de Schwarzschild publicada en su segundo artículo en febrero de 1916. Esta solución, en gran parte desconocida para la mayoría de los cosmólogos de la posguerra y no traducida al inglés hasta 1999, ofrece una perspectiva única para observar estos fenómenos. Examinando aspectos como la presión, la velocidad de la luz y el factor tiempo en el interior de estos objetos, pretendemos enriquecer el relato existente de los complejos fenómenos astrofísicos en el corazón de las galaxias. Esto incluye una exploración de su estabilidad, que podría mantenerse gracias a un equilibrio entre el colapso gravitatorio, resultado de la criticidad física que se produce mucho antes de la criticidad geométrica, y la presión radiativa extremadamente alta a densidad constante que se origina en sus centros, proporcional al cuadrado de la velocidad de la luz. Los trabajos centenarios de Karl Schwarzschild nos recuerdan que aún quedan misterios por desentrañar dentro de teorías bien establecidas. Las cuestiones que planteamos, en particular las relativas a la evolución del factor tiempo y sus profundas implicaciones para el propio concepto de tiempo, son cruciales e invitan a seguir investigando. Si las observaciones futuras confirman nuestras hipótesis, en particular si se descubre la imagen de un tercer objeto supermasivo con una relación de temperatura similar, ello incitaría a reevaluar algunos de nuestros modelos astrofísicos actuales. En definitiva, el universo, en toda su inmensidad y complejidad, sigue estimulándonos en nuestra insaciable búsqueda del conocimiento.

8 Desafíos y debates

8.1 Desafíos encontrados en la comunicación y aceptación del modelo

En nuestros esfuerzos por difundir y validar el Modelo Cosmológico Janus, nos hemos topado con formidables desafíos, especialmente en el ámbito de la publicación científica. Esta sección pretende detallar estas dificultades, destacando las complejidades y sesgos inherentes al sistema de publicación internacional dominante.

Uno de los obstáculos más importantes que encontramos fue el proceso de revisión por pares en las revistas de prestigio. Descubrimos que el sistema, tal y como existe en la actualidad, es a menudo rígido e impermeable a las nuevas ideas, en particular a las que cuestionan los fundamentos establecidos de la Física y la Cosmología. Nuestros intentos de publicar en revistas prestigiosas como *Physical Review D*, *Modern Physics Letters A*, *Astrophysical Journal* y *Astrophysics and Space Science*, entre otras, se han topado con resistencia y escepticismo. Esta resistencia no parece deberse a una falta de rigor científico por nuestra parte, sino más bien a una tendencia general de la comunidad científica a mantener el statu quo.

En nuestros intentos por publicar, hemos recibido respuestas que ilustran los retos a los que nos enfrentamos. Por ejemplo, una carta del Dr. Ethan T. Vishniac, editor de *The Astrophysical Journal*, destacaba la naturaleza poco convencional de nuestro trabajo en el contexto de su publicación:

Estimado Dr. Zejli

*Me dirijo a usted en relación con su manuscrito citado más arriba, que ha enviado recientemente a *The Astrophysical Journal*.*

He leído su manuscrito y he considerado su idoneidad para su publicación en nuestra revista. Nuestra revista se especializa en manuscritos que presentan nuevos resultados sobre observaciones astronómicas o teoría aplicada directamente a sistemas astrofísicos. Desgraciadamente, el tema de su manuscrito, que trata de aspectos fundamentales de la relatividad bimétrica, queda muy fuera del ámbito temático de nuestra revista. En consecuencia, lamento comunicarle que no podremos publicar su manuscrito. No obstante, le deseo lo mejor en sus futuras investigaciones.

El tema de este artículo entraría perfectamente en el ámbito de una revista especializada en la física de la gravedad. Como norma general, no recomiendo revistas específicas. Sólo señalaré que este manuscrito no está bien organizado como trabajo de investigación. La mayor parte del artículo revisa trabajos anteriores y los nuevos resultados y su importancia son difíciles de discernir. Por ejemplo, en el resumen no se menciona ninguno de ellos.

