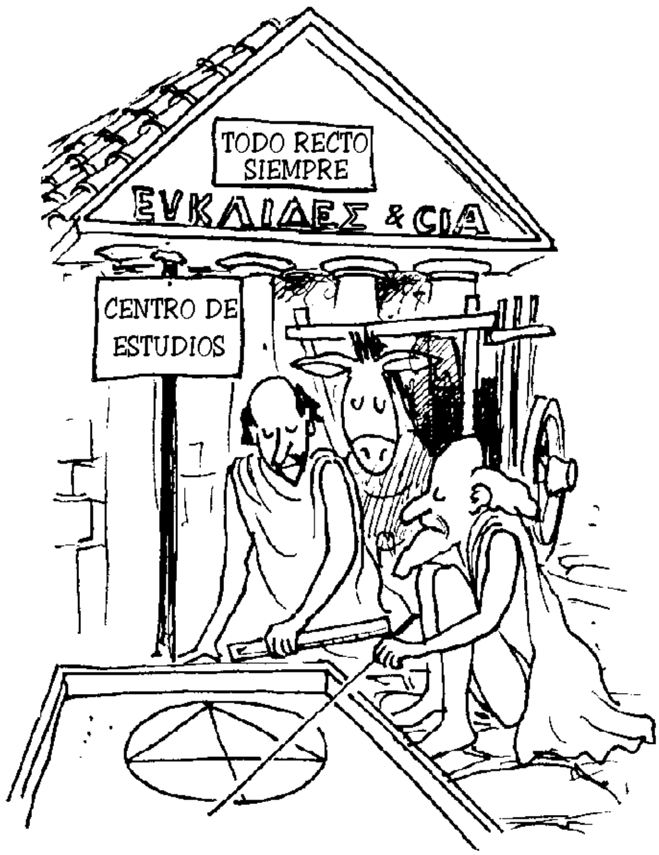
Savoir sans Frontières
http://www.savoir-sans-frontieres.com

EL GEOMETRICÓN

Jean-Pierre Petit

Traducción:
Juan Carlos Anduckia



Saber sin Fronteras

Asociación sin ánimo de lucro creada en 2005 y administrada por dos científicos franceses. Su finalidad: difundir conocimientos científicos por medio de historietas en PDF descargables de manera gratuita. En 2020 hemos completado 565 traducciones en 40 lenguas. Y más de 500.000 descargas.

Jean-Pierre Petit **Gilles d'Agostini**

La asociación es completamente voluntaria. El dinero donado es usado en su totalidad para retribuir a los traductores.

Para hacer una donación, use el botón de PayPal en la página de inicio:

http://www.savoir-sans-frontieres.com

PayPal FAIRE UN DON

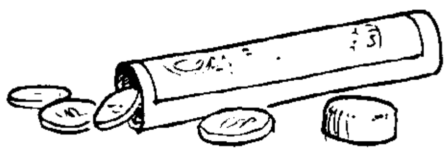
ADVERTENCIA

ESTE NO ES NI UN TRATADO, NI UN CURSO.

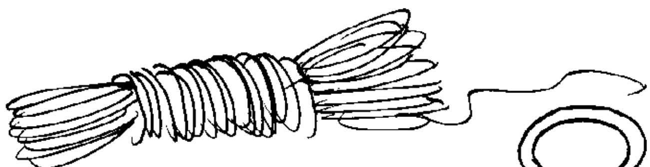
ES SIMPLEMENTE LA HISTORIA DE ANSELMO LANTURLY
Y DE UNO DE SUS VIAJES AL PAÍS DE LA GEOMETRÍA.

LEER DE PREFERENCIA CON:

* MUCHA ASPIRINA

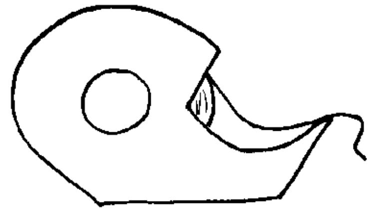


* UNA CUERDA

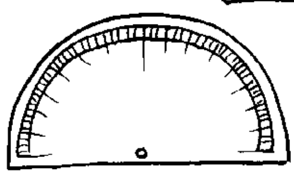


* UNAS TIJERAS

* CINTA ADHESIVA

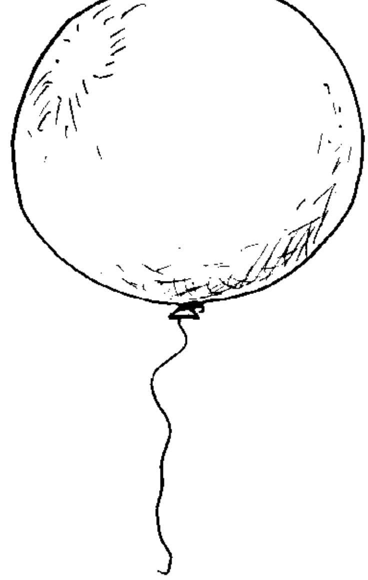


* UN GONIÓMETRO



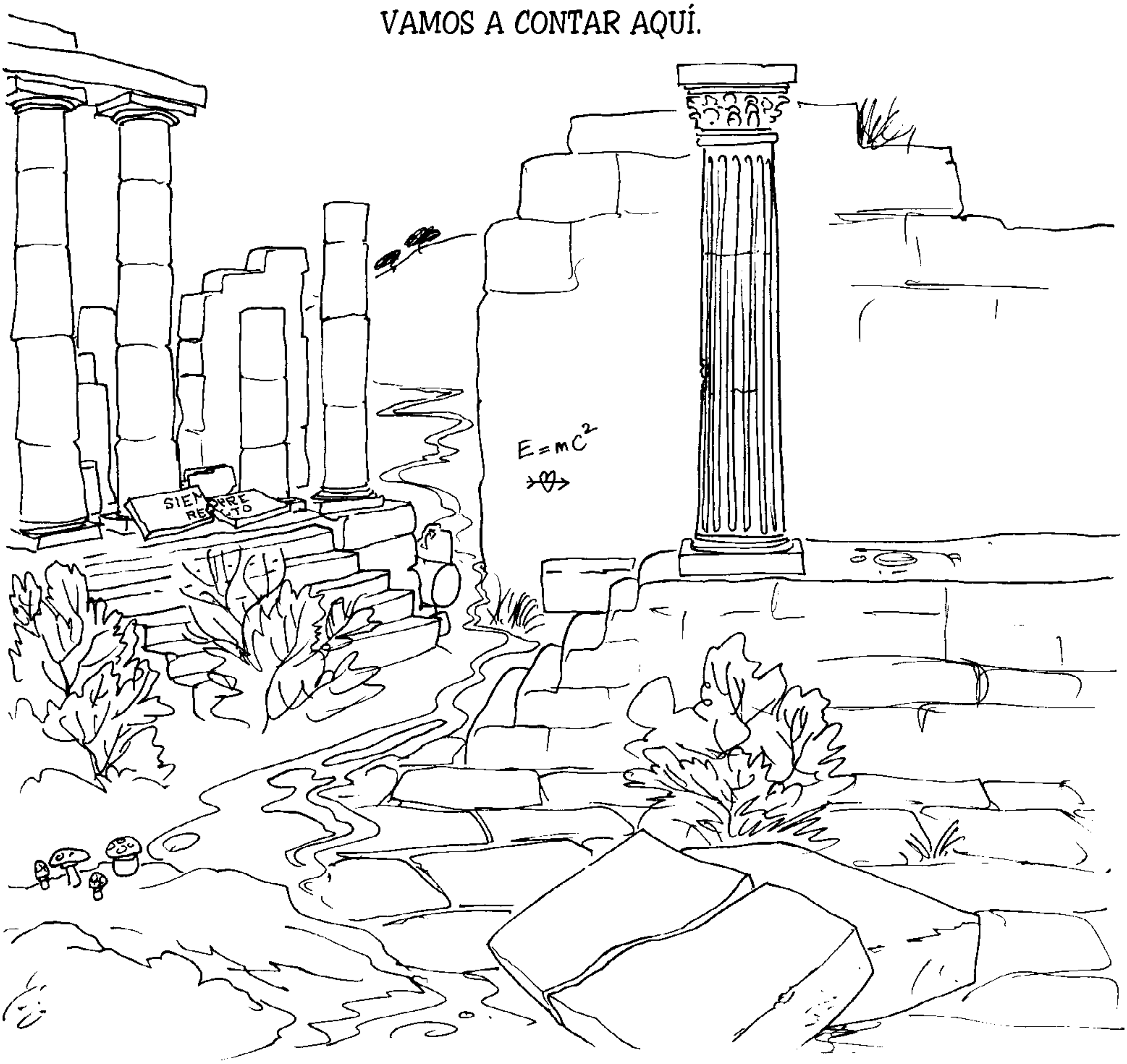
* Y UN LINDO GLOBO

BIEN REDONDO...



LA SOCIEDAD EUCLIDES & CÍA. NACIÓ EN ALEJANDRÍA, EN EL TERCER SIGLO DESPUÉS DE CRISTO, Y DURANTE MIL DOSCIENTOS AÑOS SUS NEGOCIOS PROSPERARON. SUS PRODUCTOS ERAN APRECIADOS POR UNA CLIENTELA SATISFECHA Y FIEL.

PERO POCO A POCO LOS GUSTOS DE LOS CLIENTES CAMBIARON.
ALGUNOS DE ELLOS, SEGUIDORES INCONDICIONALES DE LA EMPRESA, COMO RESULTADO DE CURIOSAS EXPERIENCIAS, COMENZARON A PREGUNTARSE:
"¿SERÁ SIEMPRE Y EN TODAS PARTES EUCLIDES EL MEJOR?".
ES LA HISTORIA DE UNO DE ÉSTOS LA QUE VAMOS A CONTAR AQUÍ.

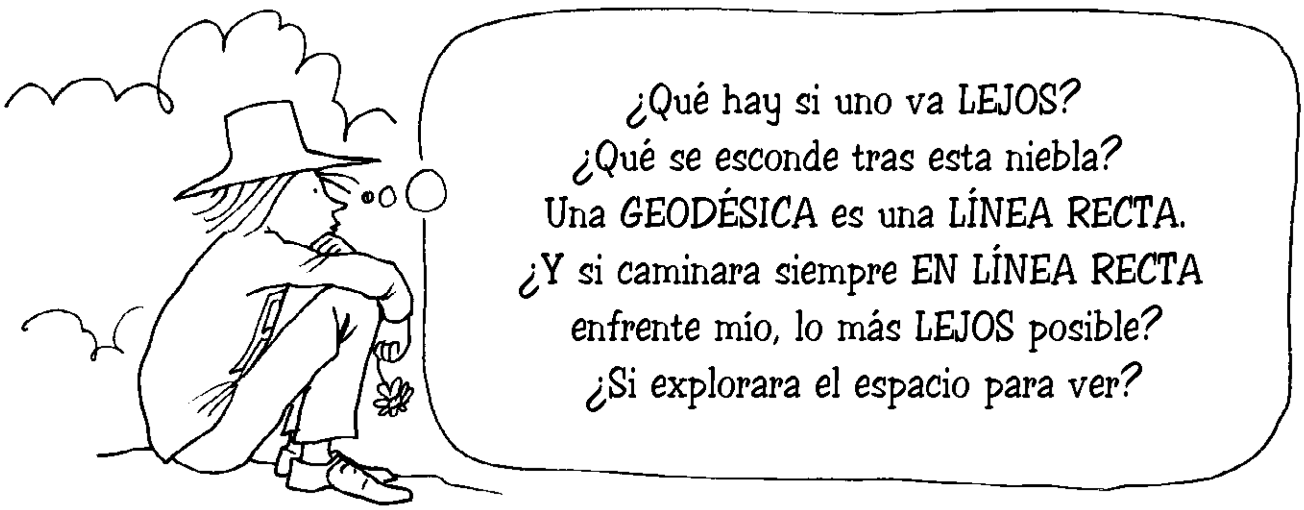


PRÓLOGO:

Un día, Anselmo decidió extender una cuerda entre dos estacas.


Con tres cuerdas extendidas, es decir
con tres GEODÉSICAS,
B
A
Anselmo formó un TRIÁNGULO.
Poniendo su goniómetro en cada vértice del
TRIÁNGULO, midió los ángulos Â, B̂, Ĉ,
y calculó su suma.
Según el excelso teorema de la
sociedad Euclides & Cía, dicha
suma vale 180°.
Bien...
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ Ευκλιδεσ

El mundo en el que vivía Anselmo permanecía siempre nublado, tanto así que uno no distinguía la punta de la propia nariz y podía llegar incluso a sonarse con la nariz de otro.

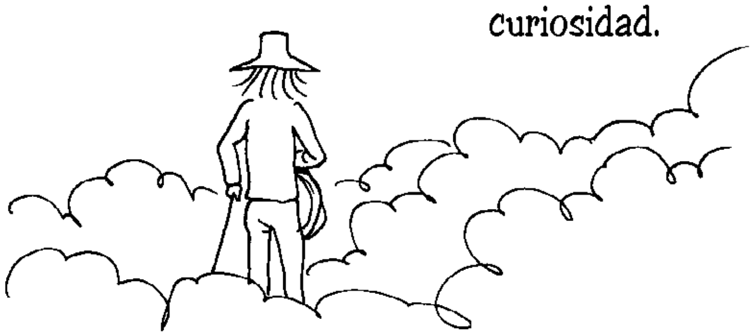


Anselmo caminó por largo tiempo... Detrás suyo la cuerda se desenrollaba tan bien extendida que eliminaba cualquier incertidumbre en su marcha a través de la bruma: había fabricado una GEODÉSICA impecable.

Bueno, no sé si lo han notado, pero hay días en que todo parece marchar al revés.

Puesto que aún le quedaba cuerda, Anselmo decidió aclarar las cosas.

Imperturbable, decidió continuar extendiendo su cuerda siguiendo hacia adelante en LÍNEA RECTA, lleno de curiosidad.

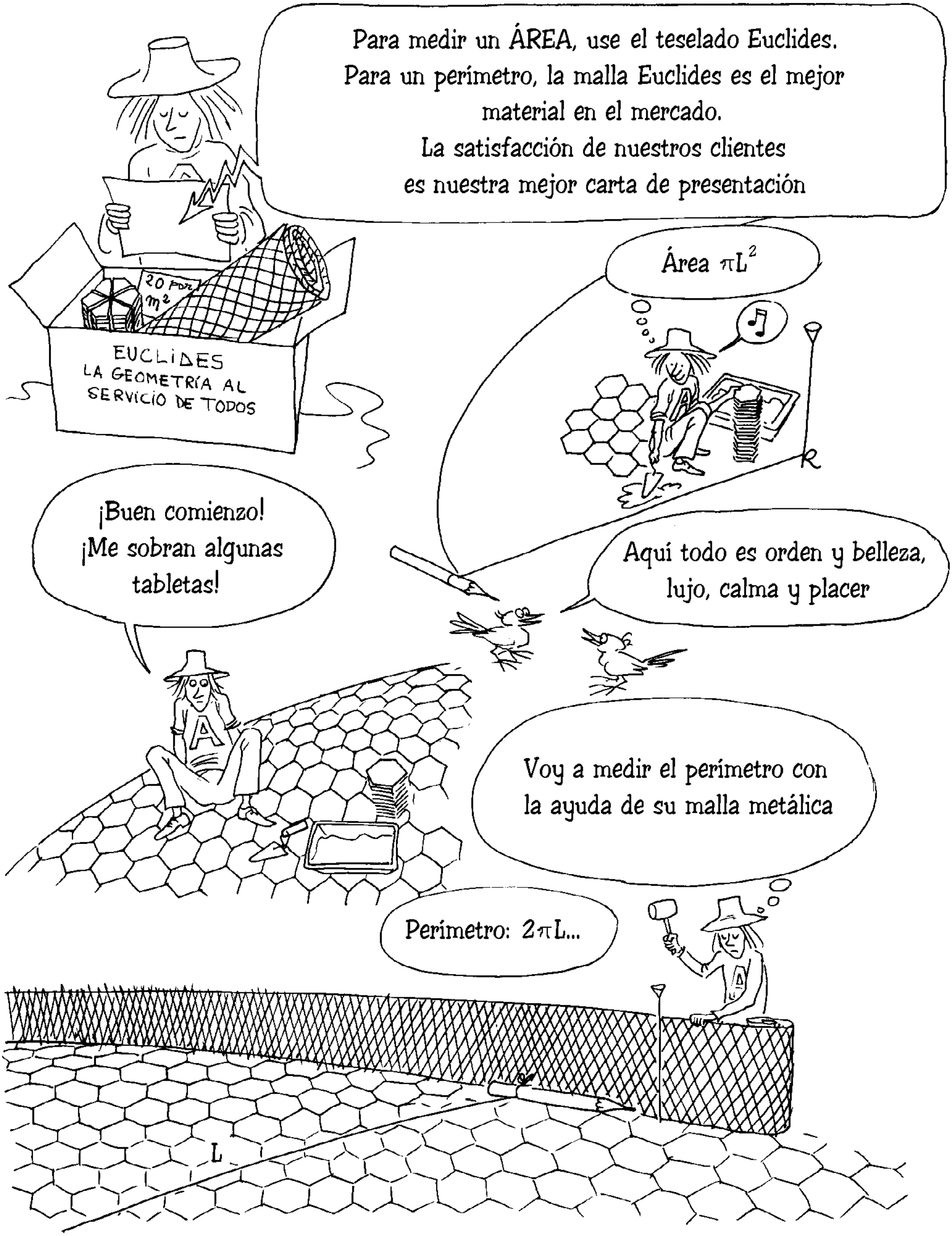


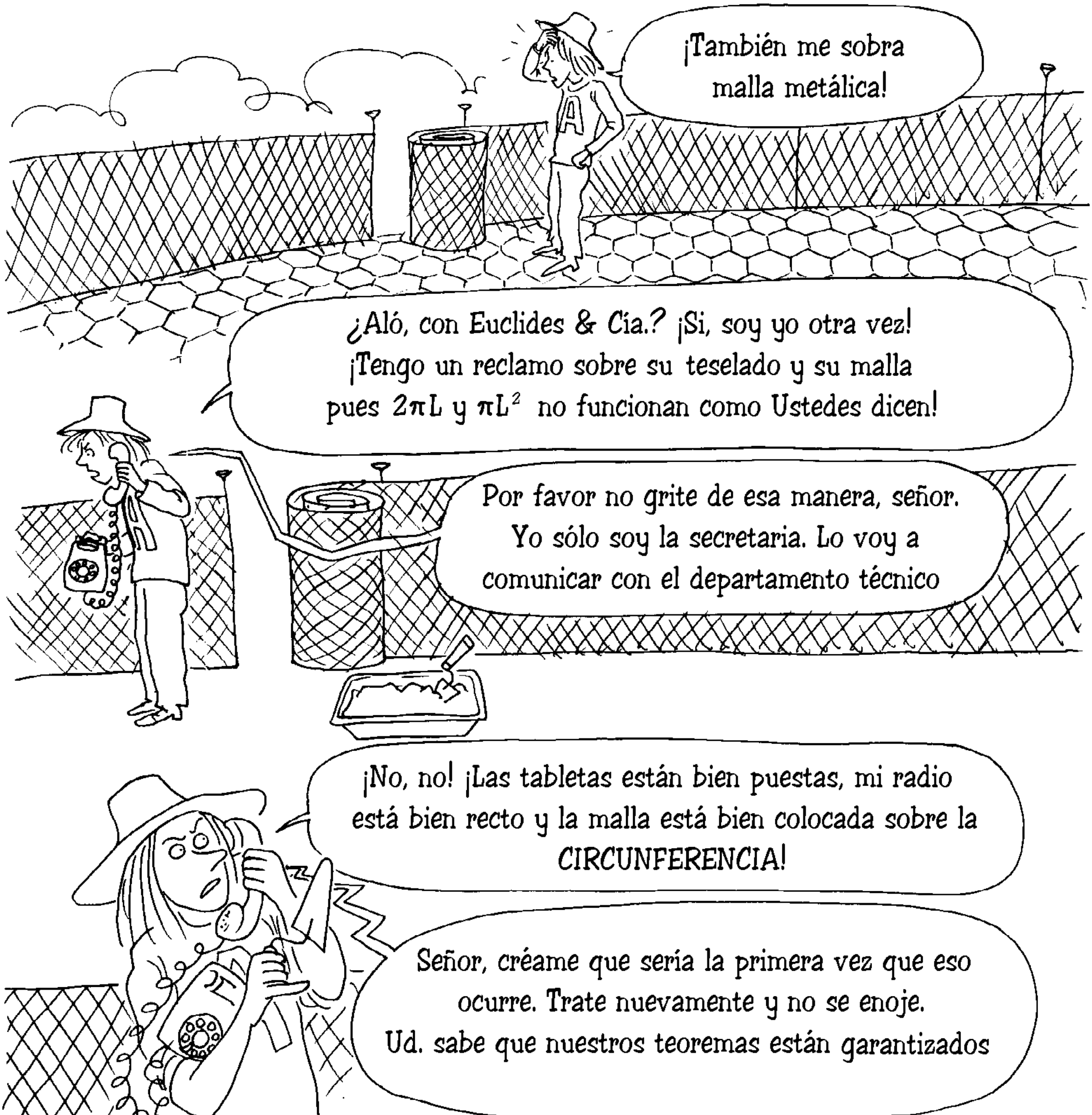
Y entonces...