Saludos,

Ethan T. Vishniac

Redactor jefe de la AAS

Universidad Johns Hopkins

Esto significa que, aunque nuestro manuscrito trataba aspectos fundamentales de la "relatividad bimétrica" (es decir, bimétrica), no se ajustaba al enfoque de la revista sobre

nuevos resultados astronómicos y teorías aplicadas a sistemas astrofísicos. Esta respuesta educada e informativa refleja una tendencia general a favorecer los trabajos que encajan en el marco establecido de la investigación científica. Por el contrario, las respuestas de *Physical Review D* fueron mucho más escuetas, a menudo resumidas con la frase "No es adecuado". Esta breve respuesta pone de manifiesto la dificultad de conseguir la aceptación de ideas que se apartan significativamente de los paradigmas existentes en física teórica y cosmología.

Estas interacciones con las principales revistas ponen de relieve un reto importante a la hora de comunicar nuevas teorías científicas: la necesidad de ajustar el trabajo innovador a las expectativas y normas establecidas de las revistas científicas, preservando al mismo tiempo la integridad y novedad de la investigación.

Además, los recientes cambios en la política de *arXiv*, uno de los principales repositorios de prepublicación, han introducido una capa adicional de complejidad. El nuevo requisito de que los envíos vayan precedidos inicialmente de la publicación en una importante revista revisada por pares puede parecer paradójico y contrario a la intuición, sobre todo en el caso de investigaciones pioneras que podrían encontrar resistencia inicial en los foros tradicionales. Este cambio de política ha obstaculizado considerablemente nuestra capacidad para compartir rápidamente los resultados preliminares e interactuar más ampliamente con la comunidad científica.

A pesar de estos retos, ha habido destellos de esperanza y reconocimiento. Dos revistas, la rusa *Gravitation and Cosmology* (Pleiades Publishing) y la alemana *Astronomische Nachrichten*, han mostrado su disposición a tomarse en serio nuestro trabajo. Su compromiso con nuestra investigación, aunque no tan amplio como hubiéramos esperado, es un paso positivo hacia una mayor aceptación y comprensión del JCM.

En la siguiente sección, analizaremos las respuestas y críticas de estas revistas, destacando tanto los comentarios constructivos como las áreas en las que el proceso de revisión por pares podría mejorarse para dar cabida a teorías científicas innovadoras.

8.2 Debate sobre las críticas y respuestas presentadas

En el transcurso de nuestros esfuerzos por publicar el Modelo Cosmológico Janus, nos enfrentamos a algunos retos importantes, uno de los cuales fue el largo proceso de revisión por parte de la revista *Gravitation and Cosmology*. Tras ocho meses de persistente seguimiento, la revista encontró por fin un revisor que evaluara la calidad de nuestro trabajo. Sin embargo, el resultado no fue el esperado. He aquí la correspondencia que resume la esencia de los retos a los que nos enfrentamos.

Respuesta de *Gravitación y Cosmología*

Estimado Dr. Zejli,

Tras numerosos intentos, hemos recibido un informe de arbitraje sobre su artículo GC23-019 'Nature of the Dipole Repeller'. Lamentablemente, el informe contiene una serie de

observaciones críticas graves. En vista de este informe, no podemos aceptar su artículo para su publicación en nuestra revista.

*Atentamente,
Dr. Sergey V. Bolokhov
Consejo editorial de Gravitación y Cosmología*

INFORME DEL ÁRBITRO

Los autores intentan explicar el fenómeno del llamado Repulsor Dipolar en el marco del "modelo cosmológico de Janus", que es de hecho una especie de teoría bimétrica. El propio modelo contiene algunas entidades que es muy improbable que existan en la naturaleza, como partículas con masa negativa y fotones con energía negativa. A este respecto, conviene recordar que experimentos recientes demostraron que las partículas de antimateria están sometidas a las mismas fuerzas de gravedad que las partículas de materia de la misma masa. Esto hace aún más dudosa la hipótesis de los autores sobre las masas negativas. Además, resulta extraño que la teoría en cuestión se invoque para explicar un solo fenómeno y no tenga ninguna repercusión en otros sistemas observados. Un punto débil del artículo es que sólo contiene argumentos cualitativos sin cálculos específicos que tengan en cuenta los parámetros observados del repulsor.

Mi respuesta a este crítico

Estimado Dr. Sergey V. Bolokhov,

Gracias por remitirnos el informe de los árbitros sobre nuestro manuscrito, "Nature of the Dipole Repeller". Agradecemos el tiempo y el esfuerzo invertidos en la revisión de nuestro trabajo. Sin embargo, creemos que puede haber algunos malentendidos respecto a los conceptos centrales de nuestra investigación, que nos gustaría aclarar.

1. Sobre la masa negativa y la antimateria: La preocupación del árbitro por las masas negativas a la luz de los recientes experimentos con antimateria pone de relieve un aspecto fundamental de nuestro modelo que puede haberse pasado por alto. El modelo cosmológico Janus, que constituye la base de nuestro artículo, predice la existencia de dos tipos distintos de antimateria. La antimateria de tipo C, similar a la antimateria de Dirac producida en laboratorios, responde a las fuerzas gravitatorias de forma similar a la materia ordinaria. En cambio, la antimateria de tipo PT, correspondiente al concepto de masa negativa de Feynman, se propone que exista en los centros de los vacíos cósmicos, como el Repulsor Dipolar. Este tipo ejerce un efecto antigravitatorio, que es un componente crítico de nuestro modelo y se detalla claramente en la página 10 de nuestro manuscrito.

2. La validez de nuestro modelo va más allá de la explicación del repulsor dipolar. Ofrece información sobre varios fenómenos astronómicos que el árbitro podría haber pasado por alto en nuestro artículo:

Confinamiento y estabilidad de las galaxias: se explica por los espacios lacunares llenos de masas negativas.

Efectos de lente gravitatoria: el modelo explica los fenómenos de lente gravitatoria en torno a las galaxias.

Estructura universal: Nuestra teoría propone una estructura lacunar del universo llena de cúmulos de masa negativa, parecidos a pompas de jabón interconectadas.

Curvas de rotación de las galaxias y anomalías gravitatorias: Explicamos el aplanamiento de las curvas de rotación y la inesperada aceleración de las estrellas en los bordes de las galaxias.

Formación temprana de galaxias: nuestro modelo, respaldado por observaciones recientes del telescopio James Webb, sugiere la formación simultánea de galaxias en los primeros 100 millones de años del universo.

Galaxias de alto desplazamiento al rojo: abordamos la disminución de la luminosidad de las galaxias lejanas (desplazamiento al rojo > 7) debido al efecto de lente gravitatoria negativa de los cúmulos de masa negativa.

Verificaciones relativistas locales: El modelo se alinea con fenómenos como la precesión del perihelio de Mercurio y la desviación de la luz por el Sol.

Observaciones de supernovas: la asimetría entre las poblaciones de masa positiva y negativa se correlaciona con las observaciones de supernovas de tipo Ia.

3. Interpretación errónea del alcance del modelo: Por último, la afirmación de que nuestra teoría sólo se invoca para explicar un único fenómeno pasa por alto su amplio rango aplicativo. Nuestro modelo ofrece explicaciones para las estructuras de las galaxias en espiral, la invisibilidad de la antimateria cósmica debida a los fotones de energía negativa y la naturaleza de los componentes invisibles del universo, entre otras.

Creemos que esta información y aclaraciones adicionales ayudarán a resolver las preocupaciones planteadas en el informe de los árbitros. Estamos dispuestos a proporcionar más detalles o revisiones si es necesario.