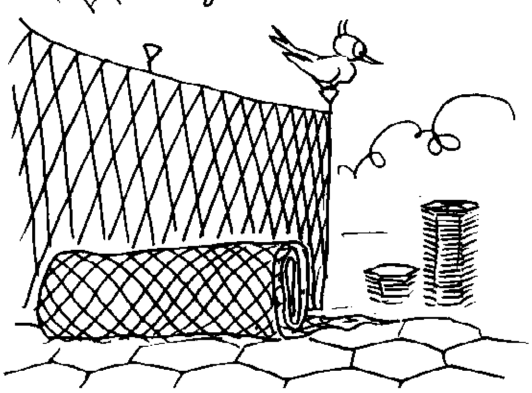
¡La RECTA de Anselmo se cerraba sobre sí misma!


? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
Ensayemos con un teorema de la casa Euclides. Trazaré tres GEODÉSICAS de igual longitud y eso me dará un TRIÁNGULO con tres ángulos de 60° cada uno, y su suma 180°. Así está escrito en este folleto
B
60
60
60
A
C
Â + B̂ + Ĉ = 180°
Vamos a ver...
RATIO OMNIA VINCIT
A
B
A
Aquí está mi segundo vértice B. Para encontrar el tercero, sólo tengo que extender dos cuerdas más
¡Qué bella es la ciencia!
B
¡Vaya! ¡Los ángulos son iguales, pero miden cada uno más de 60°!
¿Algún problema?
A
C
¡Estoy seguro de que su suma da más de 180°!
GEOMETRÍA EUCLIDIANA
EUCLIDES
EUCLIDES

¡Con la ayuda de la regla sobre el suelo he verificado que las cuerdas eran realmente RECTAS!
EUCLIDES
¿Aló, con la firma Euclides? Mire, tengo algunas dificultades con su material
Un segundo, voy a transferir su llamada al servicio técnico
¿Problemas con nuestros triángulos? Increíble. ¿Por qué no ensaya Ud. con nuestros círculos? Nuestros clientes están muy satisfechos con ellos
... Entonces un círculo es el conjunto de puntos que se encuentran a una misma distancia L de un punto fijo
¿Dice que el perímetro es $2\pi L$, y el área πL^2? Listo, lo tengo
L
Siempre a sus órdenes


Para medir un ÁREA, use el teselado Euclides. Para un perímetro, la malla Euclides es el mejor material en el mercado. La satisfacción de nuestros clientes es nuestra mejor carta de presentación
20 por m²
EUCLIDES LA GEOMETRÍA AL SERVICIO DE TODOS
Área πL²
¡Buen comienzo! ¡Me sobran algunas tabletas!
Aquí todo es orden y belleza, lujo, calma y placer
Voy a medir el perímetro con la ayuda de su malla metálica
Perímetro: 2πL...
L

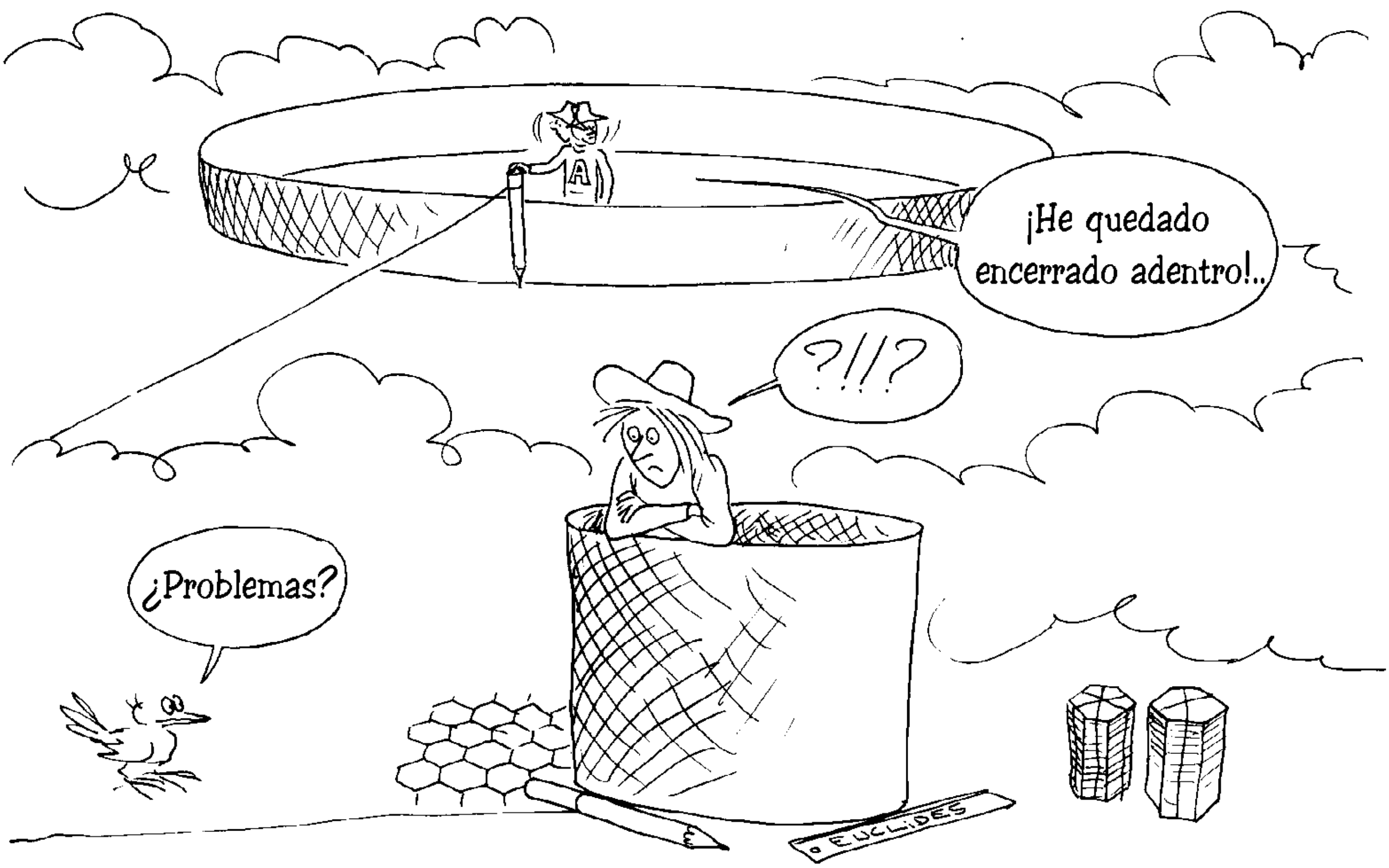




Anselmo continuó con su exploración, aumentando cada vez el radio L de su círculo. Pero las discrepancias se hacían cada vez más importantes.

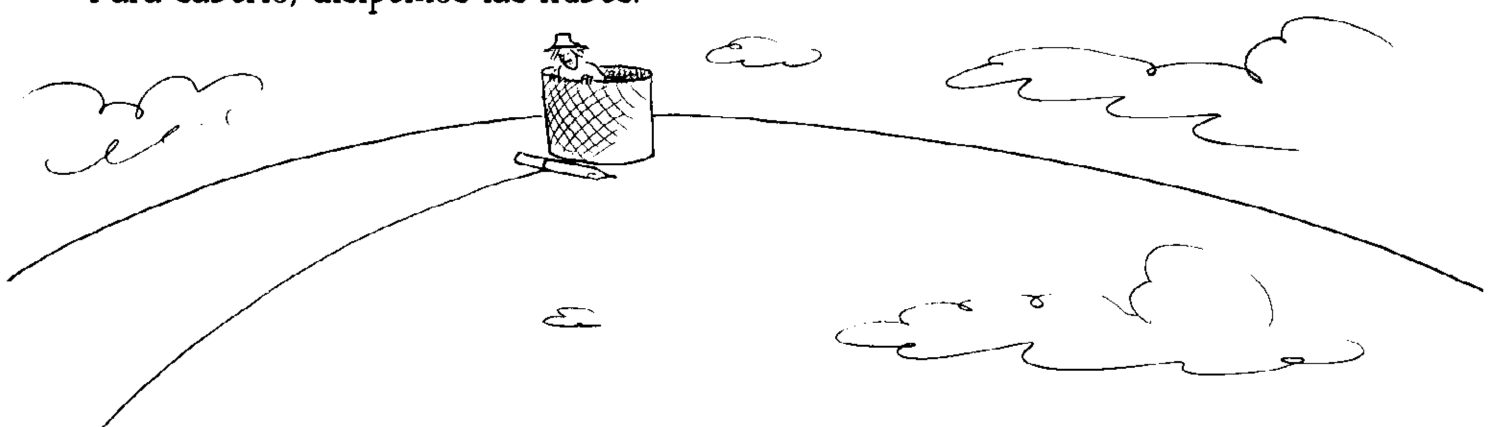
¡Rayos! ¡Tengo ahora 36% más de malla y 19% más de tabletas y el círculo que he trazado se ha convertido... en una RECTA!
¿Estoy soñando, o qué?
¡Por todos los cielos que esta regla está bien RECTA!
EUCLIDES
Anselmo aumenta una vez más el radio L, y esta vez...
EUCLIDES
¡La curvatura de mi círculo se ha invertido!
¡Y ahora, cuando AUMENTO el radio L, el PERÍMETRO disminuye! ¡Es cosa de locos!

Después de un último ensayo de pavimentación:

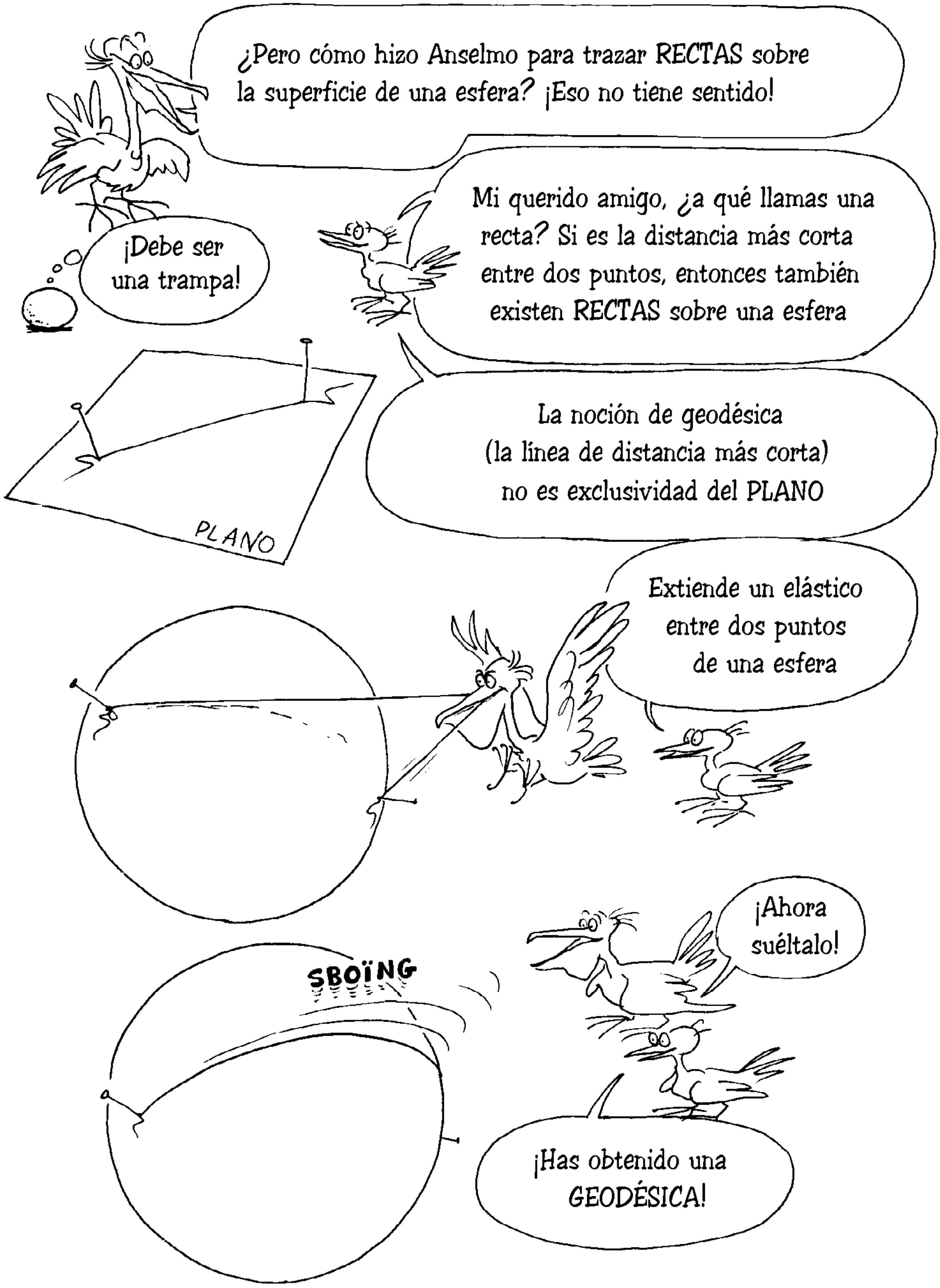


¿QUÉ FUE LO QUE PASÓ?

Para saberlo, disipemos las nubes.

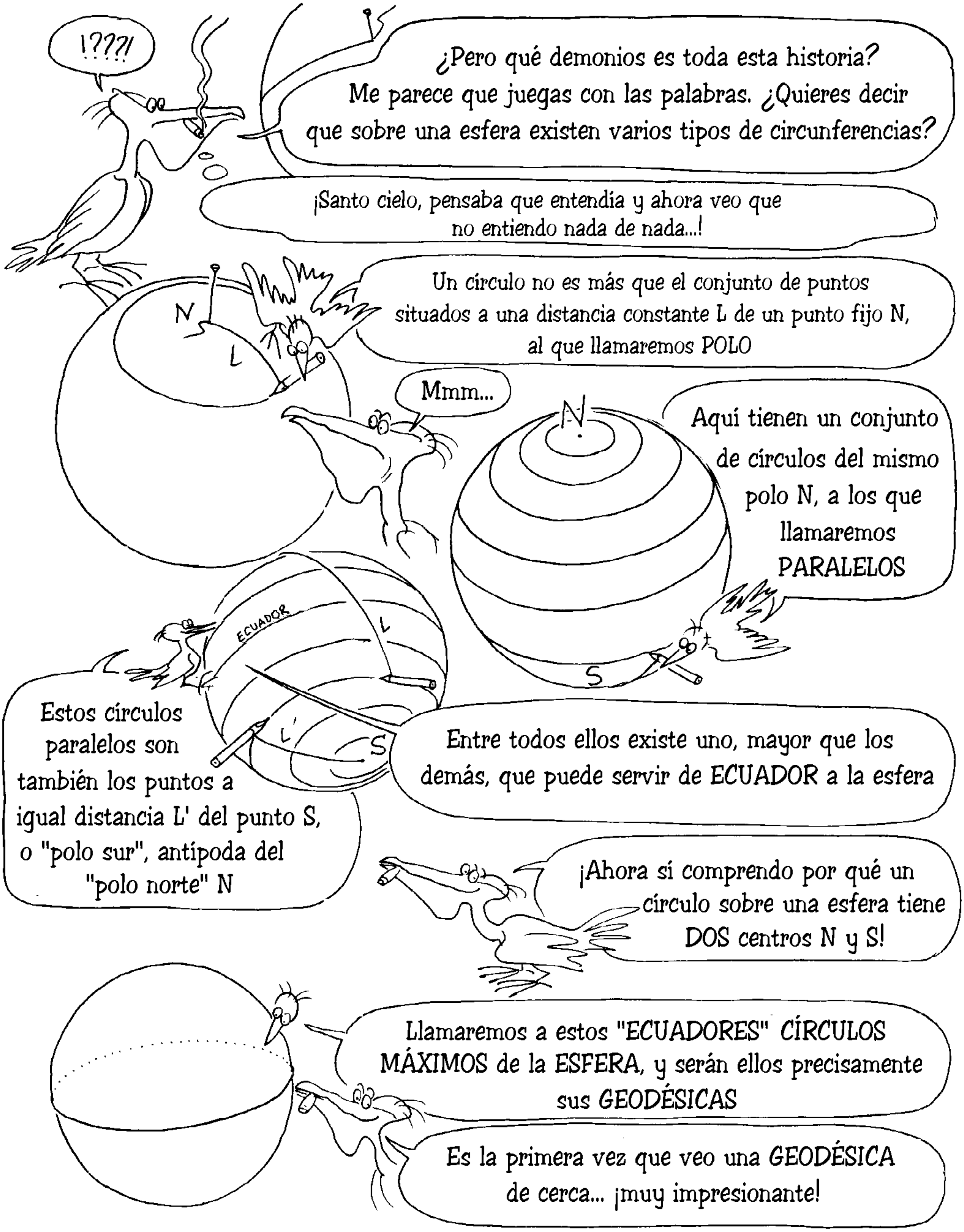


Anselmo se dá cuenta enseguida de que está sobre una esfera, a la que ha aplicado las reglas de la GEOMETRÍA del PLANO.

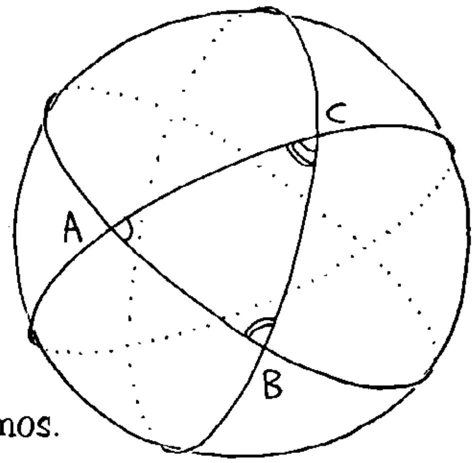


¿Pero cómo hizo Anselmo para trazar RECTAS sobre la superficie de una esfera? ¡Eso no tiene sentido!
¡Debe ser una trampa!
Mi querido amigo, ¿a qué llamas una recta? Si es la distancia más corta entre dos puntos, entonces también existen RECTAS sobre una esfera
La noción de geodésica (la línea de distancia más corta) no es exclusividad del PLANO
PLANO
Extiende un elástico entre dos puntos de una esfera
SBOÏNG
¡Ahora suéltalo!
¡Has obtenido una GEODÉSICA!


¿De qué me estás hablando? ¡Esa cosa no es una RECTA!
¡Pues toma esta regla y verifícalo tú mismo!
¿A esto le llamas una regla?
Es una REGLA para SUPERFICIES. Mira, en el PLANO funciona muy bien. No permite torcerse ni a la derecha ni a la izquierda
PLANO
Vaya si es extraña tu regla...
El hecho está en que cuando Anselmo traza su geodésica, ésta se cierra sobre sí misma. ¿Entonces las geodésicas en una esfera no son otra cosa que circunferencias?
Todas las líneas más cortas entre dos puntos sobre una esfera son partes de curvas geodésicas cerradas, las cuales son circunferencias trazadas sobre la esfera. ¡Pero no cualquier tipo de circunferencia!

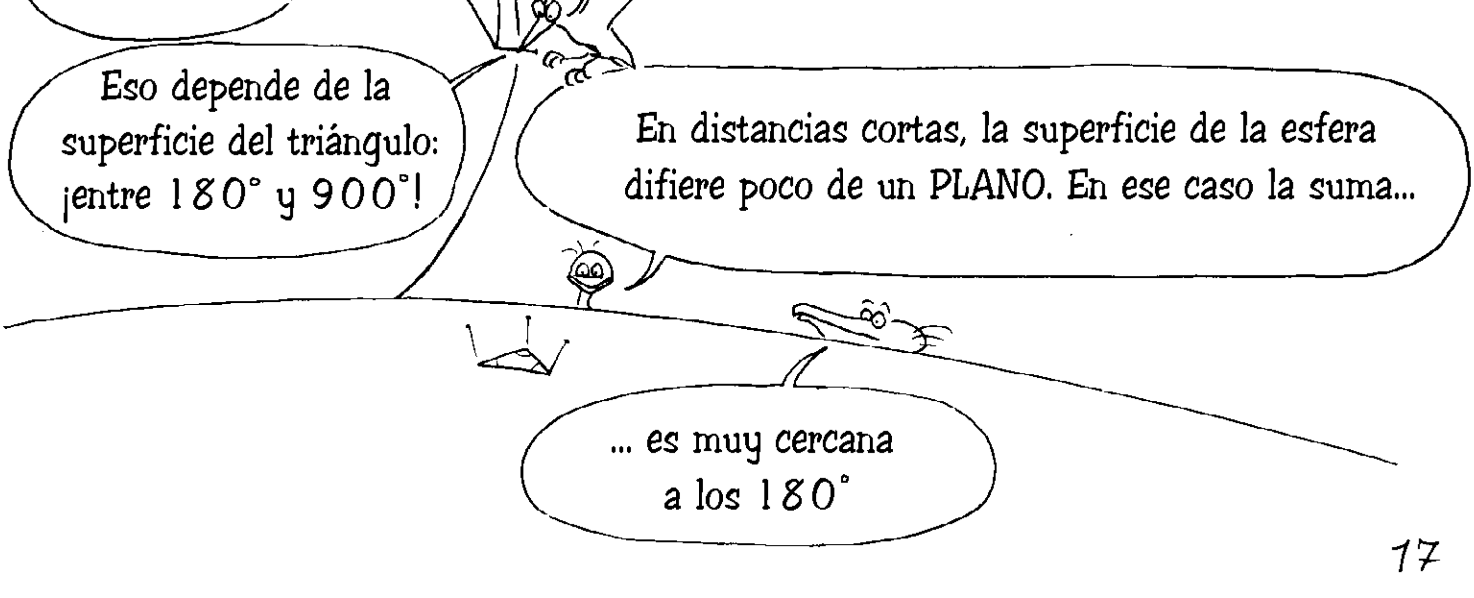


!???!
¿Pero qué demonios es toda esta historia? Me parece que juegas con las palabras. ¿Quieres decir que sobre una esfera existen varios tipos de circunferencias?
¡Santo cielo, pensaba que entendía y ahora veo que no entiendo nada de nada...!
N
L
Un círculo no es más que el conjunto de puntos situados a una distancia constante L de un punto fijo N, al que llamaremos POLO
Mmm...
N
Aquí tienen un conjunto de círculos del mismo polo N, a los que llamaremos PARALELOS
S
ECUADOR
L
L'
S
Estos círculos paralelos son también los puntos a igual distancia L' del punto S, o "polo sur", antípoda del "polo norte" N
Entre todos ellos existe uno, mayor que los demás, que puede servir de ECUADOR a la esfera
¡Ahora sí comprendo por qué un círculo sobre una esfera tiene DOS centros N y S!
Llamaremos a estos "ECUADORES" CÍRCULOS MÁXIMOS de la ESFERA, y serán ellos precisamente sus GEODÉSICAS
Es la primera vez que veo una GEODÉSICA de cerca... ¡muy impresionante!



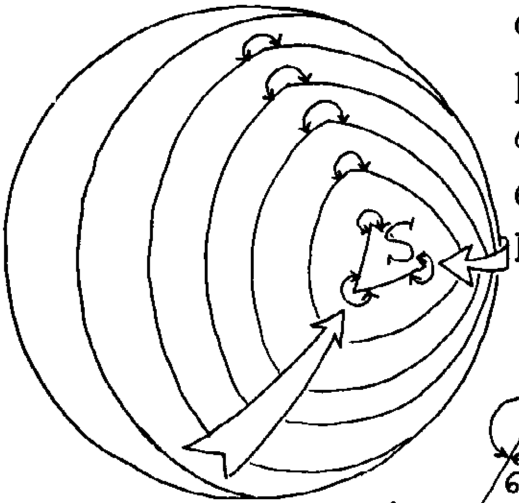
Un TRIÁNGULO estará formado por tres arcos extraídos, inevitablemente, de tres círculos máximos.

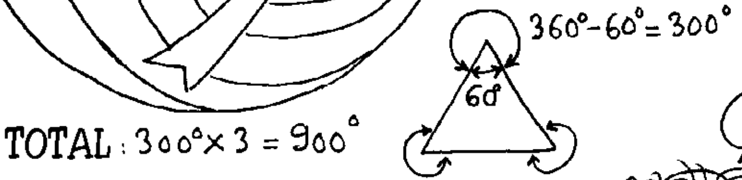
Se pueden materializar estos triángulos con la ayuda de cinta adhesiva o de elásticos y medir los ángulos poniendo un goniómetro en cada vértice sobre la superficie de la esfera.

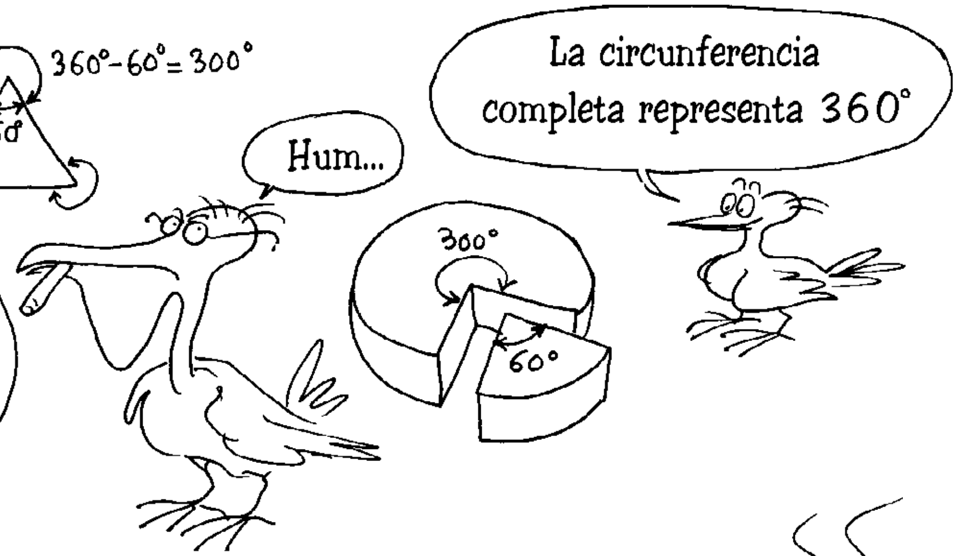


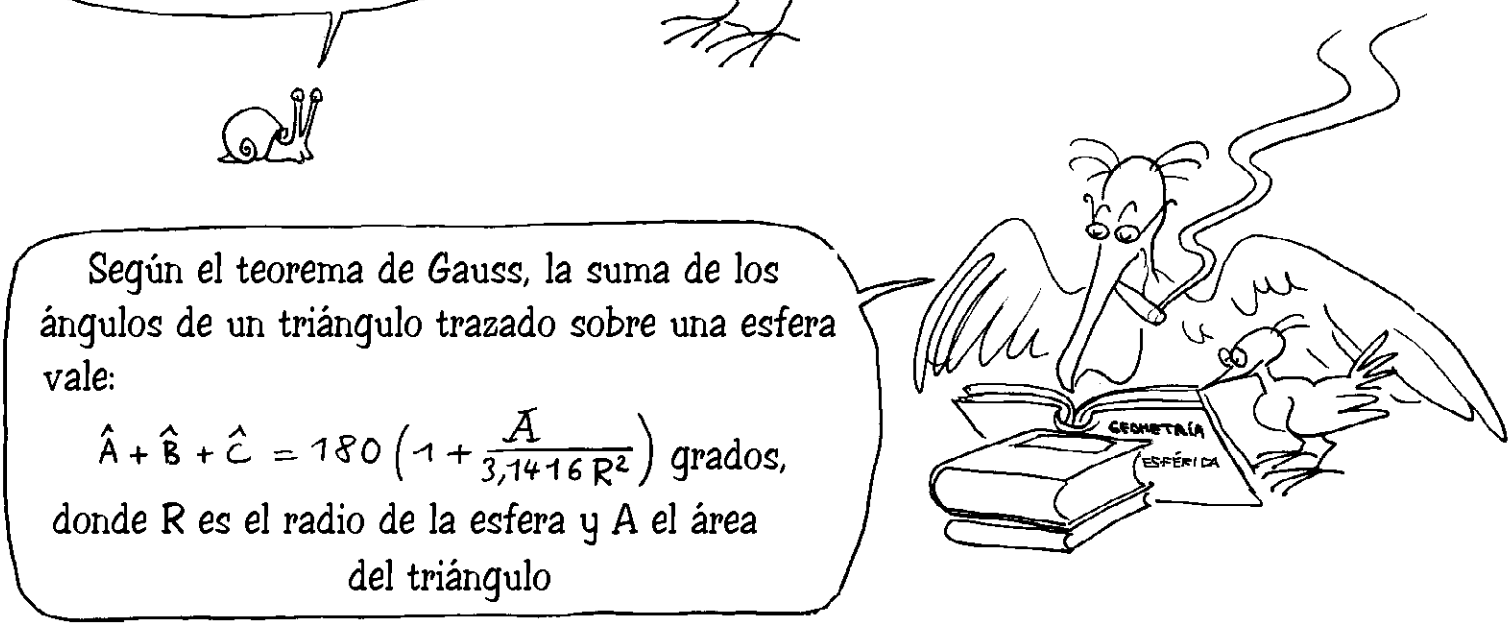

A
B
C
He aquí un triángulo que se puede materializar, por ejemplo, con la ayuda de tres pedazos de elástico
90°
90°
90°
Triángulo que será, entonces, trirectángulo y equilátero
Un triángulo algo particular pues ocupa un octavo de la superficie de la esfera
Y la suma de sus ángulos Â, B̂, Ĉ vale 270°
!!?!
¡Todavía no has visto todo!
Imaginemos ahora un triángulo, formado siempre con los mismos elásticos, en el que progresivamente alejamos los vértices. Los ángulos en estos vértices comenzarán a crecer, lo mismo que su suma.
N
180°!
Al final se puede hacer que los vértices se inscriban en un ecuador de la esfera.
¡En este caso los ángulos Â, B̂ y Ĉ son PLANOS, y su suma alcanza los 540°!!...

Continuando con el alejamiento de los vértices en el otro hemisferio, el triángulo va a converger hacia el punto S, antípoda de N. ¡Si se conserva la definición de partida de los ángulos en los vértices, resultará entonces que cada uno de ellos valdrá más de 180°! Para ser precisos, cada uno medirá 360°-60°= 300°.



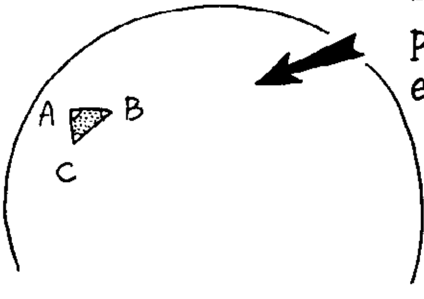


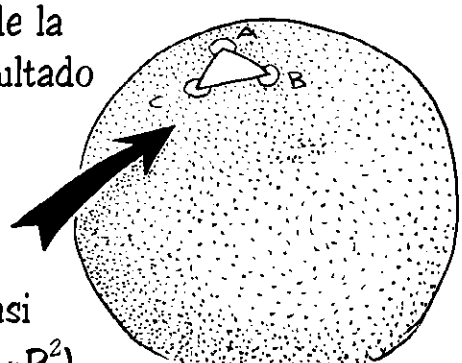




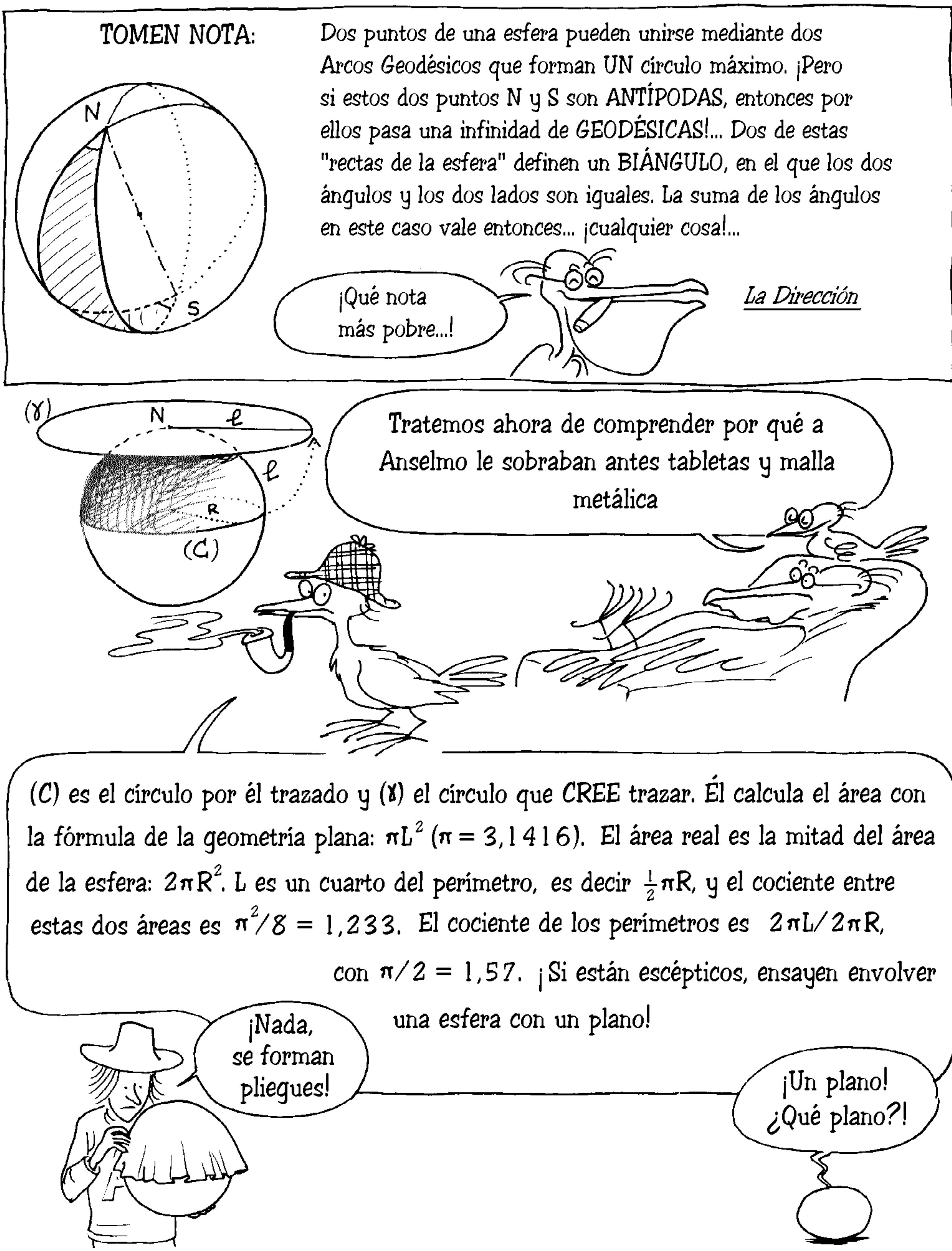
Si el triángulo tiene un área pequeña (comparada con la de la esfera), reencontramos el resultado de Euclides:

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°)$$

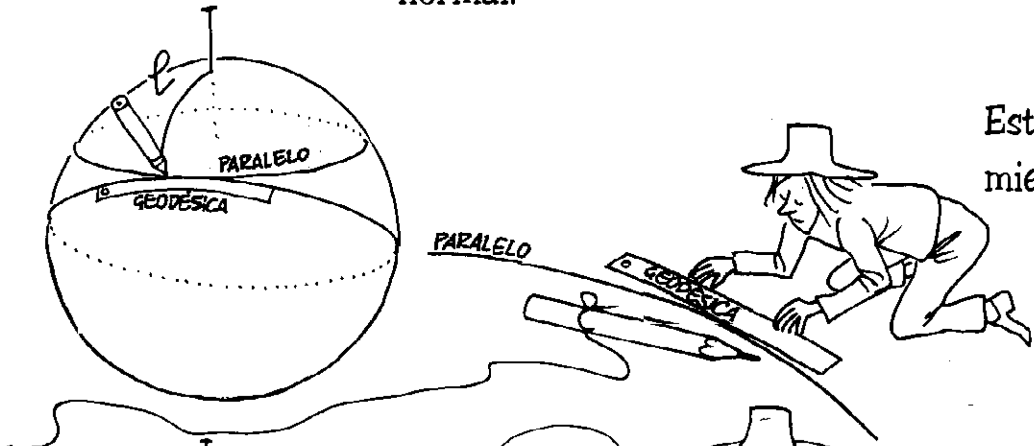




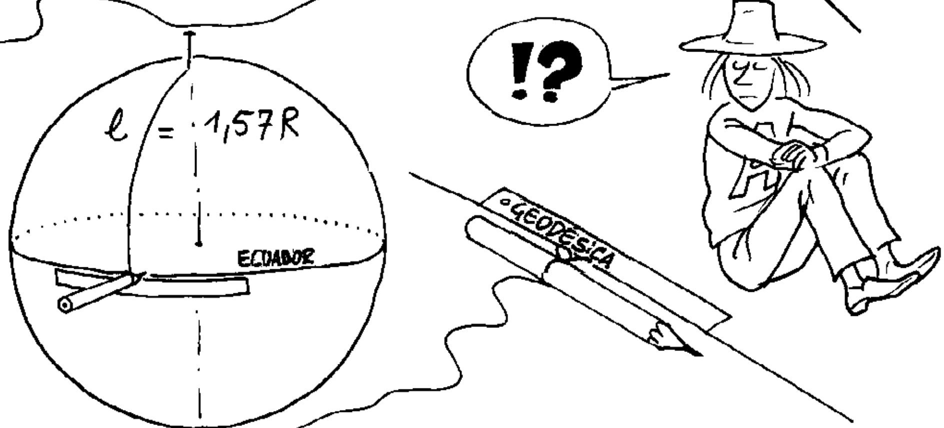
Si, por el contrario, el triángulo tiene casi igual superficie a la esfera ($4 \times 3{,}1416 \times R^2$), volvemos a los 900°.


TOMEN NOTA:
Dos puntos de una esfera pueden unirse mediante dos Arcos Geodésicos que forman UN círculo máximo. ¡Pero si estos dos puntos N y S son ANTÍPODAS, entonces por ellos pasa una infinidad de GEODÉSICAS!... Dos de estas "rectas de la esfera" definen un BIÁNGULO, en el que los dos ángulos y los dos lados son iguales. La suma de los ángulos en este caso vale entonces... ¡cualquier cosa!...
N
S
¡Qué nota más pobre...!
La Dirección
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Tratemos ahora de comprender por qué a Anselmo le sobraban antes tabletas y malla metálica
(C) es el círculo por él trazado y (γ) el círculo que CREE trazar. Él calcula el área con la fórmula de la geometría plana: πL^2 ($\pi = 3,1416$). El área real es la mitad del área de la esfera: $2\pi R^2$. L es un cuarto del perímetro, es decir $\frac{1}{2}\pi R$, y el cociente entre estas dos áreas es $\pi^2/8 = 1,233$. El cociente de los perímetros es $2\pi L/2\pi R$, con $\pi/2 = 1,57$. ¡Si están escépticos, ensayen envolver una esfera con un plano!
¡Nada, se forman pliegues!
¡Un plano! ¿Qué plano?!

Hasta que Anselmo no alcanza el ecuador de la esfera, la CONCAVIDAD de su círculo le parece normal.

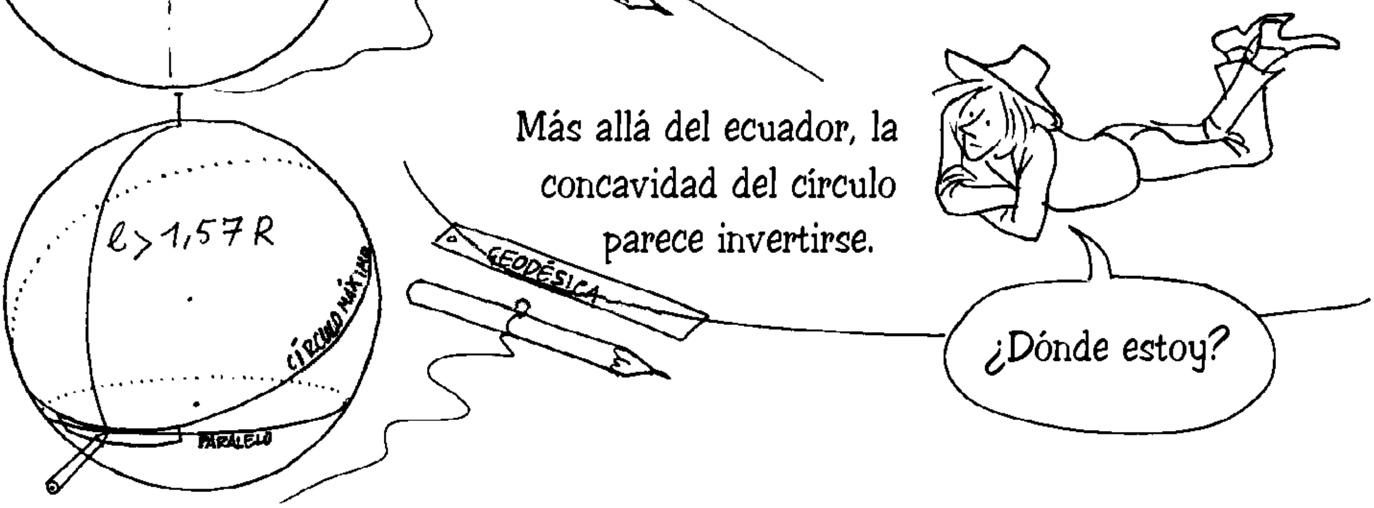


Este círculo es un paralelo, mientras que su regla sigue una GEODÉSICA, es decir un CÍRCULO MÁXIMO de la esfera.