Gracias por considerar nuestra respuesta, y esperamos tener la oportunidad de contribuir a la revista.

Atentamente

Desgraciadamente, tras nuestra detallada respuesta a cada una de las preocupaciones del revisor, no recibimos más comunicaciones. El editor y el revisor parecían haberse retirado del diálogo, lo que ilustra los retos y, a veces, las barreras aparentemente insuperables que se encuentran a la hora de promover nuevas teorías científicas en el marco establecido de la publicación académica.

Análisis crítico de las devoluciones de la revista *Astronomische Nachrichten*

Nuestras interacciones con *Astronomische Nachrichten* también plantearon retos, pero permitieron profundizar en una cuestión fundamental en la aceptación de nuevas ideas en cosmología. El único revisor, encontrado tras dos meses de búsqueda, inició un diálogo que puso de relieve un problema generalizado: la dependencia de los supuestos establecidos por físicos de renombre, que luego conforman y solidifican los paradigmas dentro de los

cuales operan la mayoría de los cosmólogos. El objetivo de nuestro trabajo es ofrecer una interpretación geométrica y cosmológica novedosa de la solución exterior de Schwarzschild, basada en dos supuestos principales:

- **Isotropía:** invariancia bajo la acción de $SO(3)$, es decir, el grupo de rotaciones y traslaciones espaciales en 3D.
- **Estacionariedad:** Independencia de los términos de la métrica con respecto a la coordenada temporal, es decir, invariancia por traslación temporal.

La solución general, tal como la describió originalmente Schwarzschild, se presenta a menudo sin una justificación adecuada. Tolman señaló en 1934 ((Tolman 1934)) que la forma más general incluye un término cruzado en $drdt$. Sin embargo, este término se desestimó posteriormente por conveniencia. Este enfoque, incluido el de Schwarzschild, ha sido seguido por muchos investigadores, como se analiza en detalle en el capítulo 5. El revisor señaló que la inexistencia de dicho término cruzado se debía a los supuestos de simetría asumidos. Se nos acusa de descuidar un supuesto de simetría esencial: la solución debería ser invariante cuando t se cambia por $-t$ (como se señala en el libro de Wald (Wald 1984), entre otros). En consecuencia, una solución con un término cruzado $drdt$ no satisfaría esta condición de invariancia, porque al cambiar t a $-t$ altera el signo del término cruzado. Pero, ¿cuál es la base física de esta suposición de simetría relativa a la variable temporal? No hay ninguna. Ni Schwarzschild ni muchos de sus sucesores la mencionaron.

De hecho, el razonamiento (si se le puede llamar así) se basa en el "*modelo de agujero negro*" centrado en la "*forma moderna*", donde el término cruz está ausente (42). Se trata de una hipótesis puramente matemática, diseñada para alinearse no con realidades observacionales tangibles, sino con la creencia general en la existencia de los agujeros negros. Para los cosmólogos, por tanto, esta hipótesis puede parecer "*natural*".

Nuestra experiencia con *Astronomische Nachrichten* ilustra cómo los paradigmas bien establecidos pueden influir en la recepción de ideas innovadoras en cosmología, subrayando la necesidad de apertura mental y reevaluación de los supuestos fundamentales a la luz de los nuevos desarrollos teóricos.

9 Conclusión y debate

Teniendo en cuenta el principio de la navaja de Occam, que favorece la teoría más simple que sea más coherente con los datos observacionales, es razonable concluir que el Modelo de Janus supera al Modelo Estándar. El Modelo Cosmológico de Janus proporciona un enfoque coherente para explicar muchos fenómenos astrofísicos, al tiempo que ofrece una interpretación clara de los datos observacionales disponibles. En cambio, el Modelo Estándar presenta inconsistencias con los datos observacionales, lo que requiere construcciones ad hoc para resolverlas.