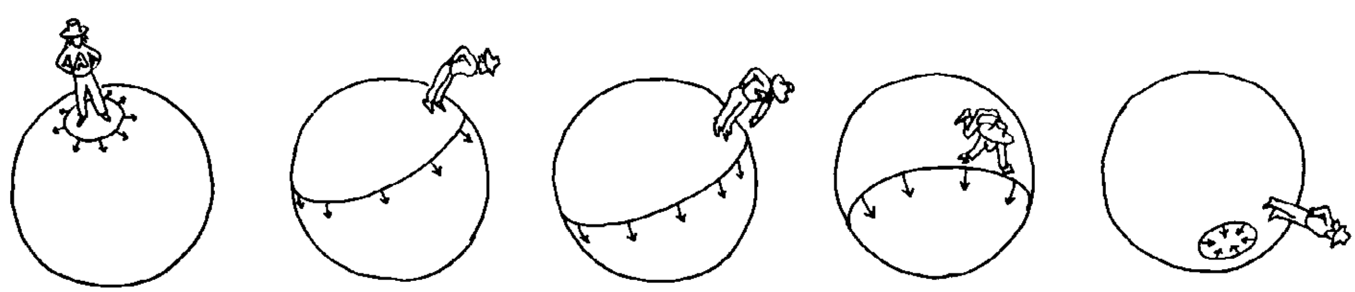


En el ecuador, es decir cuando L = $\frac{\pi}{2}$R, el paralelo se confunde con la geodésica y el círculo parece "RECTO".

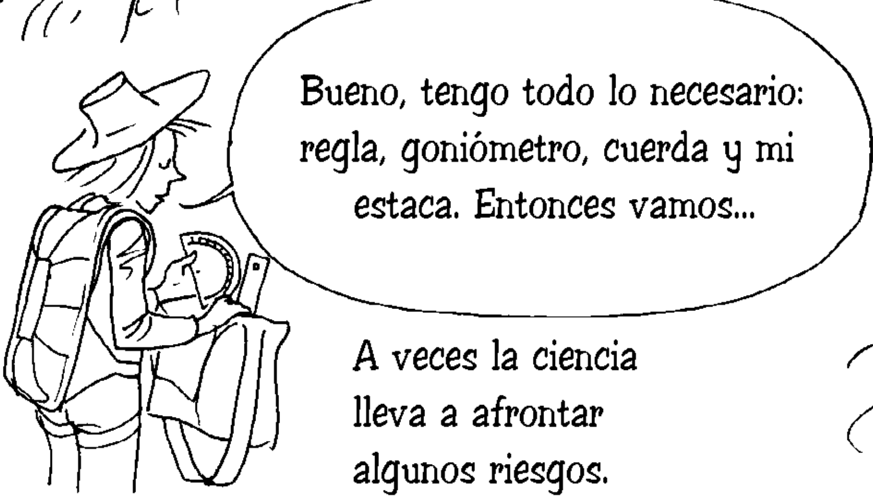
Más allá del ecuador, la concavidad del círculo parece invertirse.



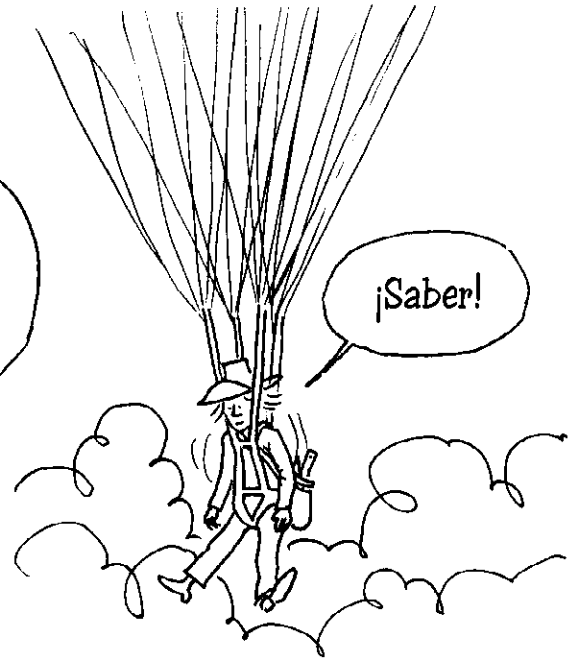
Esta propiedad explica cómo se puede "entrar" o "salir" a voluntad de un círculo, sin atravesarlo, cuando está trazado sobre una esfera. Es necesario imaginar este círculo como un anillo elástico que se hace deslizar sobre una bola de billar.



A Anselmo le tomó un poco de tiempo digerir todas estas cosas, descubiertas por el matemático Gauss (1777-1855). Luego decidió partir al descubrimiento del mundo de las SUPERFICIES:



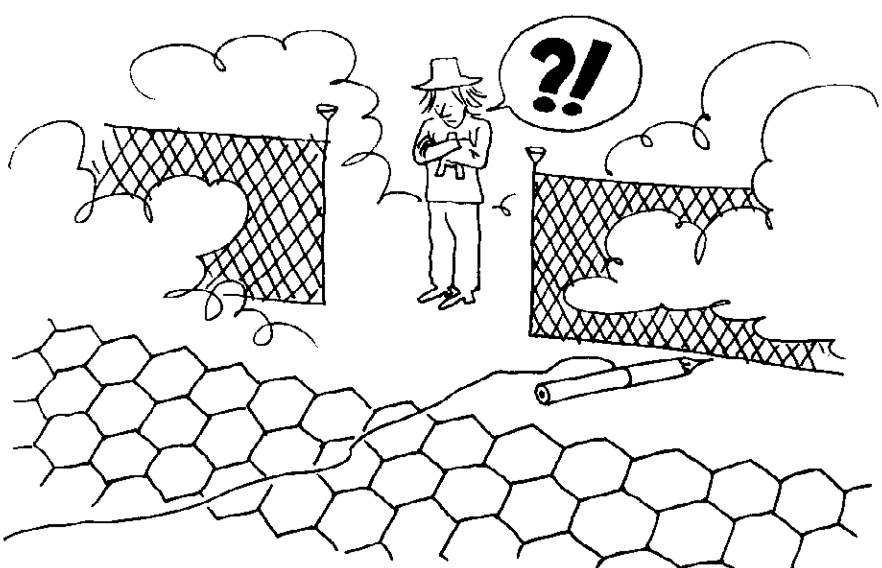
A veces la ciencia lleva a afrontar algunos riesgos.



Aterrizado en un mundo nuevo, Anselmo desenrolla una nueva GEODÉSICA. Pero esta vez...

... la geodésica ya no se cierra.

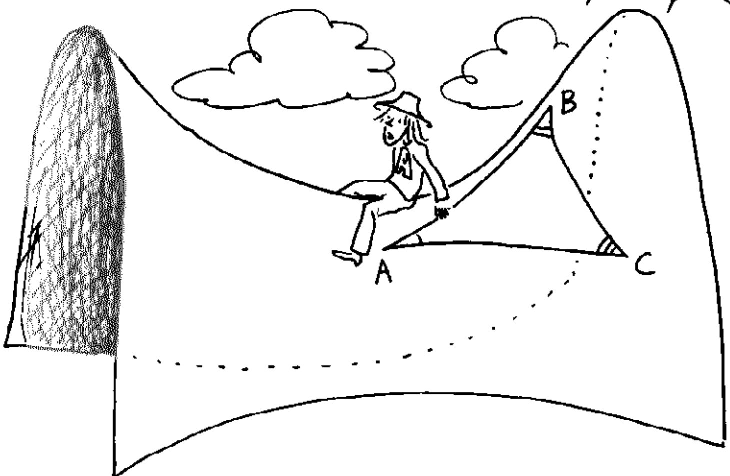
Con la ayuda de tres cuerdas bien tensas, Anselmo construye un triángulo, pero en esta ocasión la suma de los ángulos en los vértices resulta inferior a 180°.

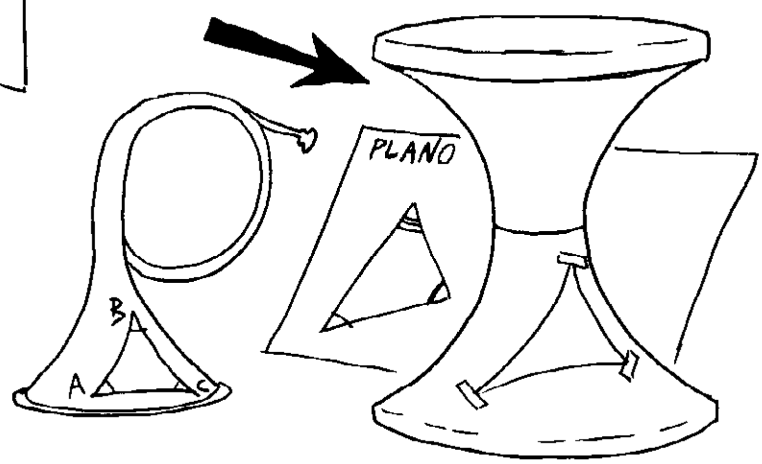


Puesto que un círculo es siempre el conjunto de puntos colocados a una misma distancia L de un punto dado, Anselmo constata que el círculo trazado sobre esta nueva superficie tiene un perímetro MAYOR que $2\pi L$, y un área MAYOR que πL^2.

Disipemos ahora las nubes:

Esta vez la superficie presenta la forma de un paso de montaña o de una silla de montar a caballo; o, para citar objetos de uso en la vida cotidiana, de un corno de caza o de un taburete como éste:





CURVATURA:

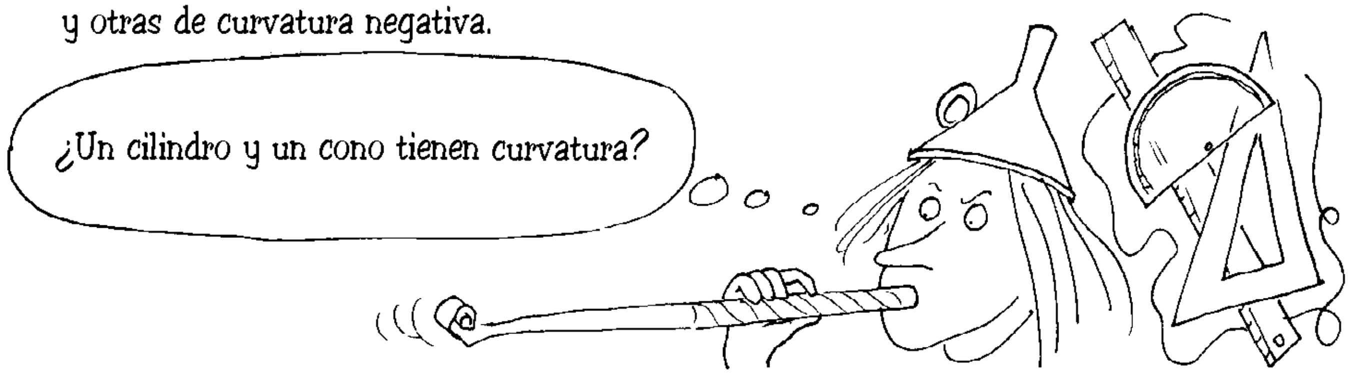
Una superficie curva es una superficie en la que los teoremas euclidianos no funcionan. La curvatura puede ser positiva o negativa.

Sobre una superficie de CURVATURA POSITIVA, la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 180°. Si se traza un círculo de radio L, el área de su superficie es menor que πL^2 y su perímetro es menor que $2\pi L$.

Sobre una superficie de CURVATURA NEGATIVA, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°. Si se traza un círculo de radio L, el área de su superficie es mayor que πL^2 y su perímetro es mayor que $2\pi L$.

Poco antes Anselmo había constatado, tratando de RECUBRIR una esfera, superficie de curvatura positiva, con un elemento plano, que se formaban pliegues. Así mismo, es imposible envolver con un plano una superficie de curvatura negativa: se forman en ese caso especies de jirones. Esta prueba del embalaje es la manera más sencilla de establecer si una curvatura es positiva o negativa.

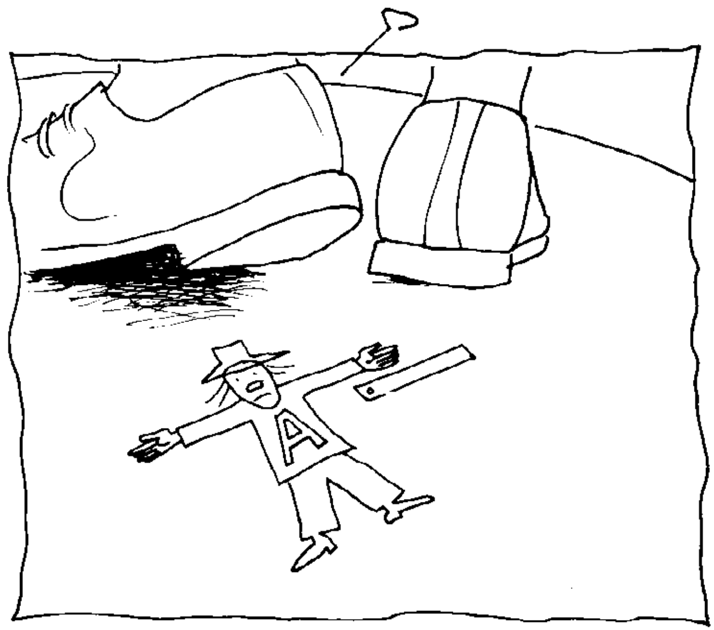
Tal como se puede apreciar en la página anterior, las superficies pueden presentar regiones de curvatura positiva y otras de curvatura negativa.



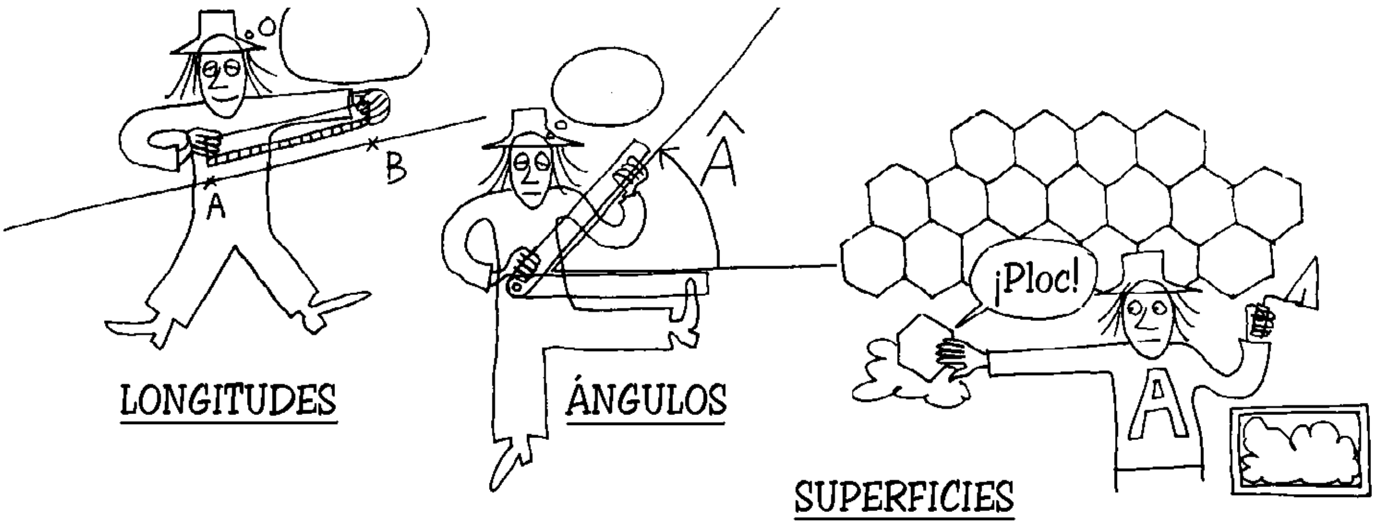

Prueba del embalaje
¡Caray, un cilindro y un cono se dejan recubrir con un plano!
Nada de pánico. Con la ayuda de cinta adhesiva fijo tres elásticos, es decir tres geodésicas, sobre el cilindro...
Ahora marco las geodésicas sobre la superficie...
... y extiendo el cilindro hasta formar un PLANO
!...
Según nuestra definición, los cilindros y los conos, que obedecen a la geometría EUCLIDIANA, son ¡SUPERFICIES PLANAS!!!

LA NOCIÓN DE ESPACIO:

Hace poco las nubes le impedían a Anselmo ver más allá de su propia nariz... o casi. Difícilmente habría podido darse cuenta de la CURVATURA de su ESPACIO ESFÉRICO. Hay otra forma de impedir que Lanturly observe esta CURVATURA: hacerlo yacer sobre la superficie, formando PARTE de ésta.



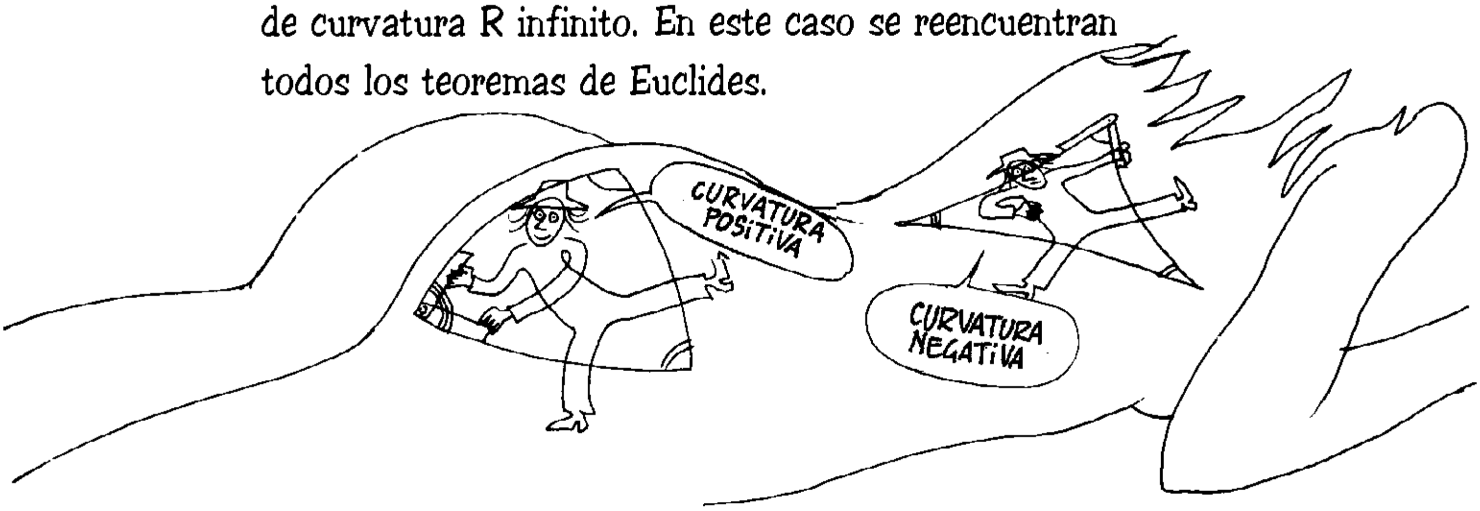
Nótese que en esta nueva situación nada impide las mediciones de:



Aún confinado EN la superficie, Anselmo habría podido perfectamente constatar la curvatura, definir su signo (positiva o negativa) y hasta medirla, a pesar de no poder observarla. Si la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, entonces la superficie es PLANA. Si la suma supera 180°, la curvatura es positiva y Anselmo puede calcular el radio de curvatura R usando la fórmula: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3,14\,R^2}\right)$ grados, donde A es el área del triángulo.

Si la suma es menor que 180°, se puede definir un radio de curvatura R dado por $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 - \frac{A}{3,14\,R^2}\right)$, pero este no tiene el sentido físico usual.

Nótese que un PLANO puede ser asimilado a una superficie con un radio de curvatura R infinito. En este caso se reencuentran todos los teoremas de Euclides.

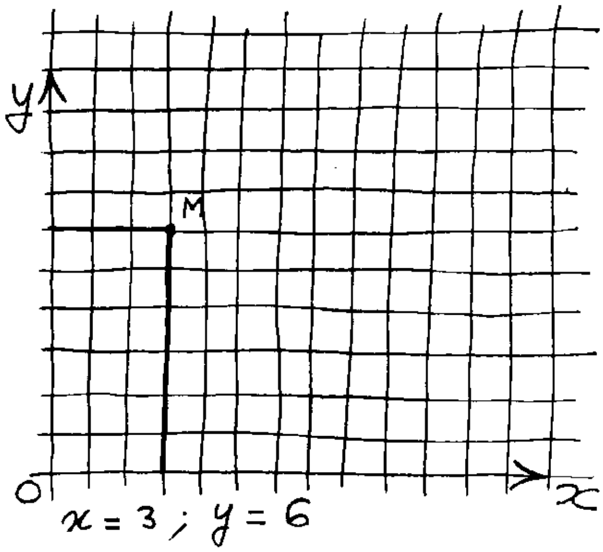


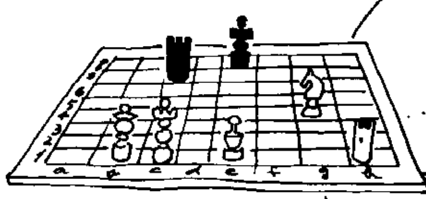
EL CONCEPTO DE DIMENSIÓN

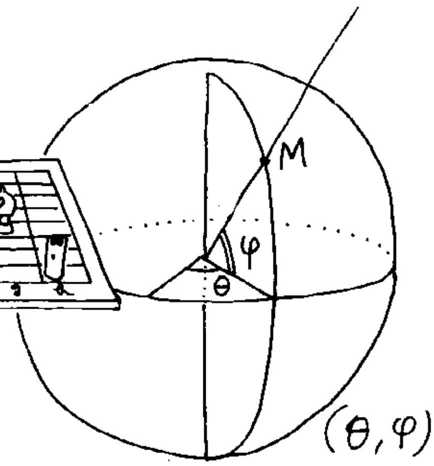
El número de dimensiones es simplemente el número de cantidades o de coordenadas que es necesario suministrar, en un espacio cualquiera, para definir un PUNTO.