De hecho, el modelo Janus va más allá de proponer simplemente alternativas a los fenómenos que suelen atribuirse a la materia y la energía oscuras, como la aceleración de la expansión cósmica, el confinamiento de las galaxias, los pronunciados efectos de lente gravitatoria y la homogeneidad casi perfecta del Fondo Cósmico de Microondas (CMB), entre otros. Aporta aclaraciones detalladas sobre la naturaleza y la identidad de los componentes invisibles del universo. El modelo resuelve la paradoja de la falta de observación de antimateria primordial y ofrece una explicación del Repulsor Dipolar, considerándolo un conglomerado de masa negativa. Esta perspectiva refuerza la credibilidad del Modelo Cosmológico de Janus a la hora de establecer la estructura a gran escala del universo, al tiempo que explica las razones de la dificultad de detectar masa negativa con instrumentos de observación óptica. También explica la baja magnitud de los objetos astronómicos con un corrimiento al rojo gravitacional superior a 7 y se adhiere al principio de refutabilidad estipulando pruebas observacionales específicas, como la presencia de conglomerados de masa negativa, con el Repulsor Dipolar como ejemplo notable. Además, propone una cartografía alternativa del universo basada en una interpretación diferente del efecto de lente gravitatoria débil.

Además, el modelo Janus encuentra confirmación en los datos observacionales más recientes, en particular los obtenidos con el telescopio espacial James Webb, al predecir la formación de galaxias en sus formas actuales durante los primeros 100 millones de años de la edad del universo. Además, la estructura de su grupo dinámico confiere *simetría CPT* a su geometría, por lo que una predicción específica realizada en 2017 se confirmó en septiembre de 2023. Esta predicción se refiere a la antimateria con simetría C (simetría de carga), sintetizada en laboratorio y emisora de fotones de energía positiva, que, según las observaciones, está sometida a una atracción gravitatoria descendente, al igual que la materia ordinaria.

También abre prometedoras vías de investigación en mecánica cuántica, sugiriendo que la integración de estados negativos de energía y masa podría ser crucial para la cuantificación de la gravitación. Así pues, el modelo Janus se ajusta perfectamente a la naturaleza, sin presentar contradicciones importantes.

A lo largo de este libro, nos hemos adentrado en las complejidades del modelo, desentrañando sus matices y su potencial para arrojar luz sobre los misterios que durante tanto tiempo han desconcertado a cosmólogos y físicos.

Este viaje por los campos de las matemáticas avanzadas, la física teórica y la cosmología demuestra la capacidad del modelo para desafiar las perspectivas convencionales y ofrecer explicaciones alternativas a fenómenos que los modelos actuales se esfuerzan por dilucidar plenamente. Los debates y análisis presentados pretenden enriquecer la comprensión del lector y estimular su curiosidad por seguir explorando y cuestionando los límites de nuestro conocimiento científico.

Creo que las limitaciones de la física teórica y la cosmología pueden atribuirse al retraso con que este campo ha adoptado la topología desde la década de 1950. La topología, el estudio de las propiedades que se conservan mediante deformaciones continuas, podría haber ofrecido nuevas formas de entender el tejido del universo y sus complejas estructuras.

En conclusión, espero que este libro sirva no sólo como guía exhaustiva del modelo anclado en una sólida base teórica de la relatividad general, sino también como inspiración y motivación para una nueva generación de pensadores que se atrevan valientemente a explorar los territorios inexplorados de la cosmología. Que fomente una apreciación más profunda de la compleja belleza de nuestro universo y de la continua búsqueda de la comprensión que nos impulsa como científicos y como seres humanos.

En el campo dinámico y en constante evolución de la Cosmología, este modelo emerge como una luz guía esencial, que ilumina el camino hacia territorios inexplorados y nuevas perspectivas. Este viaje dista mucho de haber concluido; más bien representa un llamamiento permanente a seguir explorando y descubriendo.

Bibliografía

Adler, R., R. Bazin y M. Schiffer. 1975. *Introducción a la relatividad general*. McGraw-Hill.

Akiyama, K. et al. 2019. "Primeros resultados del telescopio del horizonte de sucesos M87. I. La sombra del agujero negro supermasivo". *The Astrophysical Journal*.

Akiyama, K. et al. 2022. "First Sagittarius a* Event Horizon Telescope Results. I. La sombra del agujero negro supermasivo en el centro de la Vía Láctea".

Anderson, E. K. et al. 2023. "Observación del efecto de la gravedad en el movimiento de la antimateria". *Nature*.

Bergmann, V., P. G. Bergmann, y A. Einstein. 1941. "On the Five-Dimensional Representation of Gravitation and Electricity". *Volumen del aniversario de Theodore von Karman*, 212.

Benoit-Lévy, A., y G. Chardin. 2012. "Introducción al universo de Dirac-Milne". *Astronomía y Astrofísica* 537: A78.

Bergmann, P. 1942. *An Introduction to the Theory of Relativity*. Prentice-Hall.

Bergmann, P., y A. Einstein. 1938. "Sobre una generalización de la teoría de la electricidad de Kaluza". *Anales de Matemáticas* 39: 683.

Bondi, H. 1957. "Masa negativa en la relatividad general". *Reseñas de Física Moderna* 29 (3).

Bourbaki, N. 2006. *Eléments de Mathématique: Groupes Et Algèbres de Lie*. Springer.

Boylan-Kolchin, Michael. 2023. "Stress Testing. Λ CDM with High-Redshift Galaxy Candidates". *Nature*.

Brennen, C. E. 1995. *Cavitation and Bubble Dynamics*. Oxford University Press.

Chandrasekhar, S. 1983. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Clarendon press.

Chaskalovic, Joël. 2009. "Teoría de la gravitación para la modelización matemática en geomarketing". *Journal of Interdisciplinary Mathematics* 12 (3): 417.

Cronin, J. W. 1964. "El descubrimiento experimental de la violación CP". *Sociedad Americana de Física*.

Damour, T., e Ian I. Kogan. 2002. "Lagrangianos efectivos y clases de universalidad de la bigravidad no lineal". *Phys. Rev. D*.

Debergh, N. et al. 2018. "On Evidence for Negative Energies and Masses in the Dirac Equation Through a Unitary Time-Reversal Operator".

Dyson, F. W., A. S. Eddington y C. Davidson. 1920. "A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May

29, 1919". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Serie A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 291-333.

Eddington, A. 1925. "Una comparación con las fórmulas de Whitehead y Einstein". *Nature*.

Einstein, A., y N. Rosen. 1935. "El problema de las partículas en la teoría general de la relatividad". *Phys. Rev.* 48: 73.

El-Ad, H., T. Piran, y L. N. da Costa. 1997. "Mon. Not. R. Astro. Soc."

Farnes, J. S. 2017. "A Proposal for a Unifying Theory of Dark Energy and Dark Matter" (Propuesta para una teoría unificadora de la energía y la materia oscuras). *arXiv Physics.gen-Ph*.

Ferreira, Leonardo et al. 2022. "¡Pánico! At the Disks: First Rest-Frame Optical Observations of Galaxy Structure at $z>3$ with JWST in the SMACS0723 Field". *The Astrophysical Journal Letters*.

Flamm, L. 1916. "Contribuciones a la teoría de la gravitación de Einstein".

Heald, G. 2020. "El caso más sólido de la repulsión gravitatoria entre materia y antimateria". *Publicación de Research Gate*, nº 339339776.

Hoffman, Y. et al. 2018. "El universo cercano cuasi lineal". *Nature Astronomy*.

Hoffman, Y., D. Pomarède, R. B. Tully y H. Courtois. 2017. "El repelente dipolar". *Nature Astronomy* 1: 0036.