Las superficies son representaciones de espacios en dos dimensiones.

Las cantidades que sirven para definirlas pueden ser longitudes, números, ángulos...

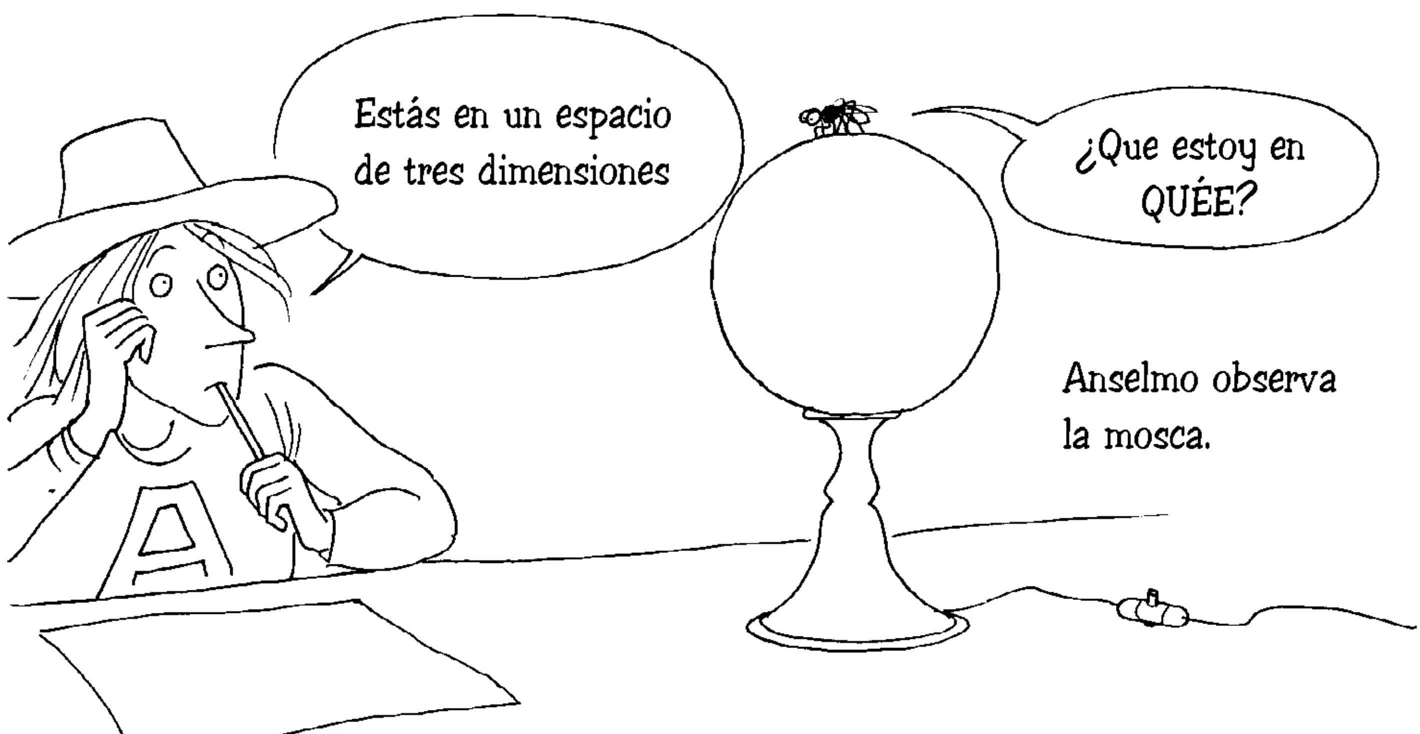


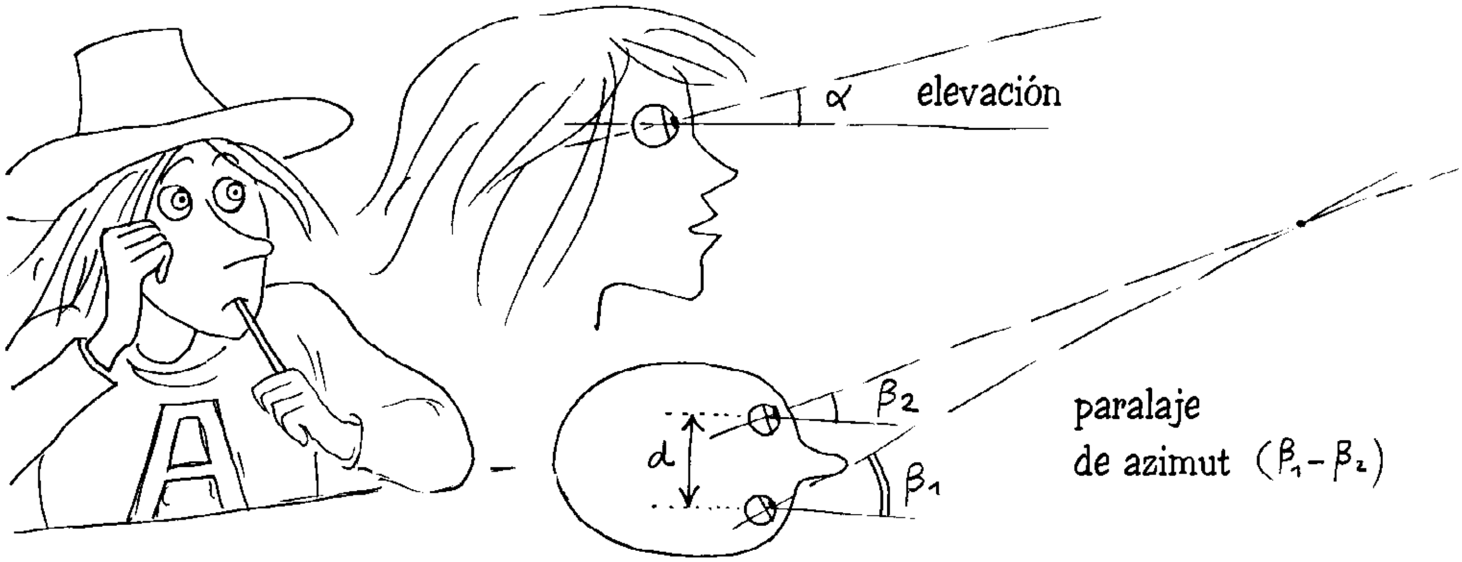

Caballo en g4



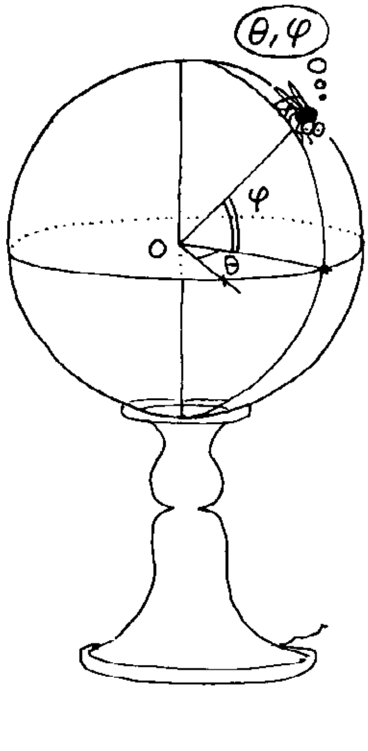
Longitud, latitud

Solemos decir que nuestro espacio, si hacemos caso omiso del tiempo, tiene tres dimensiones.



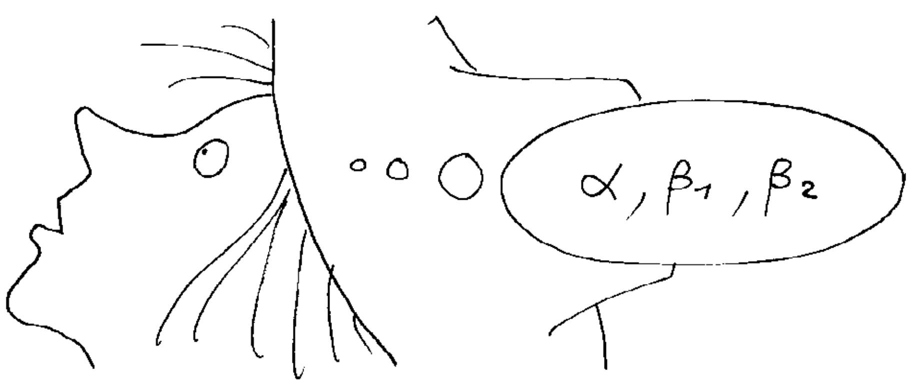


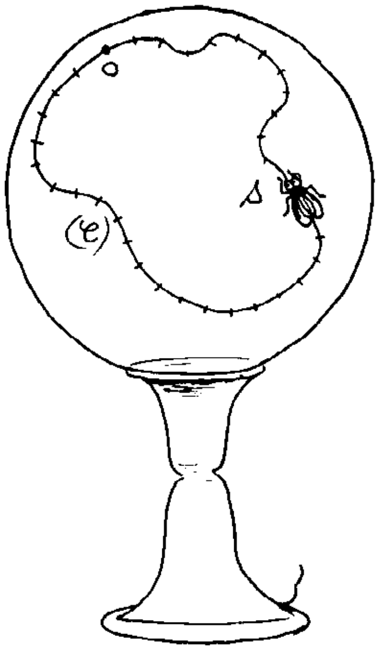
Anselmo posiciona los objetos en relación a su cuerpo y a su bóveda craneana. La posición de un objeto puntual es conocida con la ayuda de tres ÁNGULOS: su elevación α y las desviaciones azimutales β_1 y β_2 de sus dos ojos.
La diferencia angular $\beta_1 - \beta_2$ se denomina el paralaje.
En el cerebro de Anselmo se dá una decodificación que transforma este paralaje en distancia.



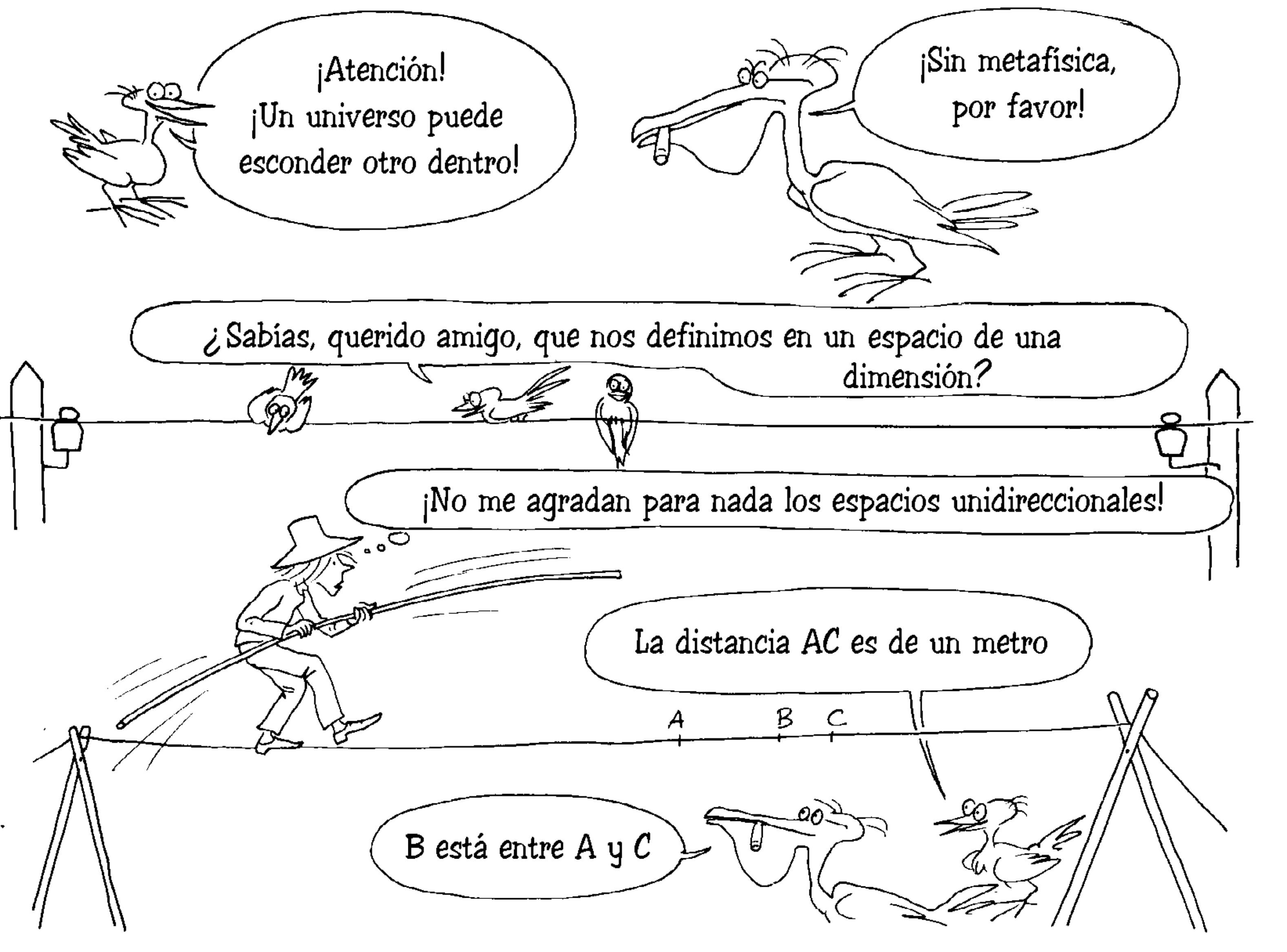
LA INMERSIÓN:

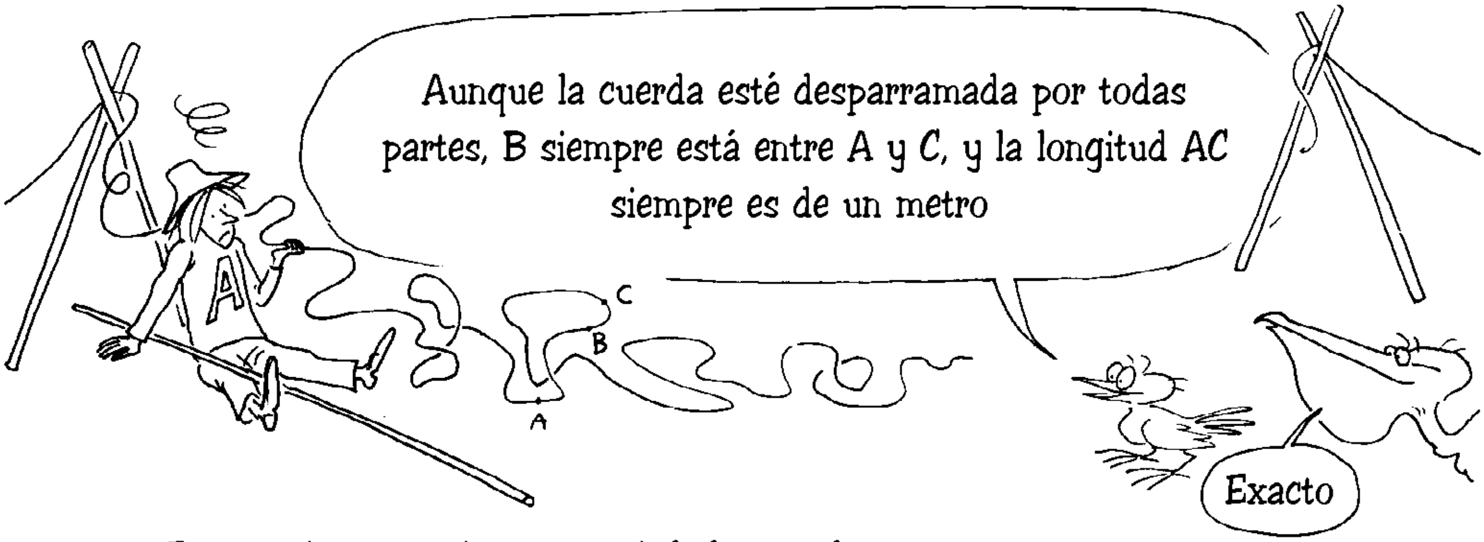
La mosca también puede moverse sobre el globo esférico de la lámpara. En este espacio bidimensional su posición puede ser especificada gracias a dos ángulos θ y φ (longitud y latitud).
Decimos que este espacio de dos dimensiones está INMERSO en nuestro espacio de tres dimensiones.



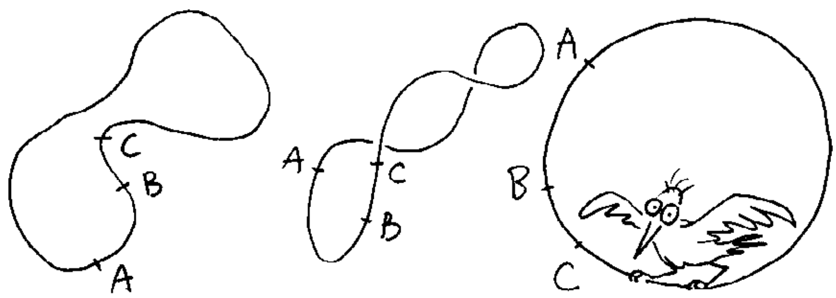


Supongamos que la mosca sigue una curva (𝒞) trazada sobre la esfera. Se podría establecer su posición con una sola coordenada (su distancia s a partir de un punto de origen, calculada algebraícamente).
Una curva es una representación de un espacio de UNA dimensión.
Este espacio unidimensional está inmerso en un espacio bidimensional (esfera), el cual a su vez está INMERSO en un espacio tridimensional.
El espacio en el que vivimos podría estar inmerso en un espacio de dimensión superior sin que tengamos consciencia de ello.





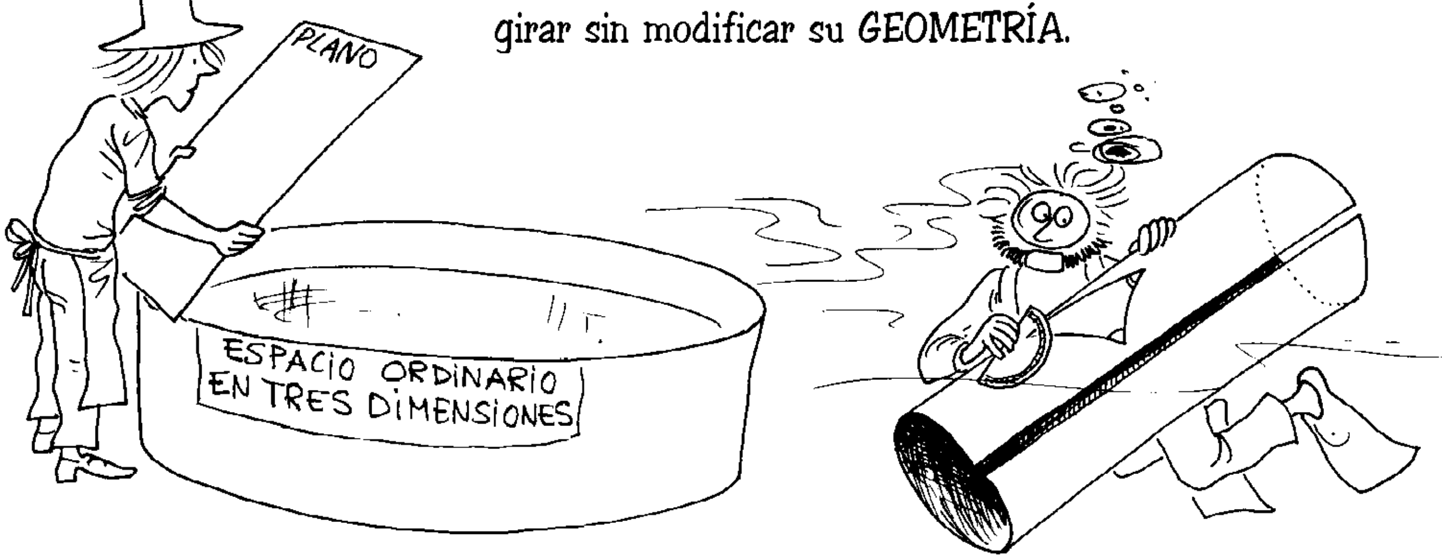
Esto sugiere que ciertas propiedades pueden ser independientes del modo en que se realiza la inmersión.



Aquí tienen diferentes formas de EMBEBER una CURVA CERRADA en el espacio habitual. La CLAUSURA es una propiedad independiente de la inmersión.

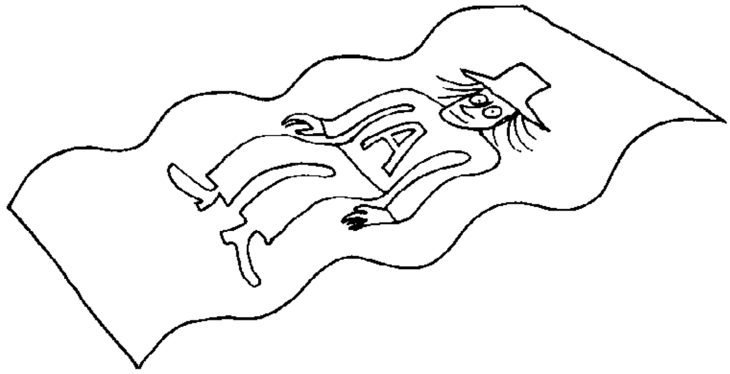
Nos hemos cuidado de no estirar o contraer la cuerda con el fin de no modificar las LONGITUDES entre dos puntos consecutivos. Ahora podemos intentar EMBEBER las superficies en el habitual espacio de tres dimensiones.

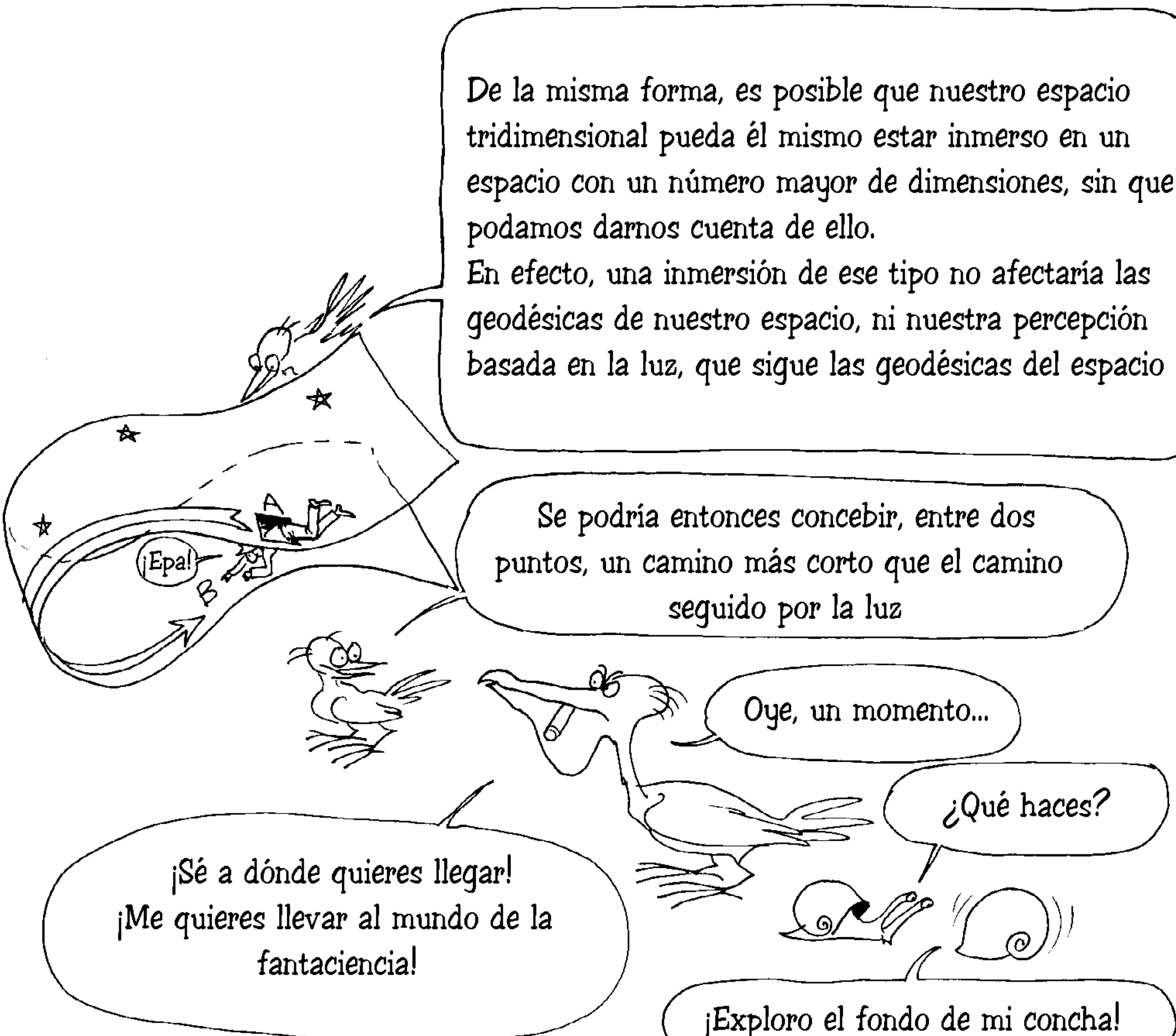
Si SUMERGIMOS un PLANO en el habitual espacio de tres dimensiones, podemos desplazarlo o hacerlo girar sin modificar su GEOMETRÍA.



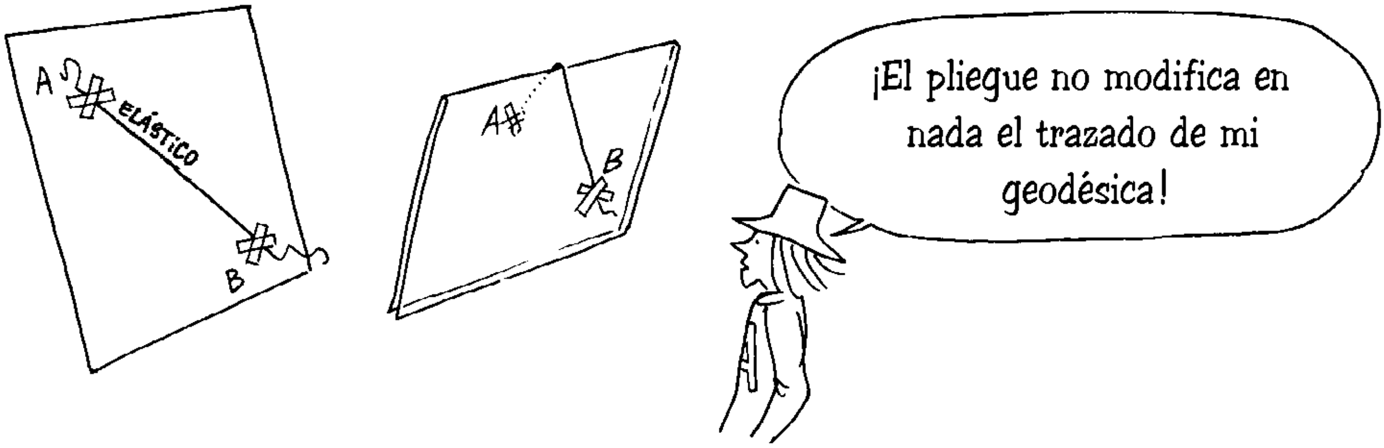
Hemos visto que el hecho de deformar un plano envolviendo un cilindro no modificaba ni las geodésicas ni los ángulos.

Desde este punto de vista, una lámina ondulada también tiene una geometría PLANA, EUCLIDIANA.
Un habitante de un tal espacio bidimensional y euclidiano no tendría consciencia alguna de traslaciones, rotaciones u ondulaciones, las cuales no serían otra cosa que variaciones en el modo de inmersión en el espacio tridimensional.

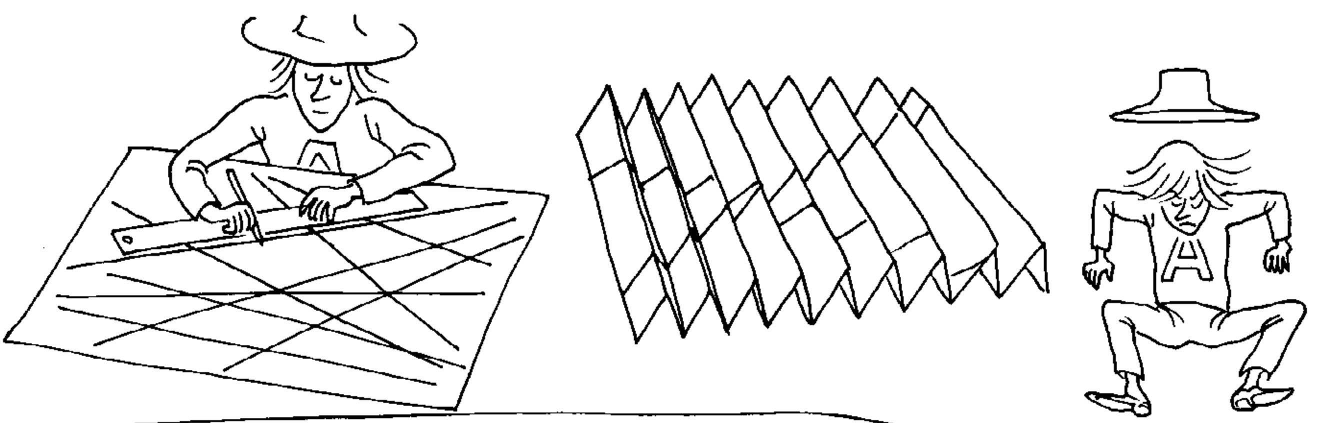




Tomemos un elemento de un plano y doblémoslo:



Sobre una hoja de papel, con la ayuda de una regla, tracen varias rectas geodésicas y luego hagan pliegues en la hoja. Verán siempre las geodésicas de la superficie, con o sin pliegues.



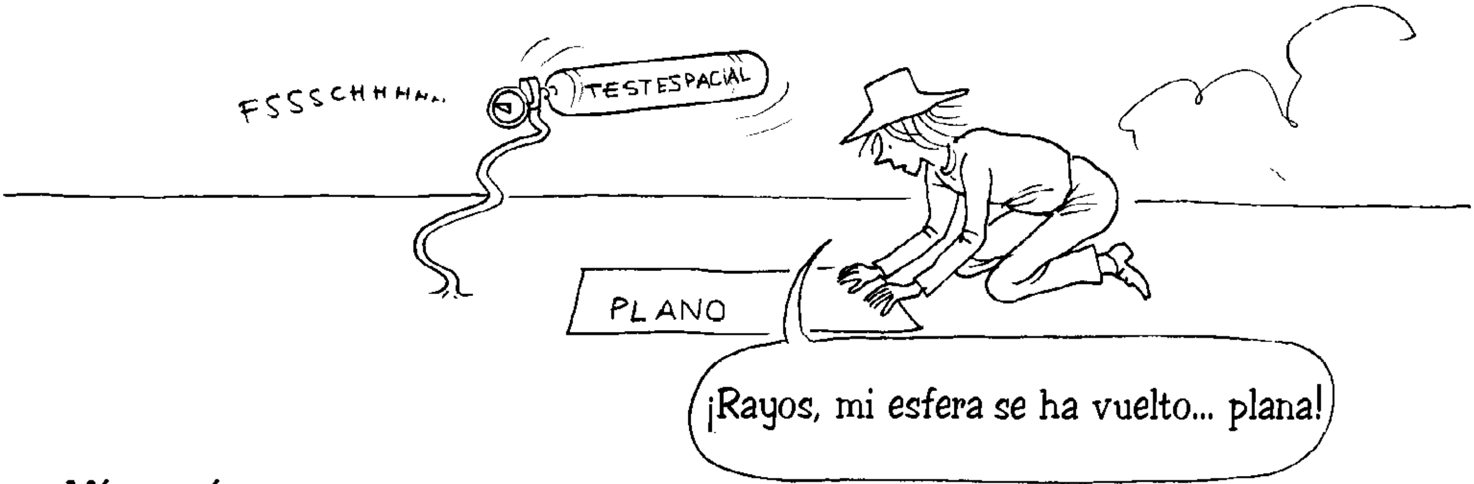

¿El señor Lanturly?
¡Así es!
Soy representante de la firma Euclides & Cia. Nos enteramos que tuvo Usted... estee... algunos inconvenientes con nuestro material
EUCLIDES Y Cia.
Traigo aquí nuevos artículos que le darán esta vez completa satisfacción
A ver
El futuro es lo tridimensional, La geometría en dos dimensiones está un poco... ...anticuada
FLUIDO CÓSMICO TEST ESPACIAL
Nuestra nueva confección de geodésicas...
... se compone de barras rígidas que encajan perfectamente las unas con las otras...
Y le permitirán no torcerse ni a derecha, ni a izquierda, ni hacia lo alto ni hacia lo bajo, sino ir... ¡SIEMPRE RECTO!


Para la medición de las superficies, esta pintura. Exactamente cien gramos por metro cuadrado
Ingenioso
Para medir los volúmenes, llénelos con este cilindro de gas y podrá leer directamente el valor en el flujómetro de TEST ESPACIAL
Y recuerde: superficie de la esfera: $4\pi L^2$, volumen: $\frac{4}{3}\pi L^3$
De acuerdo
EUCLIDES & Cía
¡Vaya trabajo!
Esta vez Anselmo aterriza en un espacio tridimensional y nosotros lo seguiremos en su exploración.


Es un buen material. Y estas barras tienen exactamente un metro
Pero después de haber puesto una buena cantidad de barras...
¡Ay no! ¡Otra vez como antes!
¡Mi geodésica se cierra sobre sí misma!
¿Un espacio tridimensional cerrado?
¡Es el fin de todo!
Sentado sobre un asteroide para una pequeña merienda, Anselmo decide pasar al método de medición de los ángulos.
EUCLIDES & CÍA
Tal como antes, voy a utilizar tres GEODÉSICAS para formar un TRIÁNGULO


?!?
¡Mis geodésicas están construidas adecuadamente, pero la suma de los tres ángulos es superior a 180°!!
Bueno...
TESTESPACIAL
FSCHHHHHHHH
Voy a fabricar una para medir su volumen y su superficie
Una esfera de radio L es un conjunto de puntos situados a una distancia L de un punto fijo, al que llamaré N
La superficie es menor que $4\pi L^2$
¡Y el volumen es menor que $\frac{4}{3}\pi L^3$!
¡Me han fallado de nuevo!

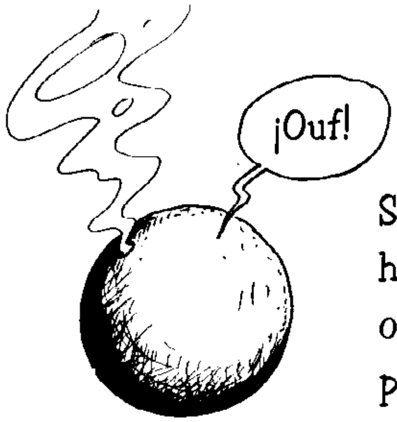
Anselmo sigue aumentando el radio L de la esfera.



Más y más...

Un poco más tarde...

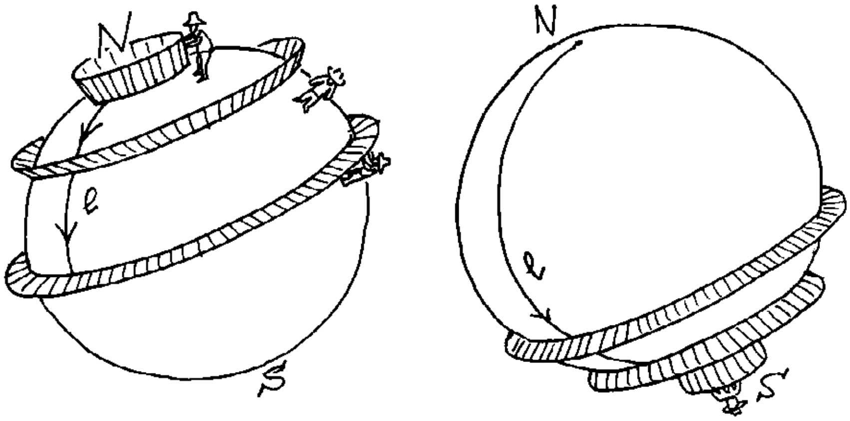
Así, inflando un simple globo en un espacio de tres dimensiones, Lanturly terminó encontrándose... ¡ADENTRO!



Si no hubiera cerrado el cilindro a tiempo, habría podido ser aplastado, tal como le ocurrió cuando quedó prisionero de su propio cercado en la página 13.

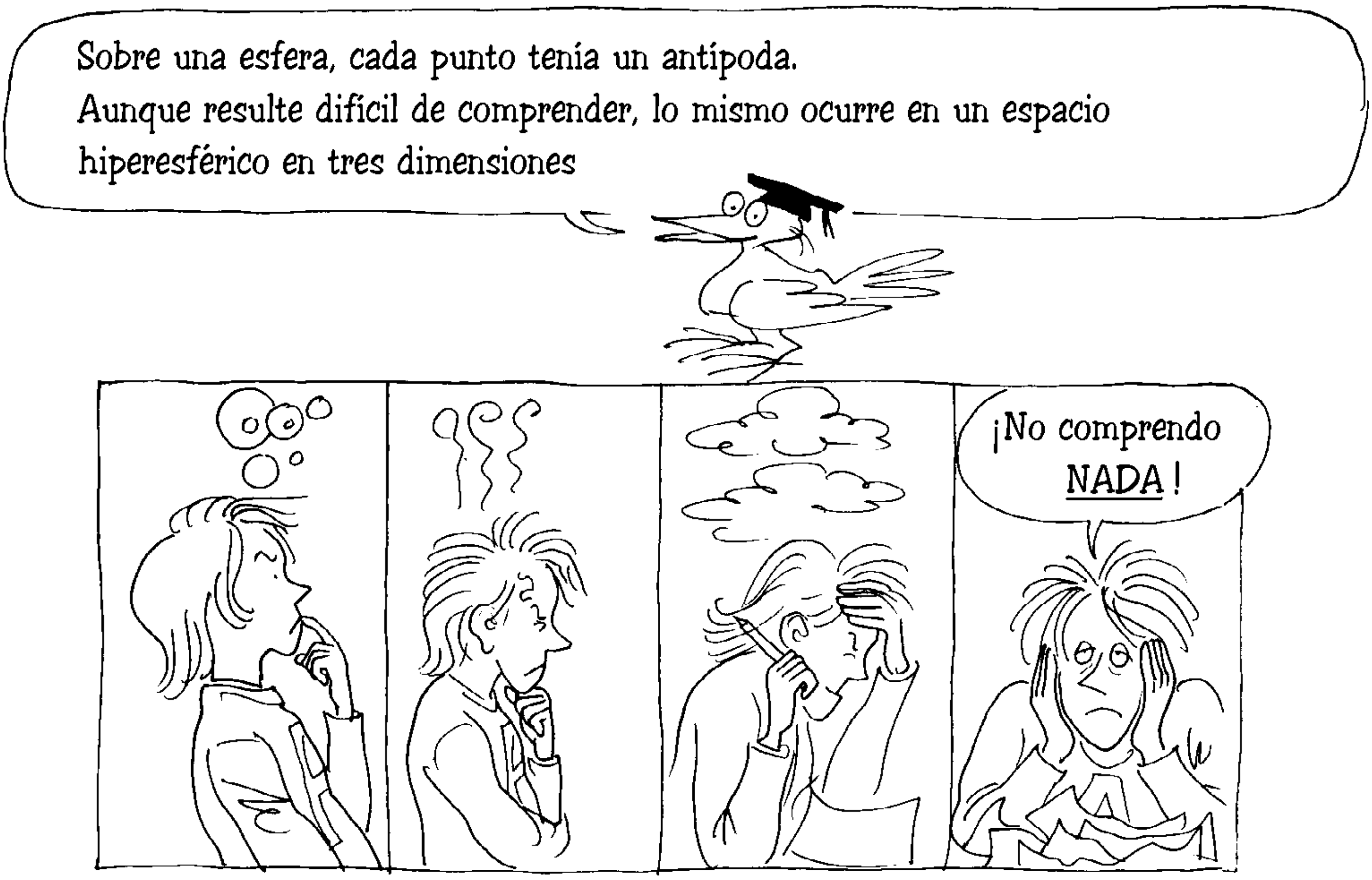
Incluso con la mejor voluntad del mundo, no es posible por ahora VISUALIZAR la CURVATURA de este espacio tridimensional. Sus geodésicas se cierran y su volumen no representa más que un número FINITO de metros cúbicos, así como la superficie de nuestro planeta, cerrada ella misma, no ofrece más que un número FINITO de metros cuadrados.
La suma de los ángulos internos de un triángulo de este espacio de tres dimensiones es mayor que 180°. Para "VER" su curvatura, haría falta ser capaz de percibir en cuatro dimensiones.

También se puede decir que nuestro UNIVERSO en tres dimensiones es una HIPERSUPERFICIE inmersa en un espacio de cuatro dimensiones, el cual a su vez puede estar inmerso en un espacio de cinco dimensiones, etc. Pero hoy día no queda uno bien diciendo tales cosas.