Hossenfelder, S. 2008. "A Bi-Metric Theory with Exchange Symmetry" (Una teoría biométrica con simetría de intercambio) *arXiv*.

Kaluza, Th. 1921. "Sobre el problema de la unificación en física". *Sitzungsberichte Pruss. Acad. Sci.* 966.

Kerr, Roy P. 1963. "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics". *Physical Letters* 11: 237.

Klein, O. 1926. "Teoría cuántica y teoría de la relatividad en cinco dimensiones". *Z.Phys.* 37: 895.

Koiran, P. 2021. "Infall Time in the Eddington-Finkelstein Metric, with Application to Einstein-Rosen Bridges". *Inter. Jr. de Mod. Phys. D* 14.

Kruskal, M. D. 1960. "Extensión máxima de la métrica de Schwarzschild". *Physical Review* 119 (5).

Kruskal, Martin D. 1960. "Extensión máxima de la métrica de Schwarzschild". *Physical Review* 119: 1743-45.

- Medeiros, L. et al. 2023. "Principal-Component Interferometric Modeling (PRIMO), an Algorithm for EHT Data. I. Reconstrucción de imágenes a partir de observaciones EHT simuladas".
- Michelson, A. A., y E. W. Morley. 1887. "Sobre el movimiento relativo de la Tierra y el éter luminífero". *American Journal of Science* 34: 333-45.
- Morin, Bernard, y Jean-Pierre Petit. 1978. "Le Retournement de La Sphère". HAL.
- Morris, M., y K. S. Thorne. 1988. "Agujeros de gusano en el espaciotiempo y su uso para viajes interestelares: una herramienta para la enseñanza de la relatividad general". *Am. J. Phys.* 56: 395.
- Neiser, T. F. 2020. "Fermi Degenerate Antineutrino Star Model of Dark Energy". *Avances en Astronomía 2020*: Artículo ID 8654307.
- Oppenheimer, J. R., y H. Snyder. 1939. "Sobre la contracción gravitatoria continuada". *Phys. Rev.* 56: 455-59.
- Oppenheimer, J. R., y G. M. Volkoff. 1939. "On Massive Neutron Cores". *Physical Review* 55 (4): 374-81.
- Palatini, A. 1919. "Deduzione Invariantiva Delle Equazioni Gravitazionali Dal Principio Di Hamilton". *Rend. Circ. Matem. Palermo* 43: 203-12. <https://doi.org/10.1007/BF03014670>.
- Pavlovskii, A. I. 1994. "Magnetic Cumulation-a Memoir for Andrei Sakharov". En *Megagauss Magnetic Field Generation and Pulsed Power Applications*, editado por M. Cowan y R. B. Spielman, 9-22. Nueva York: Nova Science Publishers.
- Perlmutter, S. et al. 1999. "Measurements of Ω y Λ de 42 supernovas de alto corrimiento al rojo". *Astrophysical Journal* 517 (2).
- Petit, Jean-Pierre . 1985. *Le Topologicon*. Edición Belin.
- Petit, Jean-Pierre. 1994. "El problema de la masa desaparecida. *IL NUOVO CIMENTO*.
- Petit, Jean-Pierre. 1995. "Cosmología del universo gemelo". *Astrofísica y Ciencia Espacial* 226: 273-307.
- Petit, Jean-Pierre. 2018. "El modelo cosmológico de Janus y las fluctuaciones del CMB". *Progress in Physics*.
- Petit, Jean-Pierre, y G. D'Agostini . 2021a. "Modelos bimétricos. Cuando la masa negativa sustituye tanto a la materia oscura como a la energía oscura. Excelente concordancia con los datos observacionales. Resolviendo el Problema de la Antimateria Primigenia". *Base de datos del Centro Nacional Francés*, 2021a.
- Petit, Jean-Pierre, y G. D'Agostini. 2021b. "Constraints on Janus Cosmological Model from Recent Observations of Supernovae Type Ia". *Astrofísica y Ciencia Espacial*, 2021b.