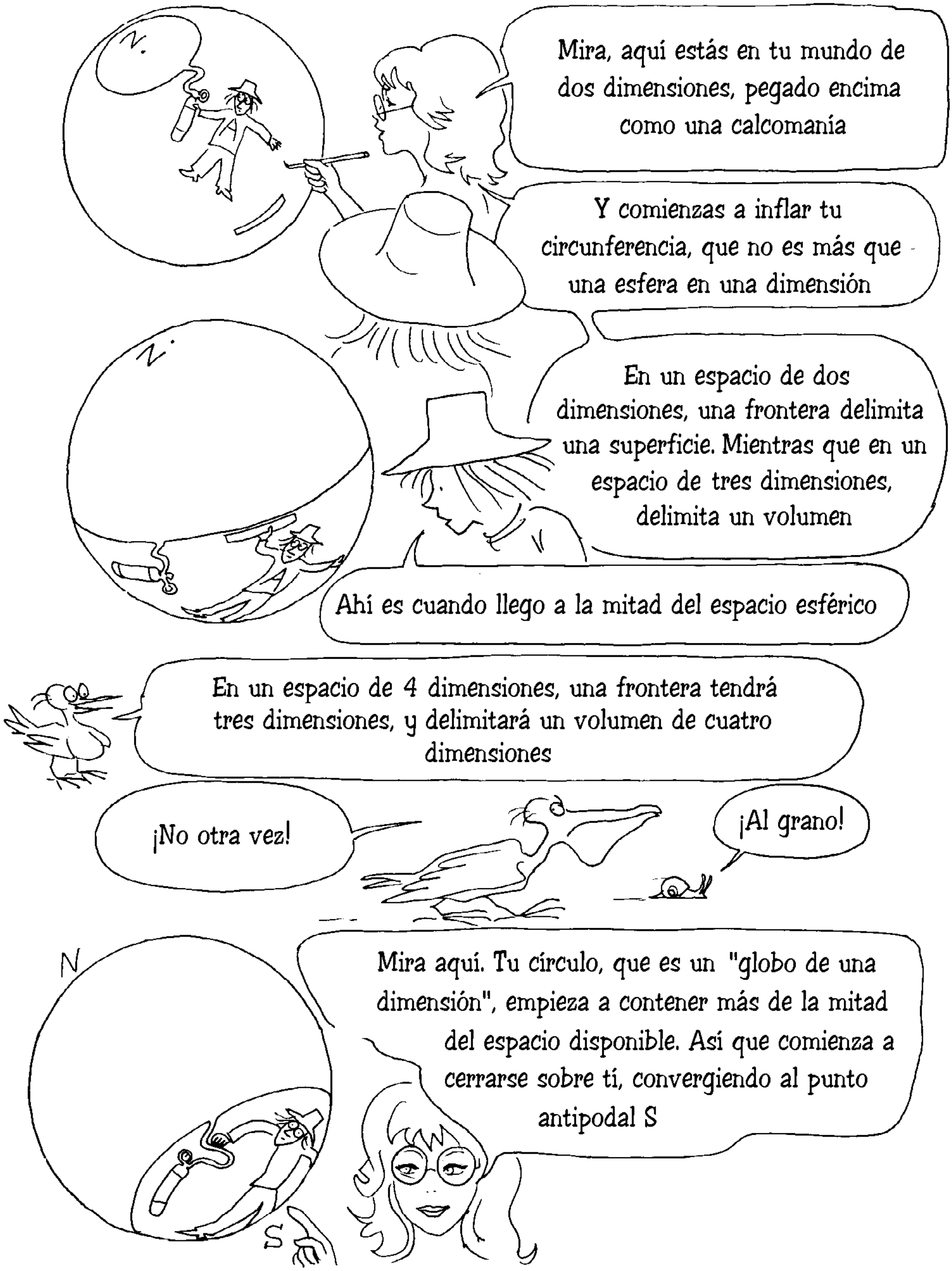
Al agrandar el radio L de su región sobre una esfera, Lanturly terminó hallándose en las antípodas S del punto N, centro de su círculo, y además encerrado dentro de su propio cercado. Lo mismo ocurre en el espacio tridimensional con curvatura positiva.

En el espacio bidimensional de la esfera, Anselmo encontraba el ECUADOR luego de haber cercado la mitad de la superficie disponible. Al ECUADOR del espacio tridimensional HIPERESFÉRICO, en cambio, Anselmo llega cuando su globo ocupa la mitad del volumen disponible. Sobre la esfera, el círculo del ecuador se le presentaba como una recta; en el espacio hiperesférico, el "globo ecuatorial" le parecerá, en cambio, un PLANO.
Más allá del ecuador la CONCAVIDAD del globo se invierte y logra automáticamente centrarse alrededor del punto antipodal S del punto N, centro del globo.



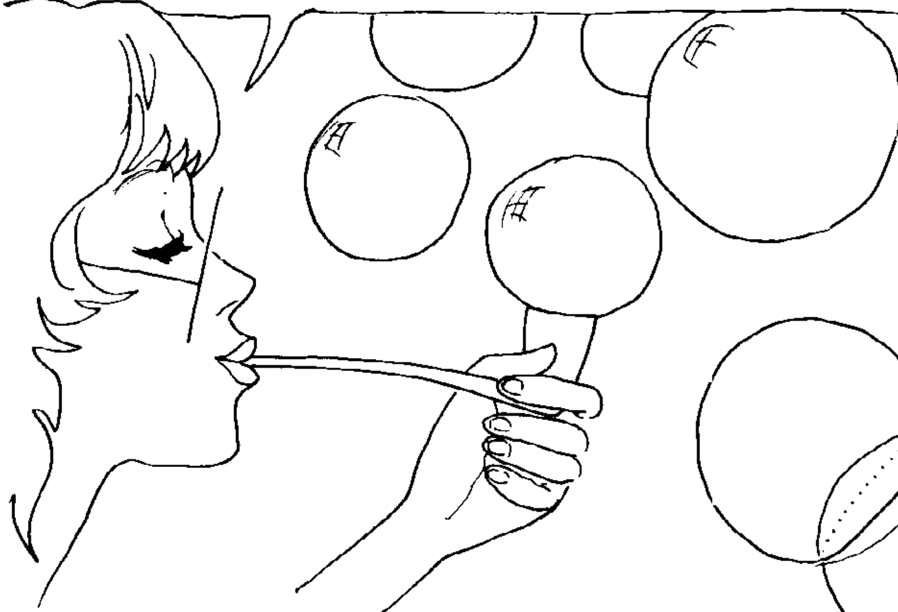

¿Problemas...?
Eee... cómo decir...
tengo una gran confusión en mi cabeza
¿Me recuerdas? Soy Sofía.
Las curvaturas de todo tipo
son mi especialidad
La navegación en las
hiperesferas es toda una
sorpresa para el principiante.
Hay que evitar bloquearse
y avanzar poco a poco
Ya veo...
Perdí un tanto el hilo...


¿Pero dónde está el CENTRO de esta hiperesfera?
Si dibujo una circunferencia sobre el PLANO, estamos de acuerdo que se trata de una representación de un espacio de una dimensión, cerrado e INMERSO en un espacio de dos dimensiones: el PLANO
Y su centro NO ESTÁ sobre la circunferencia
Mmm...
Una esfera representa un espacio cerrado de DOS dimensiones, inmerso en un espacio de tres. El centro de dicha esfera no yace sobre la esfera, sino en el espacio de tres dimensiones
El centro de un espacio hiperesférico de tres dimensiones podría estar en un espacio de cuatro si suponemos que aquél está INMERSO. Y así sucesivamente... también el centro de un espacio hiperesférico de cuatro dimensiones estaría en un espacio de cinco, etc...

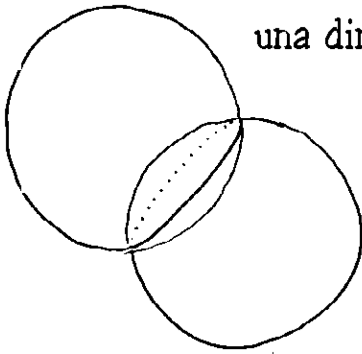

Mira, aquí estás en tu mundo de dos dimensiones, pegado encima como una calcomanía
N.
Y comienzas a inflar tu circunferencia, que no es más que una esfera en una dimensión
N.
En un espacio de dos dimensiones, una frontera delimita una superficie. Mientras que en un espacio de tres dimensiones, delimita un volumen
Ahí es cuando llego a la mitad del espacio esférico
En un espacio de 4 dimensiones, una frontera tendrá tres dimensiones, y delimitará un volumen de cuatro dimensiones
¡No otra vez!
¡Al grano!
N
Mira aquí. Tu círculo, que es un "globo de una dimensión", empieza a contener más de la mitad del espacio disponible. Así que comienza a cerrarse sobre tí, convergiendo al punto antipodal S
S

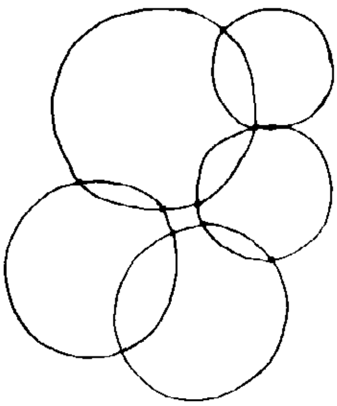

De la misma forma, cuando en mi espacio curvo de tres dimensiones inyecto más de la mitad del volumen total, el globo se cierra sobre mí, convergiendo hacia el punto antipodal
De hecho, la esfera en este espacio tridimensional curvo tiene evidentemente dos centros que son antipodales
¡ENTENDÍ!
?!!?
Bueno, exactamente no sé qué fue lo que entendí, pero tengo la sensación de haber entendido algo
¡Qué cosas!
No, Anselmo, cuando hay más de tres dimensiones
COMPRENDER ES EXTRAPOLAR
¡Extrapolé sin saberlo!
¡Tienes que imaginarlo tú mismo, usando tu cabeza!

Ahora tomo un espacio de tres dimensiones en el que coloco esferas de dos dimensiones, unos cuantos pequeños universos bidimensionales



Estos universos pueden compenetrarse y sus puntos comunes se repartirán a lo largo de circunferencias, objetos de una dimensión.





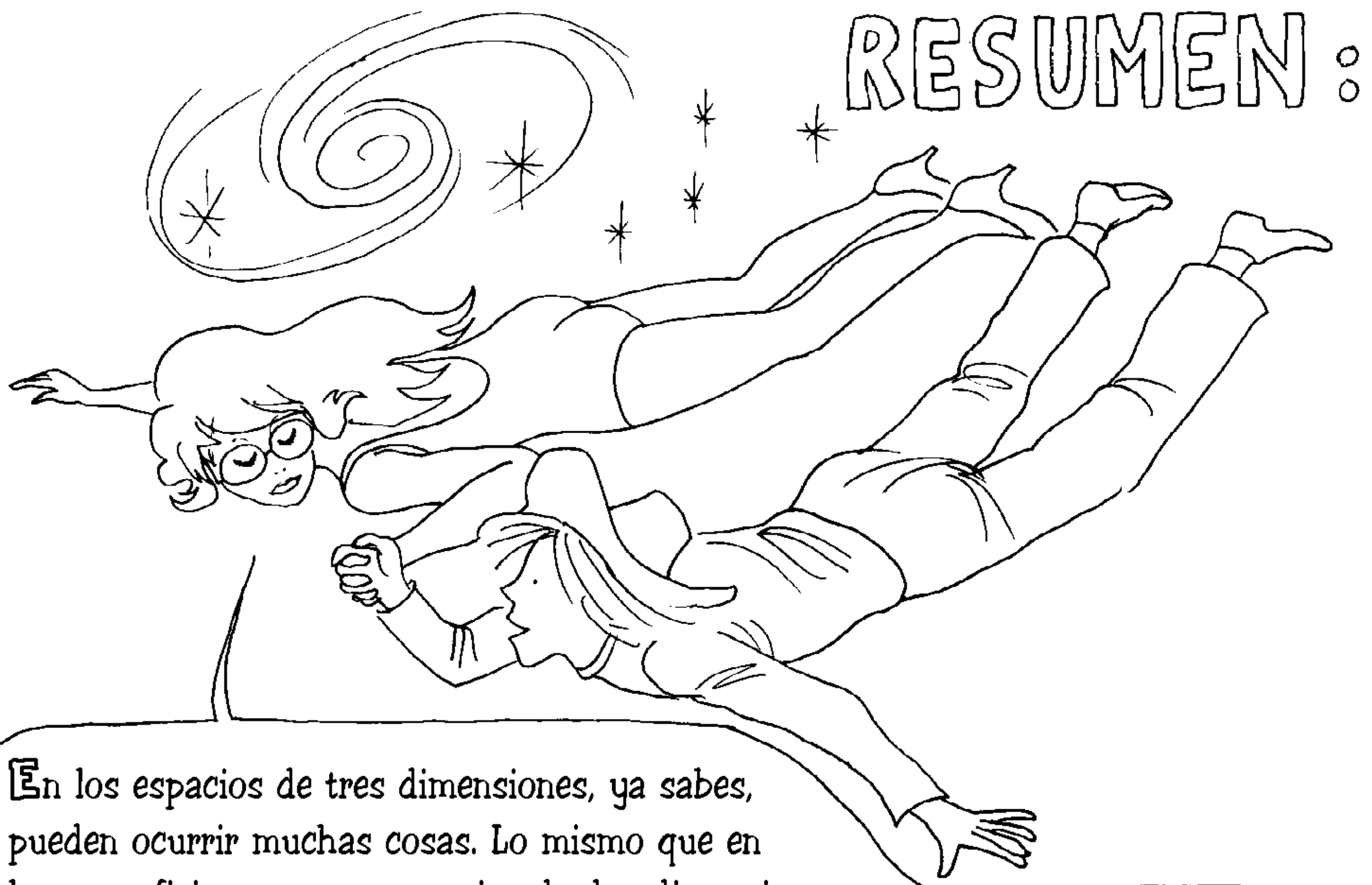
Así mismo, estas circunferencias, objetos de una dimensión, colocadas sobre una hoja de papel (2 dimensiones), se intersecarán en algunos PUNTOS. (Se suele decir que el PUNTO tiene dimensión cero).

Una esfera puede ser considerada, entonces, como la intersección de dos "burbujas" tridimensionales que se mueven en un espacio de cuatro dimensiones.

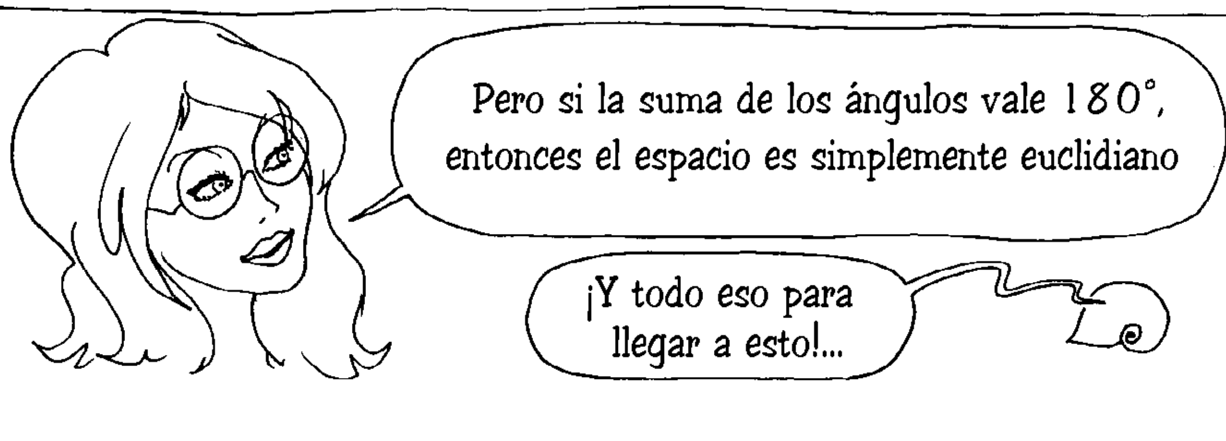
Y así sucesivamente: un espacio tridimensional curvo, hiperesférico, puede él mismo ser considerado como la intersección de dos burbujas de jabón de cuatro dimensiones que se mueven en un espacio de cinco dimensiones.


Anselmo y Sofía, después de experimentar el vértigo de la extrapolación, retoman la exploración de nuevos mundos tridimensionales.
Las matemáticas ya no son lo que eran antes...
Mira, esta es una cinta adhesiva tridimensional para las geodésicas. La parte con pegante está, naturalmente, en la punta
Oye, en este espacio las geodésicas no parecen cerrarse sobre sí mismas. Y si inflo el globo con la ayuda del TEST ESPACIAL, el volumen que resulta es mayor que $\frac{4}{3}\pi L^3$, y la superficie mayor que $4\pi L^2$. Además, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°
Recuerda la página 23, estás de nuevo en un espacio con curvatura NEGATIVA

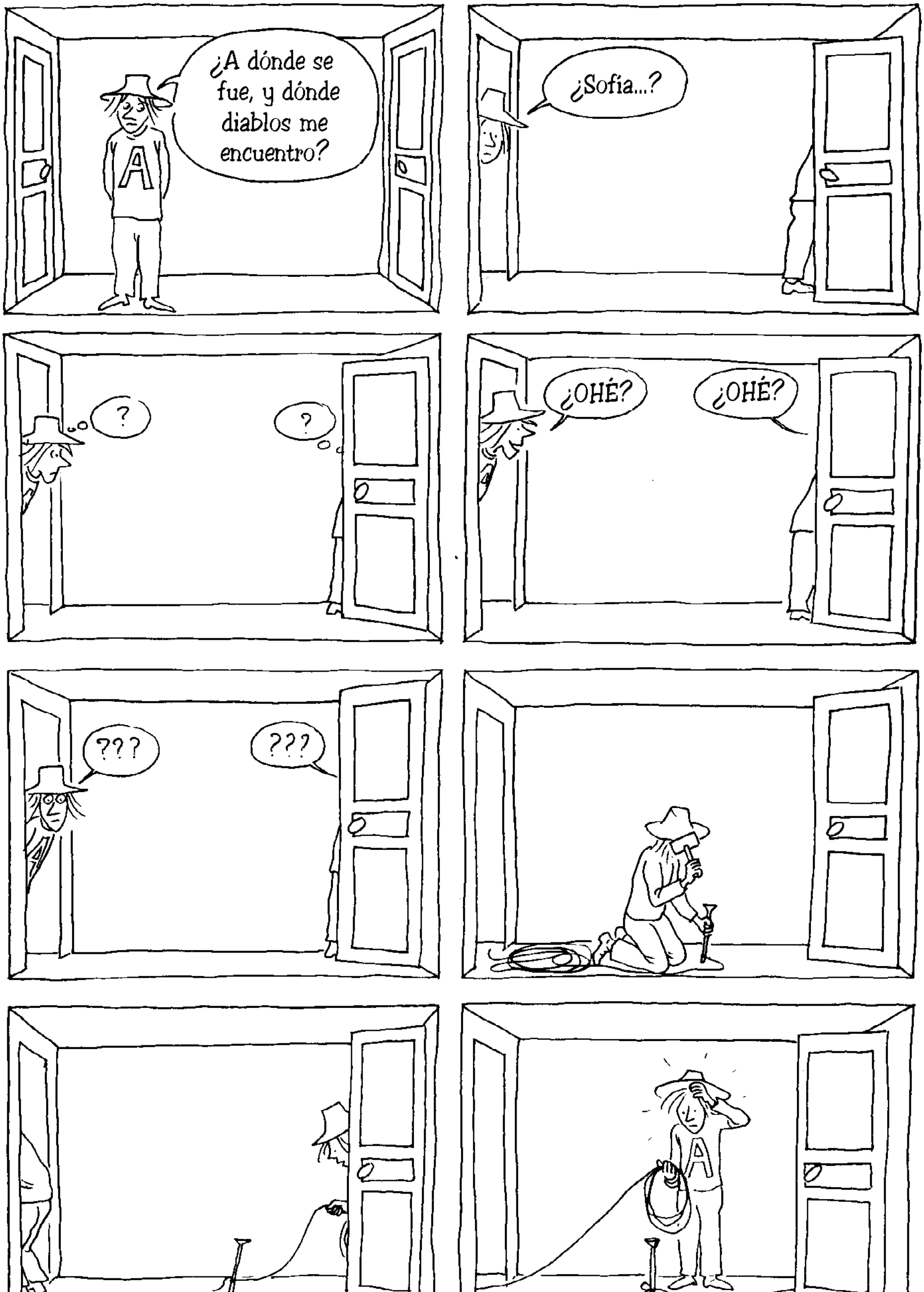
RESUMEN:

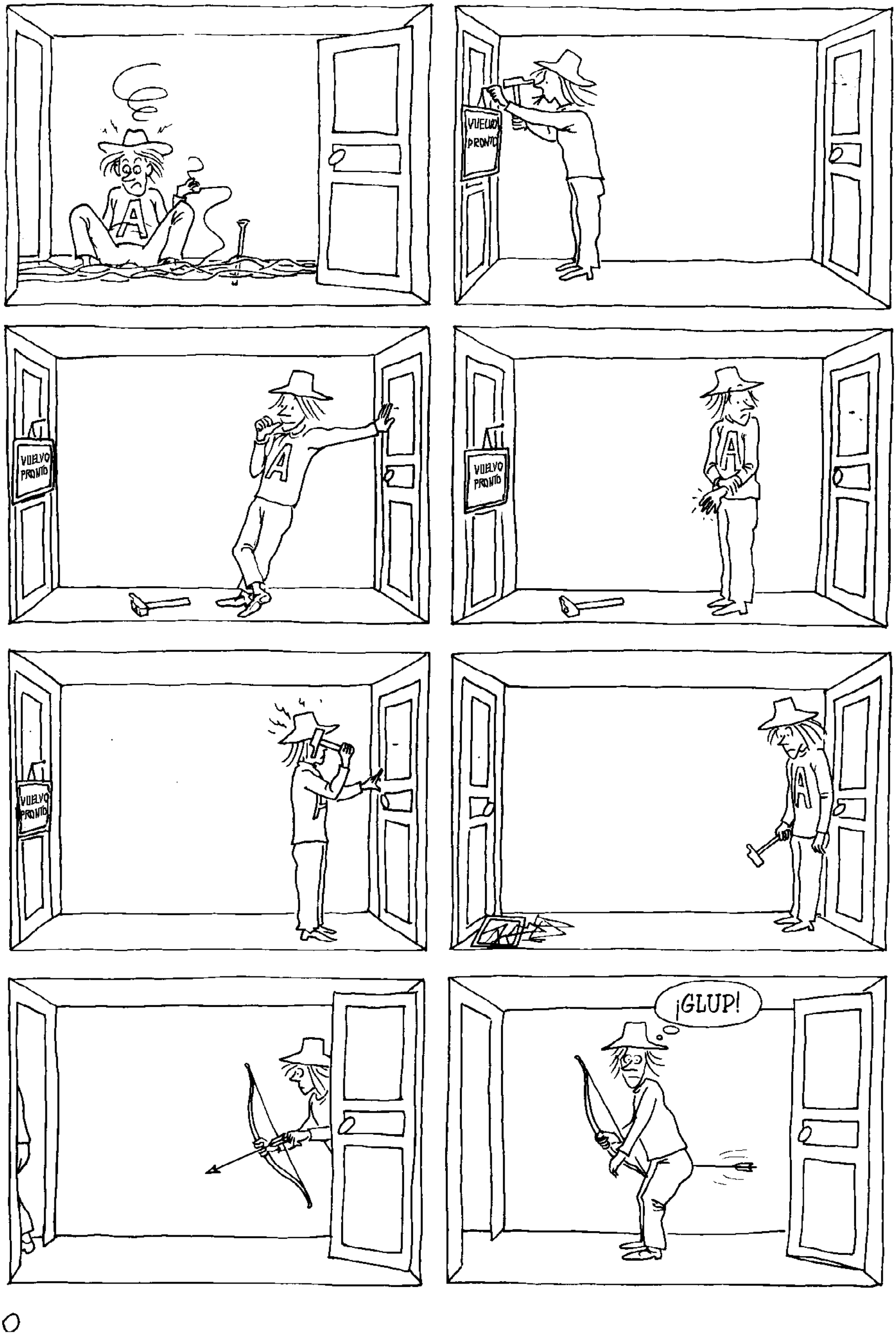


En los espacios de tres dimensiones, ya sabes, pueden ocurrir muchas cosas. Lo mismo que en las superficies, que son espacios de dos dimensiones.
Si la suma de los ángulos de un TRIÁNGULO, en un espacio de tres dimensiones, es mayor que 180°, diremos que la curvatura es positiva. Formando una esfera de radio L, encontrarás mediante el TEST ESPACIAL un volumen menor que $\frac{4}{3}\pi L^3$ y una superficie menor que $4\pi L^2$. Este espacio, denominado HIPERESFÉRICO, se cerrará sobre sí mismo. Si la suma de los ángulos de un triángulo, en un espacio tridimensional, es menor que 180°, entonces la curvatura será negativa. El volumen de una esfera de radio L será mayor que $\frac{4}{3}\pi L^3$, y su superficie mayor que $4\pi L^2$. Dicho espacio tendrá una extensión infinita.



¡UN ESPACIO DEBE SER ABIERTO O CERRADO!...


¿A dónde se fue, y dónde diablos me encuentro?
¿Sofía...?
?
?
¿OHÉ?
¿OHÉ?
???
???

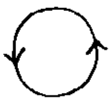

VUELVO PRONTO
VUELVO PRONTO
VUELVO PRONTO
VUELVO PRONTO
¡GLUP!

Ah, sí, Lanturly ha sido proyectado a un espacio cilíndrico de tres dimensiones. No obstante ser euclidiano, sin curvatura (la suma de los ángulos de un triángulo es allí igual a 180°), dicho mundo se cierra sobre sí mismo
GLUP
GEOMETRÍA
Está bien, admitamos mundos esféricos, hiperbólicos, cilíndricos... Al fin y al cabo los hemos visitado todos, ¿no?
¿Tú crees?
Realicemos un breve retorno a lo bidimensional
¡Ey!?
NUBES

SIN ADENTRO NI AFUERA

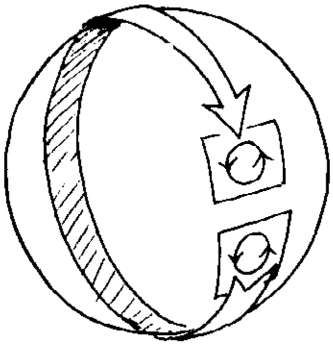

¡Otra vez se cierra, como antes!
Suma de los ángulos: 180°. Esta cosa es euclidiana, como el cilindro...
Bueno, casi...
!?!
¿Eéh?
En esta ocasión Anselmo ha terminado en un ESPACIO BIDIMENSIONAL NO ORIENTABLE. La representación más conocida de un espacio así es la cinta de Möbius (1830). La idea se le escapó a los griegos, quienes entonces no parecen haber pensado en todo
PUNTO DE PARTIDA DE LA GEODÉSICA
¡Sofía... sácame de aquí!

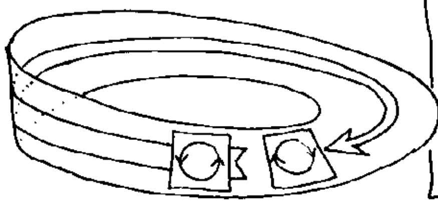
Tracemos una circunferencia sobre una superficie y curvémosla arbitrariamente.



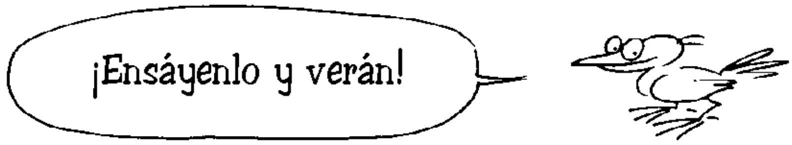
Imaginemos que el círculo es como una pequeña calcomanía que podemos deslizar a gusto sobre la superficie.

Si encontramos un círculo idéntico a sí mismo, diremos que la superficie es ORIENTABLE (como en el caso de la esfera, el cilindro, el plano, etc...). Pero si la calcomanía se mueve sobre una cinta de Möbius, va a ser diferente:



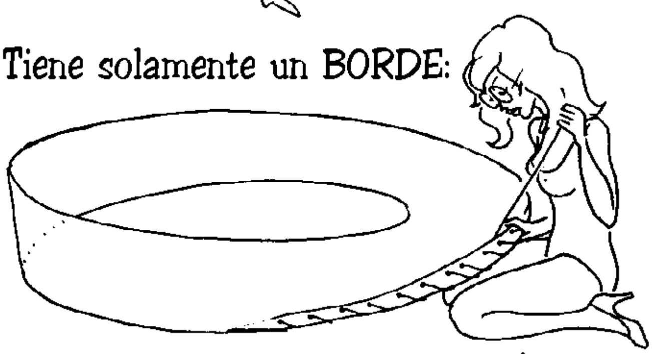


Cada vez que hace un recorrido por este universo de dos dimensiones, la orientación del círculo cambia.



Por eso mismo no es posible pintar una cinta de Möbius con dos colores diferentes: ésta no tiene más que un sólo lado, es decir es UNILÁTERA.

Tiene solamente un BORDE:



¡Se puede coser de una sola vez!


Ensayemos cortándola en dos
Más fácil decirlo que hacerlo, mi querido Anselmo...
¿Cómo hacer para cortarla en dos?
Es fácil: ¡córtala en tres!
Noten que, durante la operación, esta cosa se volvió bilátera
Me siento totalmente desorientado
Noten también que ahora hay una cosa unilátera (blanca) y una bilátera (gris) del doble de longitud que la primera

Luego de este paseo por la cinta de Möbius, volvamos a los espacios euclidianos (sin curvatura) en tres dimensiones.

La orientación del espacio:

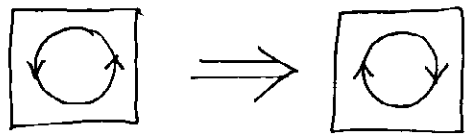
(*) Juego de palabras en el original: "bon sens" quiere decir tanto "sentido común" como "sentido correcto" (NdT).

Acompañemos a Anselmo en su exploración de un nuevo mundo tridimensional euclidiano (sin curvatura).

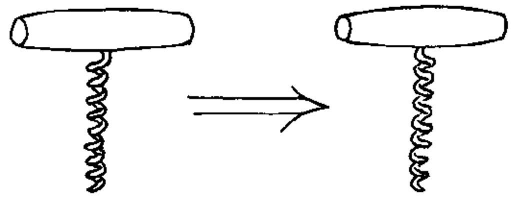

iH iH iH
!iH !iH !iH
Haré una prueba
Suma de ángulos 180°
Superficie $4\pi L^2$, volumen $\frac{4}{3}\pi L^3$, bien, todo en orden
Es euclidiano
Por suerte, aquí está mi botella
¡¿Pero qué ocurre con este maldito sacacorchos?!
Es mi sacacorchos, lo reconozco
¿Pero qué diablos le sucedió?
¡OBSÉRVENLO BIEN!
¿Problemas?
Yo, estee...


Es un rosé de Provenza, de calidad muy regular...
¿Tienes un sacacorchos?
Eee... sí
Si todos los canguros del mundo se dieran la mano...
BLUB BLUB BLUB
¿No has notado algo extraño?
No, sólo que tienes mala cara, nada más
Toma un poco de bisulfito de parmesano dos veces al día
Que tengas buen día...
CLOP
CLOP
CLOP
CLOP
Alguien me cambia el sacacorchos y un canguro ebrio se toma mi vino rosé. ¡¿Qué diablos pasa aquí?!
¡Maldición!
SBLING!
De nuevo les pedimos que observen atentamente este sacacorchos

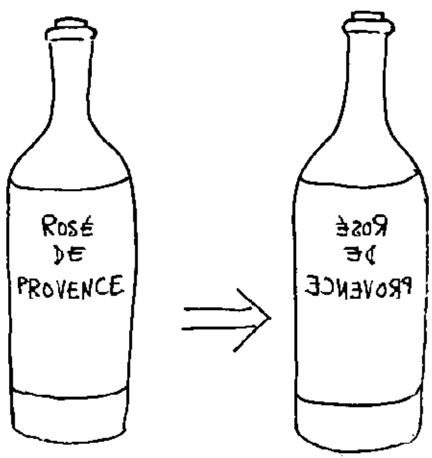
La cinta de Möbius (espacio no orientable en dos dimensiones) tiene entonces un equivalente tridimensional. Cuando el círculo-calcomanía daba la "vuelta" en el espacio euclidiano de la cinta de Möbius, su orientación cambiaba:



Ver la página 54.



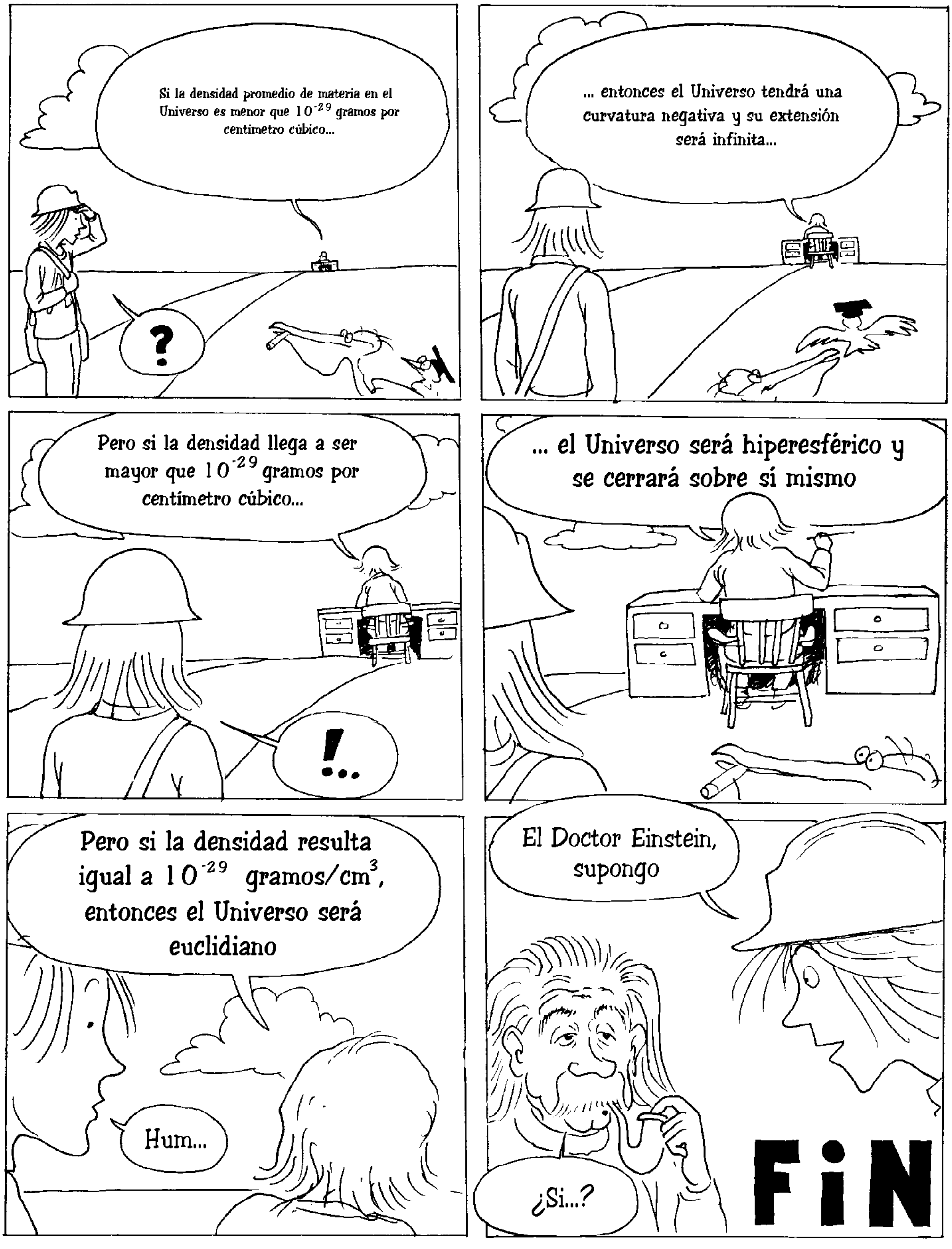
Noten que estos objetos son imágenes "especulares". El sacacorchos, y hasta el propio Anselmo, pueden ser considerados como "calcomanías en tres dimensiones". Cada vez que un objeto completa una "vuelta" a ese espacio tridimensional, su orientación se invierte. Puesto que hemos decidido acompañar a Lanturly en su periplo circunspacial, es normal que encontremos, como él, una botella "especular" y un sacacorchos enrollado en un sentido inusual. Una segunda "vuelta" a dicho universo nos volvería a la situación inicial (a condición de que dejemos los objetos en su lugar).



Anselmo y el canguro (del espacio de los antípodas) habitan el mismo espacio, pero difieren en el sentido de que lo que está "al derecho para el canguro" está "al revés para Anselmo", y viceversa.


EPÍLOGO:
Todo está patas arriba. Ya no hay más ni derecha, ni izquierda, ni derecho ni revés. ¿A dónde lleva todo esto? ¿Qué camino seguir?
Tienes que seguir las geodésicas, Anselmo, las geodésicas de tu vida
Nunca nadie me hará creer que el universo es así de extravagante. Esos no son más que delirios de matemático
¡Cosas de las historietas!
Para qué preocuparse con todo eso, si es evidente que el espacio ES euclidiano (*)
(*) Palabras pronunciadas en 1830 por Ostrogradsky, profesor titular de la cátedra de matemáticas en Petrogrado, luego de leer los trabajos de Riemann y de Lobatchevsky


Admitamos que el universo no se parece a cómo es. ¡¡¿Te imaginas lo que sería enseñar eso en las escuelas?!!
¡Un desastre!
Al fin de cuentas lo que cuenta es la vida. Y en lo que concierne a la vida de todos los días, estarás de acuerdo conmigo en que...
¿Qué se esconde tras todo esto?
La FÍSICA, mi querido...
¡Voy a poner todo eso en claro!
Adelante hacia lo CONCRETO
¿Hay alguien ahí?

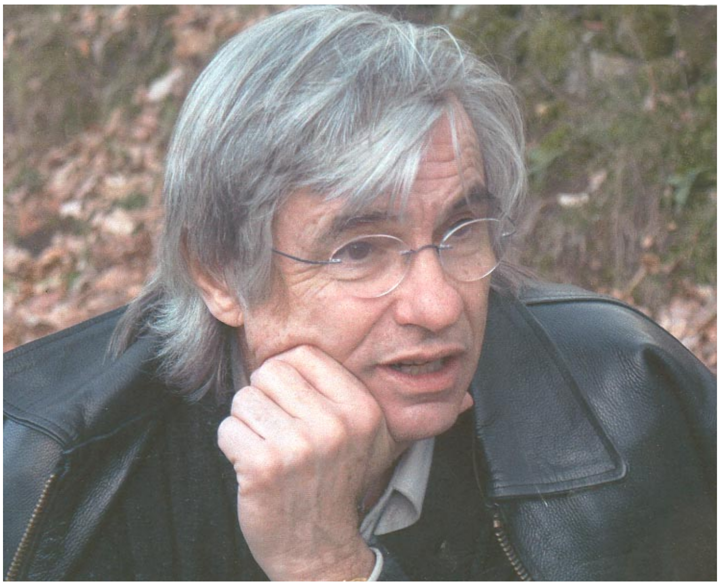

Si la densidad promedio de materia en el Universo es menor que 10^{-29} gramos por centímetro cúbico...
?
... entonces el Universo tendrá una curvatura negativa y su extensión será infinita...
Pero si la densidad llega a ser mayor que 10^{-29} gramos por centímetro cúbico...
!..
... el Universo será hiperesférico y se cerrará sobre sí mismo
Pero si la densidad resulta igual a 10^{-29} gramos/cm^3, entonces el Universo será euclidiano
Hum...
El Doctor Einstein, supongo
¿Si...?
FiN


¿Hay algún matemático por acá?

Saber sin Fronteras

Association Loi de 1901

http://www.savoir-sans-frontieres.com



Jean-Pierre Petit, presidente de la Asociación

Antiguo director de investigaciones del CNRS, astrofísico y creador de un nuevo género : la Historieta Científica. Creada en el año 2005 junto con su amigo Gilles d'Agostini, la asociaciòn Saber sin Fronteras tiene como finalidad distribuir gratuitamente el saber cientìfico y técnico por todo el mundo. La asociación funciona gracias a donaciones y retribuye a sus traductores con 150 euros por cada historieta traducida (en el 2007), asumiendo además los cargos bancarios de las transferencias. Numerosos traductores en todo el mundo contribuyen a aumentar diariamente el número de álbumes traducidos, los cuales ascienden en el 2007 a 200 y son telecargables de manera gratuita en 28 idiomas, incluyendo el Laostaní y el Ruandés.

El presente archivo pdf puede ser duplicado y reproducido sin restricciones, parcial o totalmente, y utilizado por los profesores en sus cursos a condición de que lo hagan sin ánimo de lucro. Puede ser depositado en bibliotecas municipales, escolares y universitarias, tanto en forma impresa como en redes de tipo Intranet.

El autor tiene previsto completar la presente colección de historietas con álbumes más elementales, para chicos de 12 años. Igualmente están en proceso de elaboración álbumes « hablantes » para analfabetas, así como álbumes bilingùes para el aprendizaje de idiomas a partir de las lenguas de origen.

.

La asociación está buscando continuamente nuevos traductores que puedan traducir las obras a su propia lengua materna y que posean las competencias técnicas que los habiliten para realizar buenas traducciones de los álbumes que emprenden.

Para contactar la asociación basta con ir a su página web

Para realizar una donación:

Para otros países ➔ Número de Cuenta Bancaria Internacional (IBAN) :

IBAN
FR 16 20041 01008 1822226V029 88

y ➔ Código Identificador del Banco (BIC):

BIC
PSSTFRPPMAR

Los estatutos de la asociación (en francés) están disponibles en su sitio web. Así mismo, la contabilidad puede ser accesada en línea, en tiempo real. La asociación no retiene dinero alguno de las donaciones, ni siquiera los costos de las transferencias bancarias, de modo que las sumas entregadas a los traductores son netas.

La asociación no paga a ninguno de sus miembros, que operan benévolamente y asumen ellos mismos los costos de funcionamiento y de administración del sitio web, costos que no son por lo tanto sufragados por la asociación.

Pueden estar seguros de que en esta especie de « obra humanitaria cultural », cualquiera sea la suma que ustedes donen, ésta será consagrada íntegramente a retribuir a los traductores.

En promedio, estamos poniendo en línea una decena de nuevas traducciones cada mes.