Petit, Jean-Pierre, y G. D'Agostini. 2014a. "Cosmological Bimetric Model with Interacting Positive and Negative Masses and Two Different Speeds of Light, in Agreement with the Observed Acceleration of the Universe". *Modern Physics Letters A* 29 (34).

Petit, Jean-Pierre, y G. D'Agostini. 2014b. "Hipótesis de la masa negativa en cosmología y la naturaleza de la energía oscura". *Astrofísica y ciencia espacial* 354 (2014b): 611-15.

Petit, Jean-Pierre, y G. d'Agostini. 2014. "Modelo Cosmológico Bimétrico con Masas Positivas y Negativas Interactuantes y Dos Velocidades Diferentes de la Luz, en Acuerdo con la Aceleración Observada del Universo". *Modern Physics Letters A*.

Petit, Jean-Pierre, G. D'Agostini y N. Debergh . 2018. "Evidencia de energías y masas negativas en la ecuación de Dirac a través de un operador unitario de reversión temporal". *J. Phys. Comm.* 2 (115012).

Petit, Jean-Pierre, G. D'Agostini y N. Debergh. 2019. "Consistencia física y matemática del modelo cosmológico de Janus (JCM)". *Progress in Physics* 15.

Piran, Tsvi. 2018. "On Gravitational Repulsion". *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/9706049>.

Riess, A. et al. 2004. "Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope, Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution". *Astrophysical Journal* 607 (2).

Sájarov, A. D. 1967 . "Violación de la invariancia CP, asimetría C y asimetría de bariones del Universo". *Pi'sma ZhÉTF* 5 (1): 32-35.

Sájarov, A. D. 1979. "ZhETF Pis'ma". *JETP* 49: 594.

Sájarov, A. D. 1980. "Modelos cosmológicos del universo con inversión de la flecha del tiempo". *Pi'sma ZhÉTF* 79 (3): 689-93.

Sájarov, A. D. 1982. "Modelos multihoja del Universo". *Pi'sma ZhÉTF* 82 (3): 1233-40.

Schmidt, B. P. et al. 1998. "The High- z Supernova Search. Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae". *Astrophysical Journal* 507 (1).

Schwarzschild, K. 1916a. "Über Das Gravitationsfeld Einer Kugel Aus Inkompressibler Flüssigkeit Nach Der Einsteinschen Theorie". *Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.

Schwarzschild, K. 1916b. "Über Das Gravitationsfeld Eines Massenpunktes Nach Der Einsteinschen Theorie". *Sitzungsberichte Der Königlich Preussischen Akademie Der Wissenschaften*.

Souriau, J. M. 1964. *Geometría y relatividad*. Hermann.

Souriau, J. M. 1997. *Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics*. Birkhäuser Verlag.

Souriau, Jean-Marie. 1965. "Prolongaciones del campo de Schwarzschild". *Bulletin de La Société Mathématique de France* 93: 193-207.

Stoica, O. C. 2014. "On Singular Semi-Riemannian Manifolds". *Revista Internacional de Métodos Geométricos en Física Moderna* 11.

Thorne, K. S., J. A. Wheeler y C. W. Misner. 1973. *Gravitation*.

Tolman, R. 1934. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford en Clarendon Press.

Tsamparlis, Michael. 1978. "Sobre el método de variación de Palatini". *Journal of Mathematical Physics* 19 (3): 555-57.

Vuyk, V. 2018. "Un repelente dipolar de vacío de quinta fuerza, necesario para crear todas las fuerzas de atracción incluso alrededor de los agujeros negros en la teoría cuántica FFF". *Publicación de Research Gate*, no. 325995732.

Wald, R. 1984. *General Relativity*.

Weinberg, S. 2000. *The Quantum Theory of Fields: Volume 1, Foundations. Volume 2, Modern Applications. Volumen 3, Supersimetría*. Vol. 1-3. Cambridge University Press.